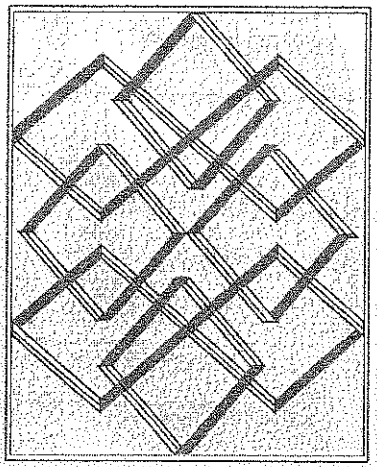
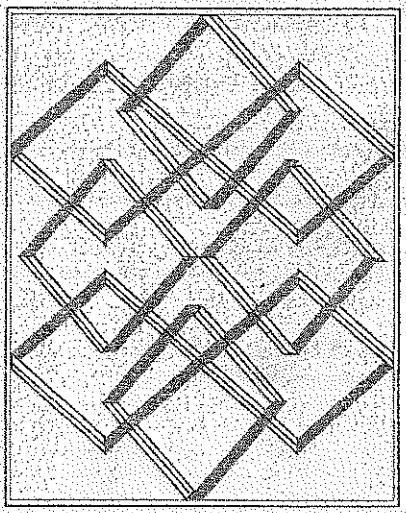
GEOMETRIA DESCRIPTIVA



Victor Vidal B.



TEORIA Y PROBLEMAS

Grupo Universitario S.A.C.

A MIS PADRES

Arístides Vidal Márquez y Graciela Barrena Diestra

Con admiración y ante la grandeza de sus ejemplos
para cumplir con su deber de Padres.

RECONOCIMIENTO

Mi agradecimiento a mis colegas de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería y a los colegas de la Universidad Ricardo Palma, por la confianza depositada al considerar la presente obra como texto de consulta en el sílabo de los cursos de Geometría Descriptiva y Diseño Gráfico respectivamente.

Asimismo hago extensivo mi agradecimiento a todas las personas que en una u otra forma han contribuido con opiniones y sugerencias con el autor en la elaboración de la presente obra.

Finalmente el "autor" hace constar mi agradecimiento a todos ellos por sus valiosas y numerosas indicaciones que he recibido, de aquellos que enseñaron o estudiaron las primeras siete ediciones; esa amabilidad y crítica constructiva, han sido sinceramente apreciadas.

Víctor Beder Vidal Barrena
El Autor

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA
Teoría y Problemas

Autor: Victor VIDAL B.

Diagramación y Diseño: Jose Eduardo Arroyo Almonacid

Derechos de Autor
Prohibida su reproducción total o parcial sin autorización del autor

Novena Edición; **julio 2021**
Reimpresión 2021

Propiedad de Editorial **GRUPO UNIVERSITARIO S.A.C**

© Editorial Av. Gerardo Únger 295-A S.M.P. Cel.986630610-S.M.P.

E-mail: grupouniversitario.sac@gmail.com

Lima-Perú

GRUPO UNIVERSITARIO SAC

IMPRESO EN LOS TALLERES DE GRUPO UNIVERSITARIO S.A.C

PRÓLOGO

El objetivo de este texto es de facilitar la compresión del estudio de la Geometría Descriptiva, de tal forma de que desarrolle en el estudiante la capacidad de imaginación; requisito indispensable en la práctica de la Ingeniería, que le permitirá en la vida profesional desempeñarse con aplomo.

El curso de Geometría Descriptiva tiene por finalidad dar a conocer los principios básicos de las proyecciones ortogonales, el punto, la recta y el plano; hasta llegar a las formas complejas como son los prismas, las pirámides, los cilindros, los conos, las esferas, etc. La determinación de todos estos elementos, su verdadera forma, es indispensable para el diseño en su carrera de Ingeniería, que le permitirá lograr mejores resultados.

Debido a la importancia de cada uno de los capítulos que se desarrollan en el texto, y por la experiencia de muchos años que tengo en la enseñanza de este curso, he comprobado que los estudiantes tienen mucho tropiezo en el estudio de este curso: por tal motivo es necesario complementar a la teoría que se presenta, la solución de problemas tipos que constituyen uno de los mejores medios para aclarar y fijar en la mente del lector los principios básicos. Así mismo al final de cada capítulo se han dejado una serie de problemas propuestos, para que sean solucionados por el estudiante y que le permitirá ampliar sus conocimientos. En esta octava edición se han aumentado los capítulos.

Mi deuda es grande con otros textos. Por propia educación y experiencia de muchos años en la enseñanza, ha sido influida por los trabajos de otros autores referidos al tema, pero la gran mayoría de estos, se presentan en su totalidad confusa y complicada; por lo tanto, no pretendo originalidad en el contenido de cada tema, presentado en forma general y concisa. El autor desea agradecer a quienes tengan la amabilidad de señalarme los errores que hayan podido descubrir y me hagan sugerencias para seguir perfeccionando este texto. Finalmente el agradecimiento a Mis Padres, por su estímulo durante los muchos años en que estuve preparando esta obra.

Surco, agosto del 2012

VICTOR BEDER VIDAL BARRENA
EL AUTOR

LIMA - PERU

CONTENIDO

PROLOGO.		IV
CONTENIDO.		V
CAPITULO 1: INTRODUCCION.		1
1.0	Introducción.	1
1.1	Geometría Descriptiva.	1
1.2	Proyección.	1
1.3	Tipos de proyecciones: cónica, cilíndrica y ortogonal.	1
1.4.	Planos de Proyección.	2
1.5	Sistemas Normalizados de proyección.	4
	Problemas Resueltos.	7
	Problemas Propuestos.	25
CAPITULO 2: EL PUNTO.		29
2.0	Introducción.	29
2.1	Aplicación de los principios de la Proyección Ortogonal a la Geometría Descriptiva: Depurado del Punto.	29
2.2	Graficación de un Punto por Coordenadas.	30
2.3	Planos Auxiliares.	31
2.4	Proyecciones Sucesivas de un Punto en el Espacio.	34
2.5	Proyecciones Relativas de dos puntos en el Espacio.	34
2.6	Reglas de Visibilidad.	35
2.7	Vistas Auxiliares de Sólidos.	36
	Problemas Resueltos.	44
	Problemas Propuestos.	68
CAPITULO 3: LA RECTA.		73
3.1	Posición no Particular de una recta oblicua en el Espacio.	73
3.2	Posiciones Particulares de una recta en el Espacio.	73
3.3	Orientación de una recta oblicua.	76
3.4	Dimensión Verdadera de una Recta Oblicua.	77
3.4.1	Método: con vista auxiliar.	78
3.4.2	Método de Diferencia de Cotas.	78
3.5	Pendiente Verdadera de una Recta.	79
3.6	Proyección de Punta de una Recta.	81
3.7	Punto Contenido en una Recta.	83
3.8	Posiciones Relativas de dos Rectas en el Espacio.	83
	Problemas Resueltos.	85
	Problemas Propuestos.	116

CAPITULO 4: EL PLANO: 124

4.1 Su determinación. 124
4.2 Posiciones Particulares de un Plano en el Espacio. 124
4.3 Recta Contenida en un Plano. 127
4.4 Punto Contenido en un Plano. 128
4.5 Rectas Notables en el Plano. 128
4.6 Orientación de un Plano. 129
4.7 Proyección de Canto o Filo de un Plano Oblicuo. 130
4.8 Inclinación de un Plano. 131
4.9 Recta de Máxima Pendiente. 133
4.10 Dimensión Verdadera de un Plano Oblicuo. 135
4.11 Localizar por rumbo e Inclinación un Punto y una Recta en un Plano Dado. 135
Problemas Resueltos: 137
Problemas Propuestos: 160

CAPITULO 5: INTERSECCIONES. 164

5.1 Intersección de una Recta con un Plano. 164
5.1.1 Método de la vista de canto. 164
5.1.2 Método del plano cortante. 166
5.2 Intersección de Planos. 167
5.2.1 Método de la vista de canto. 167
5.2.2 Método del Plano Cortante: Planos limitados. 168
5.2.3 Método del Plano cortante: Planos ilimitados. 169
Problemas Resueltos. 172
Problemas Propuestos. 197

CAPITULO 6: PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD. 201

6.1 Condición de Paralelismo. 201
6.2 Por una recta trazar un Plano Paralelo a una recta dada. 202
6.3 Por un punto trazar un Plano paralelo a dos rectas dadas. 202
6.4 Por un punto trazar una recta paralela a un Plano. 203
6.5 Por un punto trazar un plano paralelo u otro plano dado. 204
6.6 Condición de perpendicularidad. 204
6.7 Por un punto trazar un plano perpendicular a una recta dada. 205
6.8 Por un punto trazar una recta perpendicular a un plano. 207
6.8.1 Método de la vista de canto. 207
6.8.2 Método de las rectas notables. 208
6.9 Por una recta trazar un plano perpendicular a un plano dado. 209
6.10 Por un punto trazar un plano perpendicular a un plano dado y paralelo a una Recta dada. 209
6.11 Por un punto trazar un plano perpendicular a dos planos dados. 210
Problemas Resueltos. 212
Problemas Propuestos 237

CAPITULO 7: MENOR DISTANCIA. 242

7.1 Menor Distancia de un punto a una recta. 242
7.1.1 Método de la recta. 243
7.1.2 Método del plano. 244
7.1.3 Método del plano sin vistas auxiliares. 244
7.2. Menor distancia de un punto a un plano. 245
7.2.1 Método de la vista de canto. 246
7.2.2 Método de las rectas notables. 248
7.2.3 Menor distancia horizontal. 249
7.2.4 Menor distancia con pendiente dada. 252
7.3 Menor distancia entre dos rectas que se cruzan. 254
7.3.1 Método de la recta. 255
7.3.2 Método del plano. 256
7.4. Menor distancia horizontal entre dos rectas que se cruzan. 257
7.5 Menor distancia con pendiente dada entre dos rectas que se cruzan. 258
7.6 Distancia paralela a una dirección dada entre dos rectas que se cruzan. 259
Problemas Resueltos. 263
Problemas Propuestos. 299

CAPITULO 8: ANGULOS. 303

8.1 Ángulo entre dos rectas que se cruzan. 303
8.1.1 Método de la recta. 303
8.1.2 Método del plano. 304
8.2. Ángulo entre una recta y un plano. 305
8.2.1 Método de la recta. 305
8.2.2 Método del plano. 306
8.2.3 Método del ángulo complementario. 307
8.3 Ángulo entre planos. 308
Problemas Resueltos. 311
Problemas Propuestos. 331

CAPITULO 9: GIROS 334

9.1 Noción de rotación. 334
9.2. Giro de un punto alrededor de un eje. 334
9.3 Giro de una recta alrededor de un eje. 336
9.3.1 Dimensión verdadera de una recta. 336
9.3.2 Pendiente de una recta. 336
9.3.3 Vista de punta de una recta. 336
9.4 Giro de un Plano. 338
9.4.1 Vista de canto de un plano. 338
9.4.2 Inclinación de un plano. 339
9.4.2 Dimensión verdadera de un plano. 340
9.5 Ángulo entre rectas y planos mediante giros. 341
9.6 Ángulo diedro entre dos planos. 341
Problemas Resueltos. 343
Problemas Propuestos. 355

CAPITULO 10: INTERSECCIÓN DE RECTAS CON POLIEDROS Y SUPERFICIES. 358

10.0 Introducción. 358
10.1 Poliedros: su representación. 358
10.2 Puntos contenidos en caras de poliedros. 361
10.2.1 En la cara de un Prisma. 361
10.2.2 En la cara de una Pirámide. 364
10.3 Reglas de visibilidad. 366
10.4 Intersección de rectas con Poliedros. 366
10.4.1 Intersección de Recta con Prisma. 366
10.4.2 Intersección de Recta con Pirámide. 369
10.5 Superficies. Su representación. 371
10.5.1 Representación de conos. 371
10.5.2 Representación de cilindros. 371
10.5.3 Representación de esferas. 372
10.6 Puntos contenidos en una superficie. 372
10.6.1 Puntos contenidos en la superficie de un cono. 372
10.6.2 Puntos contenidos en la superficie de un cilindro. 373
10.6.3 Puntos contenidos en la superficie de una Esfera. 374
10.8 Intersección de rectas con superficies. 375
10.8.1 Intersección de recta con cono. 375
10.8.2 Intersección de recta con un cilindro. 376
10.8.3 Intersección de recta con una esfera. 377
Problemas Resueltos. 379
Problemas Propuestos. 384

CAPITULO 11: PLANOS TANGENTES A SUPERFICIES. 389

11.1 Concepto General. 389
11.1 Rectas tangentes. 389
11.2 Rectas tangentes a superficies. 389
11.3 Planos tangentes a conos. 390
11.3.1 Por un punto contenido en su superficie. 390
11.3.2 Por un punto exterior a su superficie. 391
11.3.3 Paralelo a una recta dada. 392
11.3 Plano tangente a un cilindro. 393
11.3.1 Por un punto contenido en su superficie. 393
11.3.2 Por un punto exterior a su superficie. 394
11.3.3 Paralelo a una recta dada. 395
11.4 Plano tangente a una esfera. 396
11.4.1 Por un punto contenido en su superficie. 396
11.4.2 Por una recta dada externa. 396
Problemas Resueltos. 398
Problemas Propuestos. 401

CAPITULO 12: INTERSECCIÓN DE PLANOS CON POLIEDROS Y SUPERFICIES. 405

12.0 Introducción. 405
12.1 Métodos para hallar la intersección. 405
12.2 Reglas de visibilidad. 406

12.3 Intersección de Plano con Poliedro. 406
12.3.1 Intersección de un Plano con una Pirámide. 407
12.3.1.1 Método del plano cortante. 408
12.3.1.2 Método de la vista de canto. 410
12.3.2 Intersección de un Plano con un Prisma. 411
12.3.2.1 Método del plano cortante. 413
12.3.2.2 Método de la vista de canto. 414
12.4 Intersección de plano con superficie. 415
12.4.1 Intersección de un plano con un cono. 416
12.4.2 Intersección de un plano con cilindro. 417
Problemas Resueltos. 419
Problemas Propuestos. 425

CAPÍTULO 13. INTERSECCIÓN DE POLIEDROS. 428

13.0 Introducción. 428
13.1 Métodos para hallar la intersección. 428
13.2 Reglas de visibilidad. 429
13.3 Tipos de intersección y sistemas de numeración. 429
13.4 Intersección de dos prismas. 430
13.4.1 Método de la vista de canto. 431
13.4.2 Método del plano cortante. 432
13.5 Intersección de dos pirámides. 433
13.6 Intersección de una pirámide con un prisma. 435
Problemas Resueltos. 438
Problemas Propuestos. 471

CAPÍTULO 14: INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES. 477

14.1 Introducción. 477
14.2 Métodos para hallar la intersección. 477
14.3 Reglas de visibilidad. 479
14.4 Intersección de dos conos. 479
14.4.1 Intersección de dos conos circulares, de bases paralelas. 479
14.4.2 Tipos de intersecciones y sistema de numeración. 481
14.4.3 Intersección de dos conos cuyas bases están en el mismo plano horizontal. 483
14.5 Intersección de dos cilindros. 486
14.5.1 Intersección de dos cilindros rectos. 486
14.5.1.1 Tipos de intersecciones y sistema de numeración. 486
14.5.1.2 Método del plano cortante. 488
14.5.2 Intersección de dos cilindros oblicuos de bases paralelas. 488
14.5.2.1 Tipos de intersecciones y sistema de numeración. 489
14.5.2.2 Método del plano cortante. 490
14.5.3 Intersección de dos cilindros oblicuos con bases en diferentes planos. 492
14.6 Intersección de cilindro con cono. 493
14.6.1 Intersección de cilindro y cono de ejes paralelos. 493
14.6.2 Intersección de cilindro y cono recto. 494
14.6.2.1 Tipos de intersecciones y sistema de numeración. 494
14.6.2.2 Método del plano auxiliar. 495

14.6.3 Intersección de cilindro y cono oblicuos cuyas bases están en el mismo plano horizontal. 496
14.6.3.2 Método del plano cortante. 498
14.6.4 Intersección de cilindro y cono oblicuos cuyas bases están en planos no paralelos. 500
Problemas Resueltos. 502
Problemas Propuestos. 513

CAPÍTULO 15: DESARROLLOS. 518

15.1 Introducción 518
15.2 Clasificación de los desarrollos. 518
15.3 Método Radial 520
15.3.1 Desarrollo de una Pirámide Recta Truncada. 521
15.3.2 Desarrollo de una Pirámide oblicua Truncada. 522
15.3.3 Desarrollo de un Cono Recto Truncado. 523
15.3.4 Desarrollo de un Cono Oblicuo Truncado. 524
15.4 Desarrollo con Líneas Paralelas. 525
15.4.1 Desarrollo de un Prisma Recto Truncado. 525
15.4.2 Desarrollo de un Prisma Oblicuo. 526
15.4.3 Desarrollo de un Cilindro Recto Truncado. 527
15.4.4 Desarrollo de un Cilindro Oblicuo. 528
15.5 Desarrollo por Triangulación. 529
15.5.1 Desarrollo de una pieza de Transición de conductos rectangulares. 529
15.5.2 Desarrollo de una pieza de Transición que conecte dos conductos circulares. 530
15.5.3 Desarrollo de una pieza de Transición de cuadrado a redonda. 531
Problemas Resueltos. 533
Problemas Propuestos. 538

CAPITULO 1:

PROYECCIONES DE SÓLIDOS

1.0 INTRODUCCIÓN.

En el mundo que vivimos los objetos tienen tres dimensiones y para describirlos por medio del dibujo hacemos uso de su ancho, altura y profundidad. La Geometria Descriptiva fue creada por el científico francés Gaspard Monge en el año de 1790, quien desarrolló su teoría en forma completa, que hace indispensable su estudio como una materia fundamental y forma parte en los planes de estudio en la formación del ingeniero; ya que ofrece principios que ayudan a resolver problemas en el diseño de aparatos científicos, sistemas de ingeniería y estructuras arquitectónicas.

1.1 GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

La Geometria Descriptiva es la ciencia del dibujo que nos enseña a la representación de objetos sobre un plano y a la solución gráfica de problemas espaciales.

1.2 PROYECCION.

Es la intersección con el plano de proyección de la línea visual que parte del observador y se prolonga hasta el objeto. En la figura **1.1** se muestra la proyección del punto P sobre el plano de proyección V, y la simbología utilizada en esta figura es la siguiente:

- P: Objeto,
- V: Plano de proyección,
- P_V: Proyección del punto P en el plano de proyección V
- P-P_V: Proyectante.

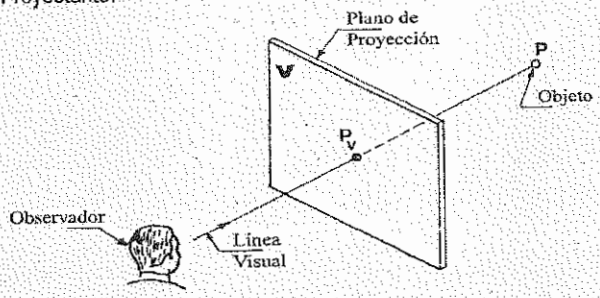


Fig. 1.1 Proyección de un punto.

1.3 TIPOS DE PROYECCIONES.

Para representar un objeto por medio de un dibujo, se requiere rayos visuales que partan del observador y se extiendan a los diferentes puntos del objeto, hasta que se proyecten a un plano de proyección; unimos estos puntos con líneas para formar una proyección del objeto. Se conocen las siguientes proyecciones: Cónica, Cilíndrica y Ortogonal.

1.3.1 PROYECCIÓN CÓNICA.

En este tipo de proyección sus rayos proyectantes parten de varios puntos del objeto y convergen hacia un punto llamado **FOCO** o punto de observación. El tamaño de la proyección depende según se altere las distancias y ubicación el foco, el objeto y el plano de proyección. Aplicaciones: se usa en el cine, fotografía, etc. En la figura 1.2 se muestra la proyección de un cuadrado ABCD sobre un plano de proyección.

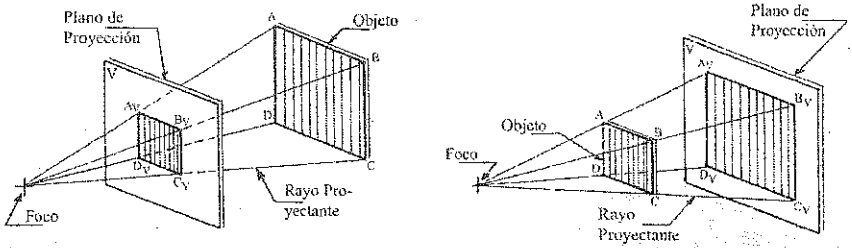


Fig. 1.2 Proyección Cónica.

1.3.2 PROYECCIÓN CILÍNDRICA.

Sus rayos proyectantes son paralelos entre si formando estos una inclinación cualquiera con respecto al plano de proyección. El tamaño de la proyección puede ser aumentada o reducida; es igual a la del objeto siempre y cuando este sea paralelo al plano de proyección. Aplicaciones: se usa en sombras, iluminación etc. En la figura 1.3 se muestra la proyección de un cuadro ABCD sobre un plano de proyección.

1.3.3 PROYECCIÓN ORTOGONAL.

Sus rayos proyectantes son paralelos entre si y perpendiculares al plano de proyección. El tamaño de la proyección es igual a la del objeto siempre y cuando este sea paralelo al plano de proyección. Aplicaciones: se utiliza en el curso de Geometría Descriptiva. En la figura 1.4, se muestra la proyección de un cuadrado ABCD sobre un plano de proyección.

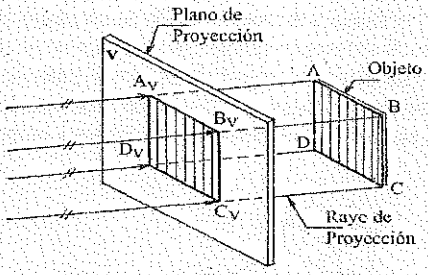


Fig. 1.3 Proyección Cilíndrica.

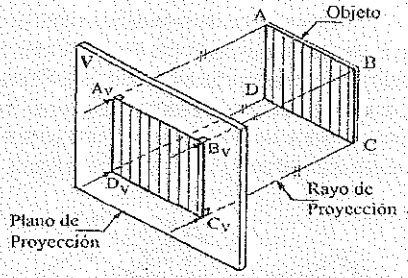


Fig. 1.4 Proyección Ortogonal.

1.4 PLANOS DE PROYECCION.

Un plano de proyección es una superficie plana donde los objetos se proyectan; esta superficie es transparente o opaca, y esta colocada entre el observador y el objeto o viceversa. Estos planos de proyección se clasifican en: Planos Principales y Planos Auxiliares (este caso se estudiará en el capítulo.2).

1.4.1 PLANOS PRINCIPALES.

Son aquellos planos de proyección que por su posición nos muestra dos dimensiones principales de un objeto dado. Los planos principales proporcionan un medio exacto de forma descriptiva, y que dos o más planos de proyección son necesarios para una descripción completa de un objeto dado. Estos planos principales son perpendiculares entre si, tal como se muestra en la figura 1.5 y son las siguientes: Plano Principal Horizontal (H), Plano Principal Frontal (F) y Plano Principal de Perfil (P).

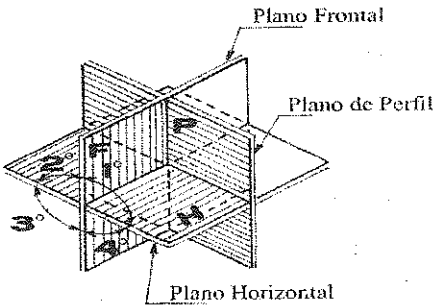


Fig. 1.5 Planos de Proyección.

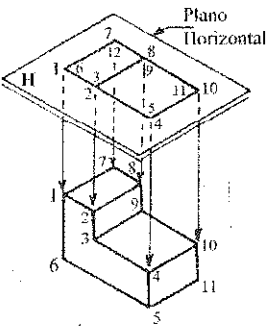


Fig. 1.6 Proyección Horizontal.

1.4.1.1 PLANO PRINCIPAL HORIZONTAL.

Es un plano de proyección cuya pendiente es cero y sobre el cual obtenemos la representación de un objeto cuando la miramos desde arriba. A este plano de proyección también se le conoce como Vista de Planta. Las lineas de mira para este plano de proyección son verticales y perpendiculares a él; tal como se observa en la figura **1.6**.

1.4.1.2 PLANO PRINCIPAL FRONTAL.

Es un plano de proyección sobre el cual obtenemos la representación de un objeto cuando lo vemos en elevación (de frente). A este plano de proyección también se le conoce como plano vertical y es perpendicular al plano horizontal. Este plano de proyección es el que determina la ubicación de los observadores que miran los planos principales de proyección, que forman los cuatro cuadrantes. Las líneas de mira para este plano de proyección son horizontales y perpendiculares a él; tal como se observa en la figura 1.7.

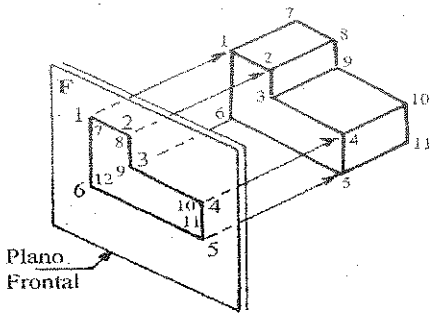


Fig. 1.7 Proyección Frontal.

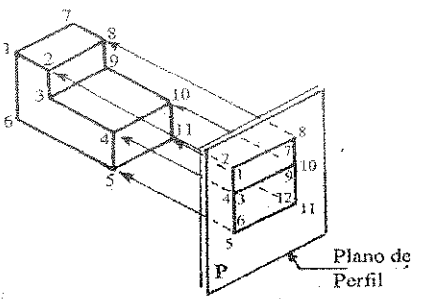


Fig. 1.8 Proyección de Perfil.

1.4.1.3 PLANO PRINCIPAL DE PERFIL.

Es un plano de proyección sobre el cual obtenemos la representación de un objeto cuando lo miremos de costado. Este plano es perpendicular a los planos horizontal y frontal. Las líneas de mira para este plano de proyección son horizontales y perpendiculares a él; tal como se observa en la figura 1.8.

Estos tres planos principales en conjunto nos muestran las tres dimensiones principales de un objeto dado, como la altura, el ancho y su profundidad; tal como se observa en la figura 1.9.

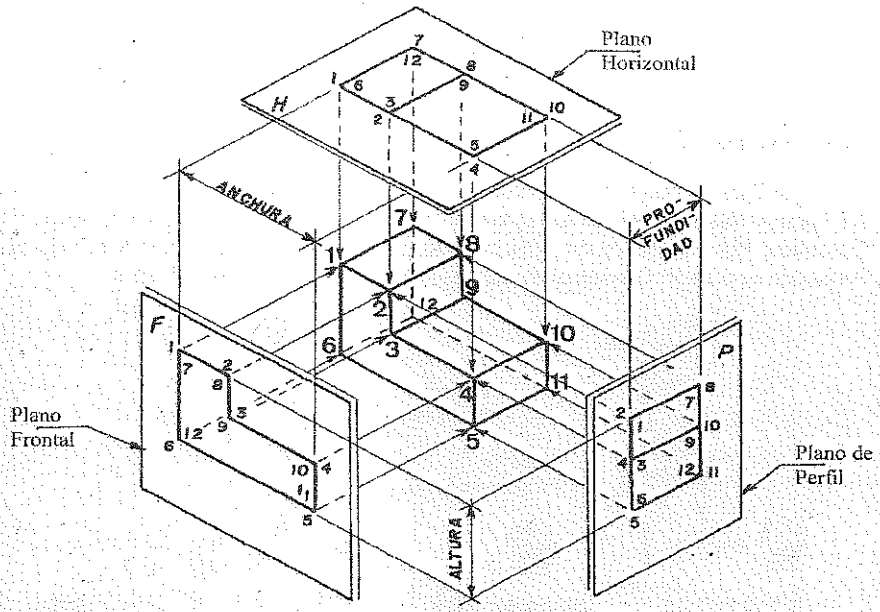


Fig. 1.9 Planos Principales.

1.5 SISTEMAS NORMALIZADOS DE PROYECCION.

Muchas piezas mecánicas no tienen un frente o un lado o una tapa definidas, por lo que la representación de una vista ha sido definida como el resultado de la proyección de la pieza mecánica (objeto) en un plano de proyección. Esta es la teoría básica de la geometría descriptiva que como por resultado dio un acuerdo internacional sobre la disposición de las diferentes vistas principales; tal como se observa en la figura 1.10.

Los planos de proyección mostrados en la figura 1.5 se cortan uno de otro en ángulo recto, formado el primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante o ángulo. Un objeto se puede proyectar en cualquiera de estos cuatro cuadrantes. Esto dará origen a dos sistemas de proyección; que son las siguientes:

- Sistema ISOA antiguamente ASA (AMERICAN STANDARDS ASSOCIATION)
- Sistema ISOE antiguamente DIN (DEUTSCHE INDUSTLE MOMENG)

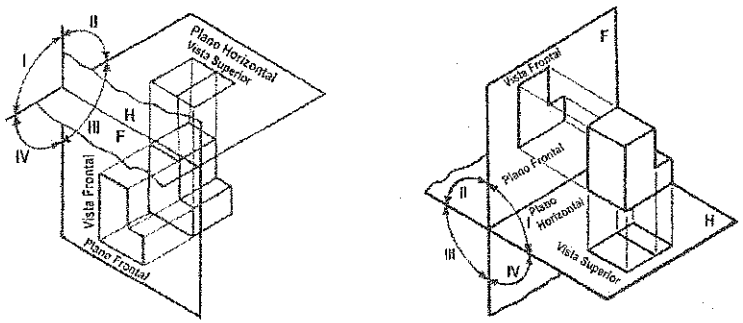


Fig. 1.10 Proyección en el Primer y Tercer cuadrante.

1.5.1 SISTEMA ISOA.

El objeto se encuentra en el tercer cuadrante, los planos de proyección en este cuadrante son transparentes y el orden en que se encuentran los elementos que intervienen es el siguiente: Observador, Plano de Proyección y Objeto. A este tipo de proyección también se le conoce como Proyección en el Tercer Cuadrante o Angulo, es muy utilizado en los Estados Unidos.

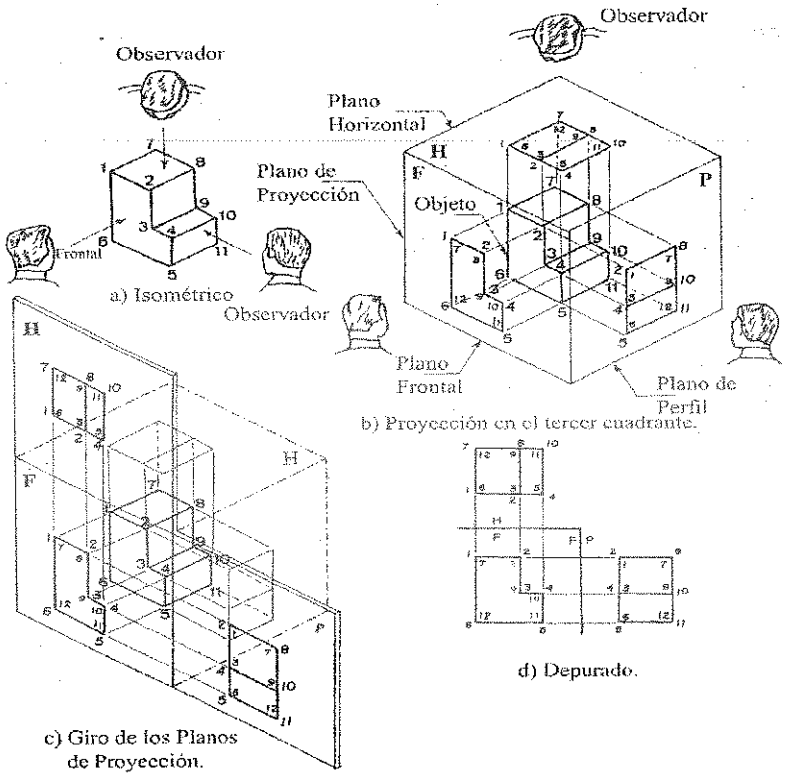


Fig. 1.11 Proyección Ortogonal desde el tercer cuadrante.

En la figura 1.11 se muestra la proyección ortogonal en el tercer cuadrante, en donde los planos de proyección transparentes se colocan delante del objeto; luego se determina la posición del observador, y la proyección del sólido sobre los planos principales, el desdoblamiento de los planos horizontal y de perfil alrededor del plano frontal, obteniéndose finalmente el Depurado, tal como se observa en la figura 1.11(c) y (d).

1.5.2 SISTEMA ISOE.

El objeto se encuentra en el primer cuadrante, los planos de proyección son opacos y el orden en que se encuentran los elementos que intervienen es el siguiente: Observador, Objeto y Plano de Proyección. A este tipo de proyección también se le conoce como Proyección en el Primer Cuadrante o Angulo, es muy utilizado en Alemania, en la Unión Soviética y en casi todos los países europeos.

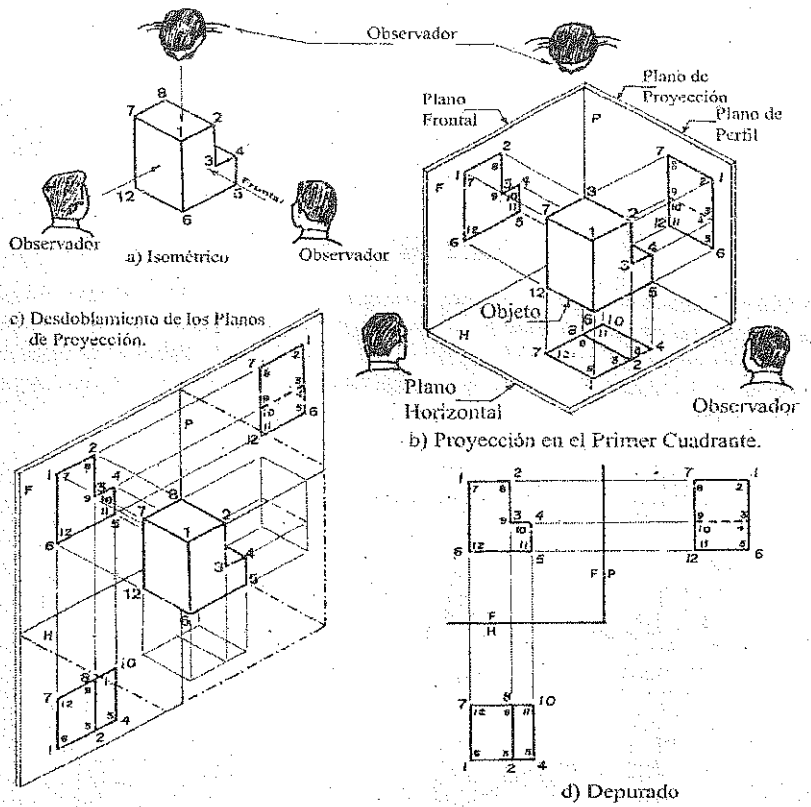


Fig. 1.12 Proyección Ortogonal desde el primer cuadrante.

En la figura 1.12 se muestra la proyección ortogonal en el primer cuadrante, en donde los planos de proyección opacos se colocan detrás del objeto; luego se determina la posición del observador, y la proyección del sólido sobre los planos principales, el desdoblamiento de los planos horizontal y de perfil alrededor del plano frontal, que representa el Depurado; tal como se observa en la figura 1.12 (c) y (d).

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1.1: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.13a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

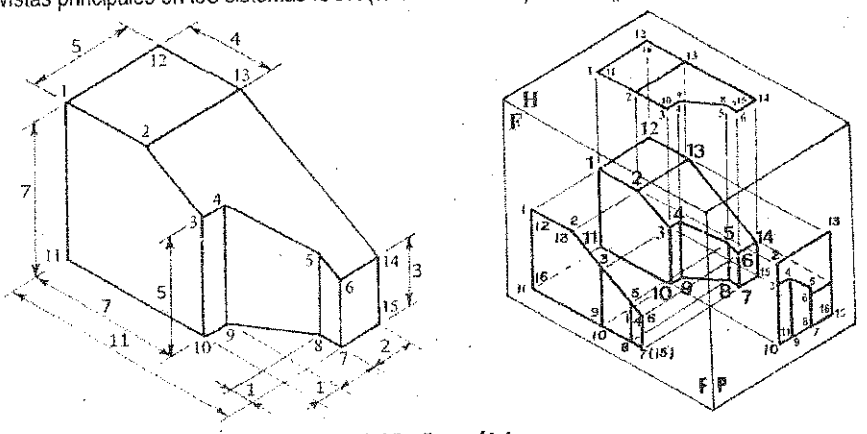


Fig. 1.13a Isométrico.

SOLUCIÓN: Numerar los vértices del objeto mostrado en la figura **1.13a**. En base al isométrico determinamos sus planos principales en el tercer cuadrante y en el primer cuadrante; apareciendo numerado los vértices en los tres planos principales. Si un vértice es visible en un plano dado, el número se coloca fuera de la esquina, pero si ese vértice es invisible, el número se coloca dentro de dicha esquina.

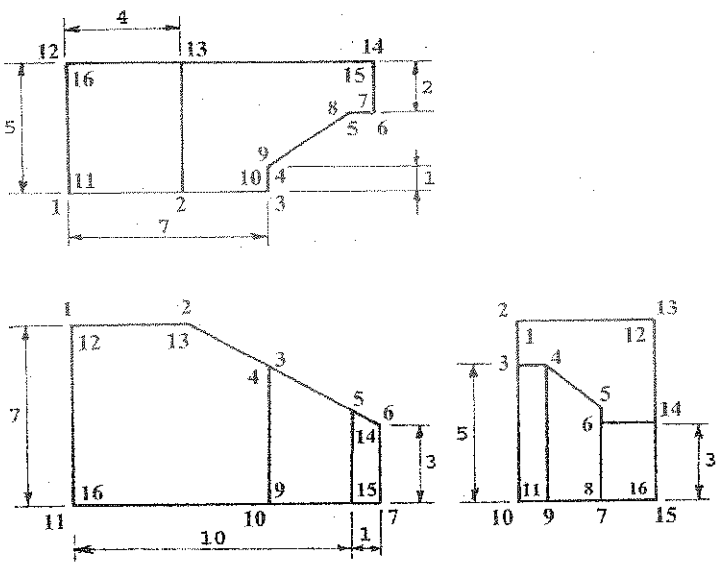


Fig. 1.13 b Proyección en el tercer cuadrante (ISOA).

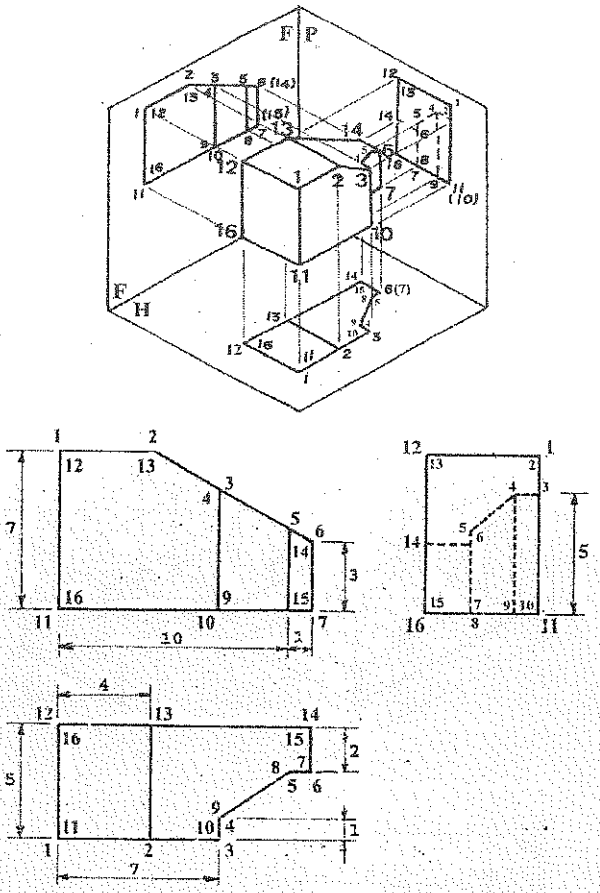


Fig. 1.13c Proyección en el primer cuadrante (ISOE).

PROBLEMA 1.2: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.14a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

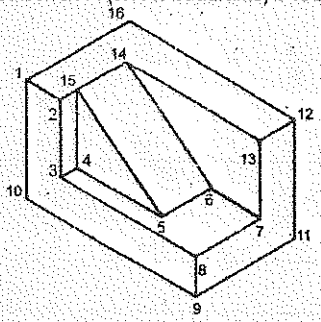


Fig. 1.14a Isométrico.

SOLUCIÓN:

Numerar los vértices del objeto mostrado en la figura **1.14a.** En base al isométrico determinamos sus planos principales en el tercer cuadrante y en el primer cuadrante; apareciendo numerado los vértices en los tres planos principales. En la proyección principal del sólido, si un vértice es visible en un plano principal, el número se coloca fuera de la esquina, pero si ese vértice es invisible, el número se coloca dentro de dicha esquina; tal como se observa en la figura **1.14b**.

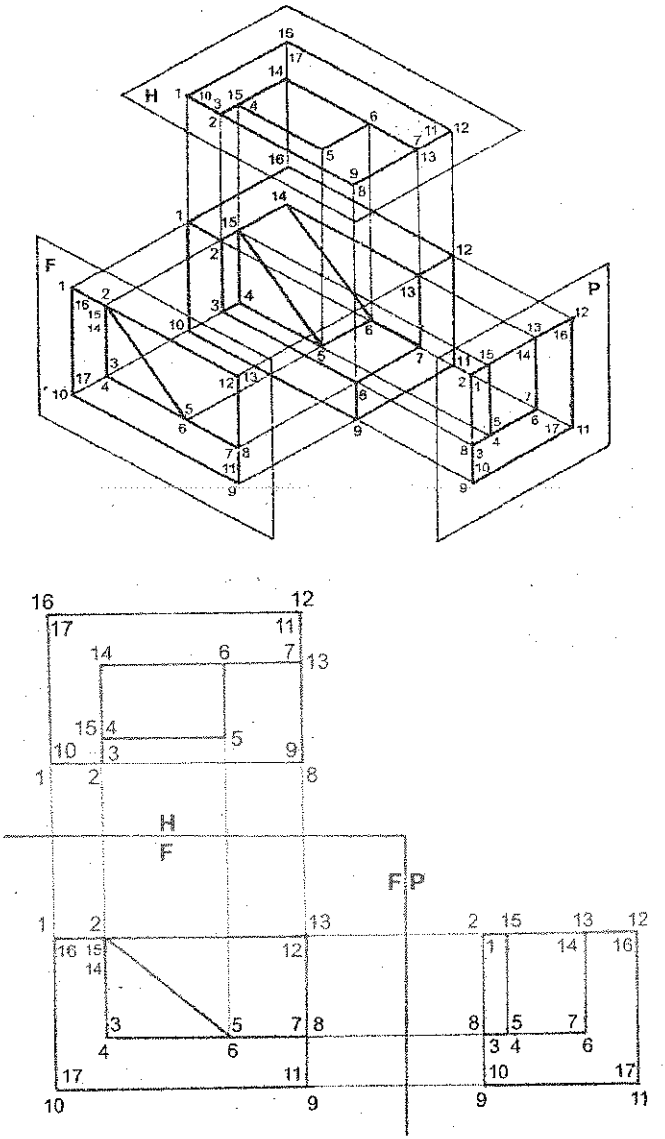


Fig. 1.14b Proyección en el tercer cuadrante (ISOA).

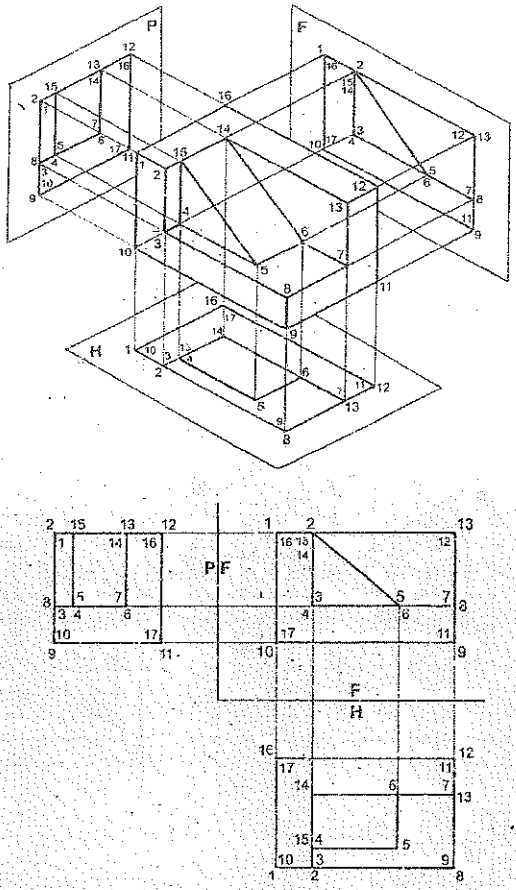


Fig. 1.14c Proyección en el primer cuadrante (ISOE).

PROBLEMA 1.3: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.15a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

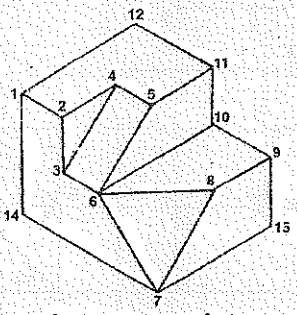
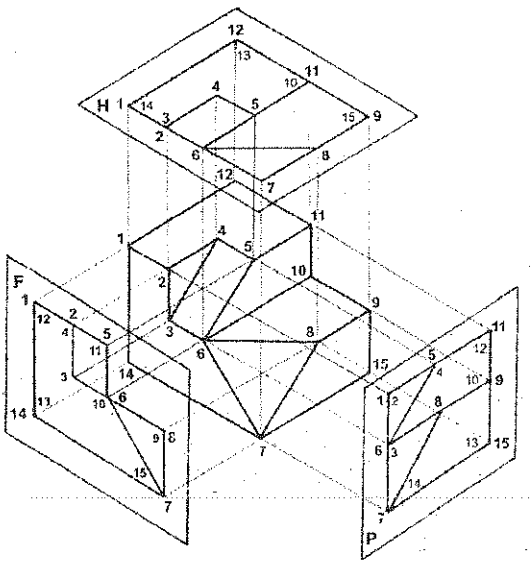


Fig. 1.15a Isométrico.

SOLUCIÓN:

Numerar los vértices del objeto mostrado en la figura **1.15a**. En base al isométrico determinamos sus planos principales en el tercer cuadrante y en el primer cuadrante; apareciendo numerado los vértices en los tres planos principales. Si un vértice es visible en un plano de proyección, el número se coloca fuera de la esquina, pero si este vértice es invisible, el número se coloca dentro de dicha esquina.



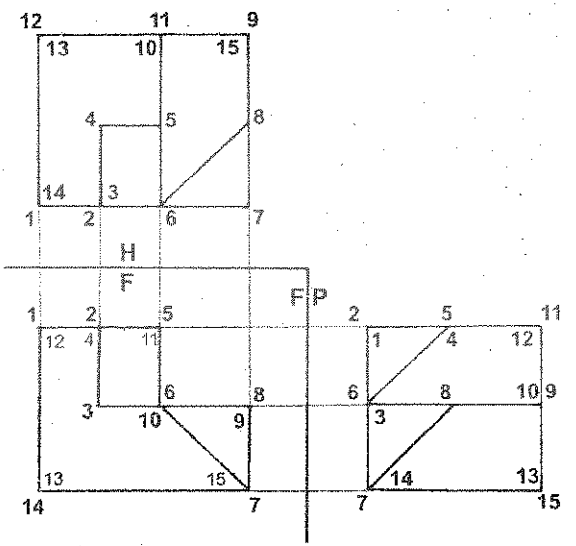


Fig. 1.15b Proyección en el tercer cuadrante (ISOA).

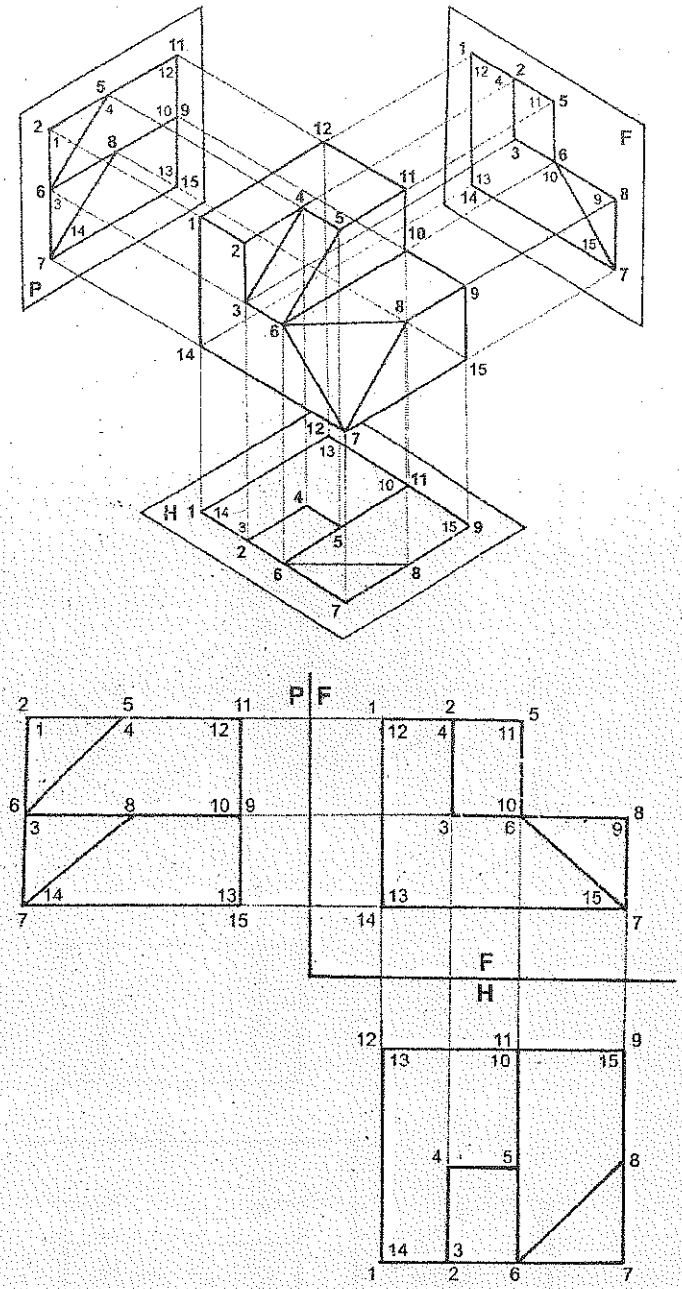


Fig. 1.15c Proyección en el primer cuadrante (ISOE).

PROBLEMA 1.4: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.16a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

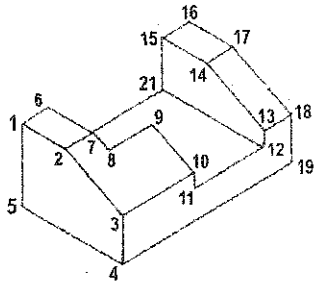


Fig. 1.16a Isométrico.

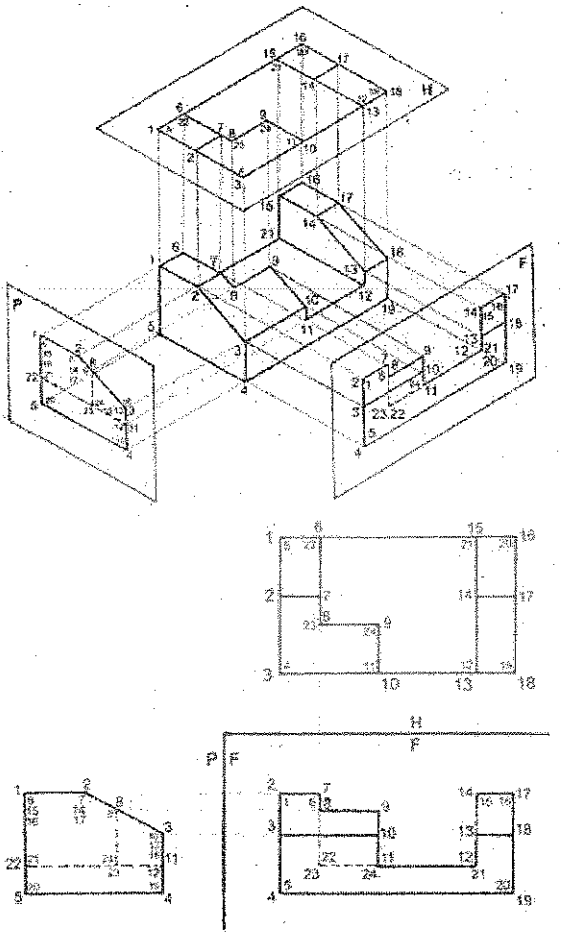
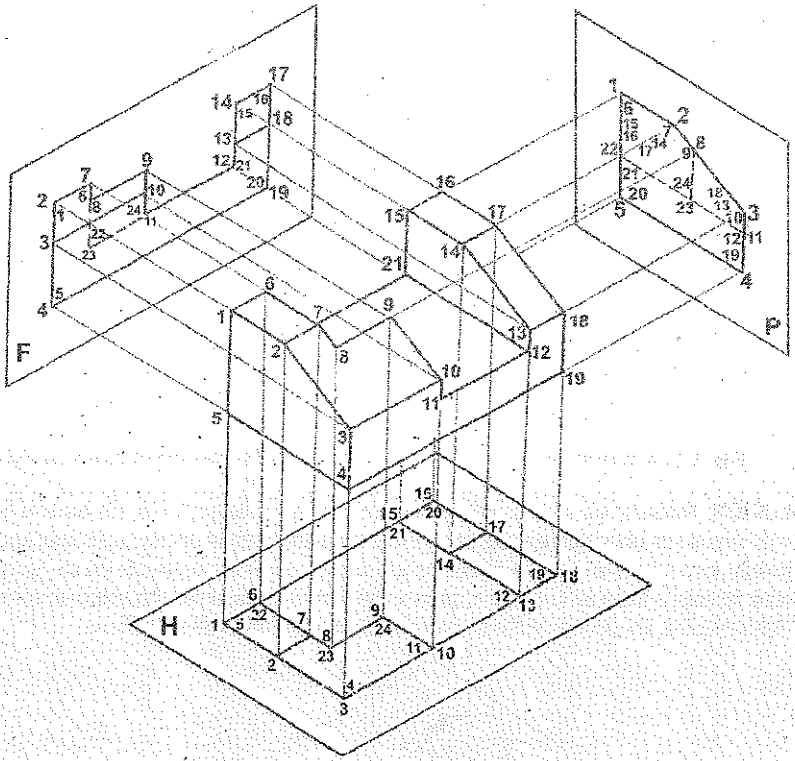


Fig. 1.16b Proyección en el tercer cuadrante (ISOA).



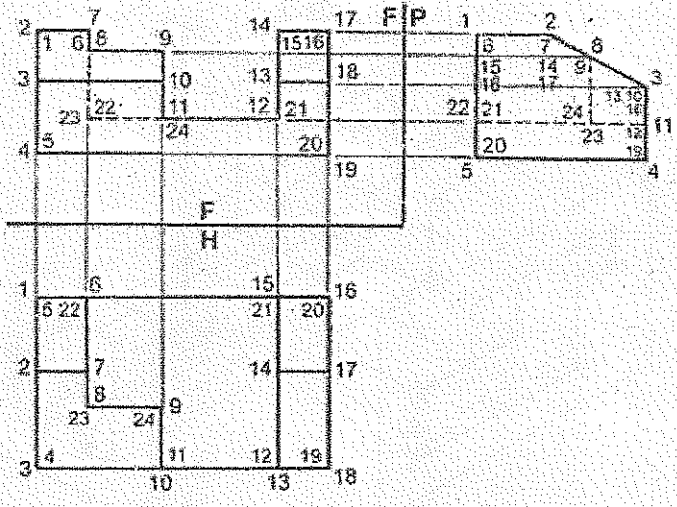


Fig. 1.16c Proyección en el primer cuadrante (ISOE).

PROBLEMA 1.5: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

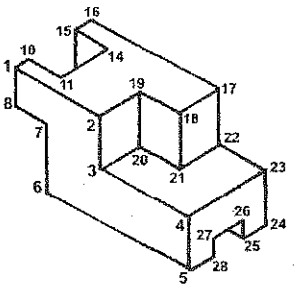


Fig. 1.17a Isométrico.

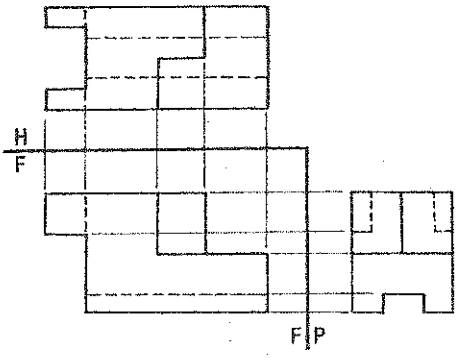


Fig. 1.17b Vistas Principales en ISOA

SOLUCIÓN: Numerar los vértices del objeto mostrado en la figura **1.17a**. En base al isométrico determinamos sus planos principales en el tercer cuadrante y en el primer cuadrante; apareciendo numerado los vértices en los tres planos principales. Si un vértice es visible en un plano dado, el número se coloca fuera de la esquina, pero si ese vértice es invisible, el número se coloca dentro de dicha esquina. En algunas vistas se han omitido la numeración de los vértices.

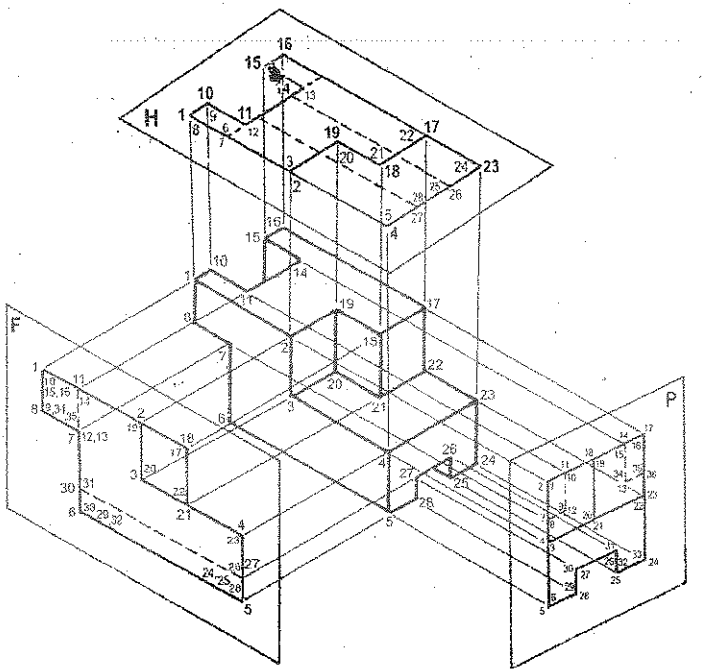
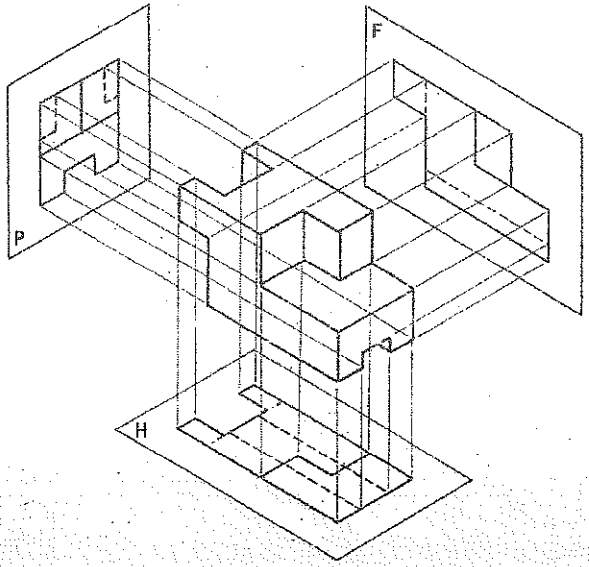


Fig. 1.17c Proyección en el tercer cuadrante (ISOA).



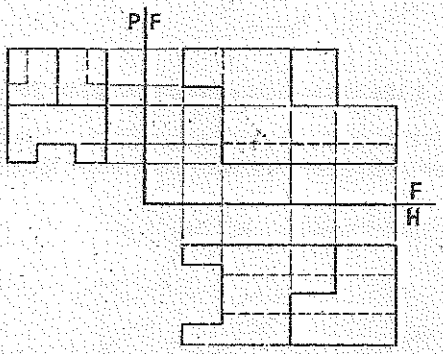


Fig. 1.17c Proyección en el primer cuadrante (ISOE).

PROBLEMA 1.6: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.18a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

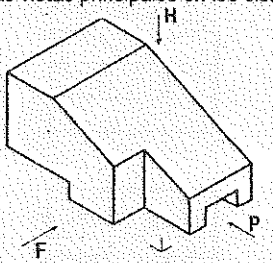


Fig. 1.18a Isométrico.

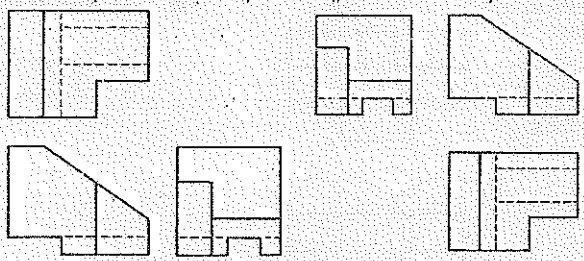


Fig. 1.18b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.7: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.19a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

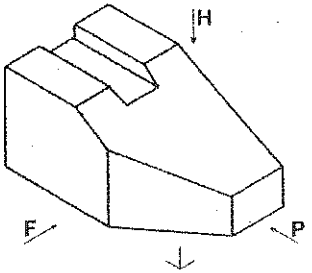


Fig. 1.19a Isométrico.

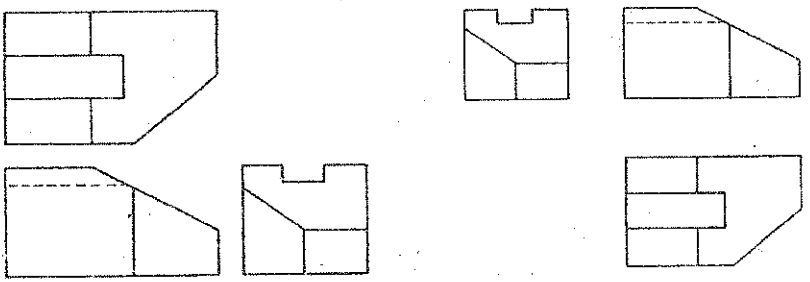


Fig. 1.19b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.8: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.20a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

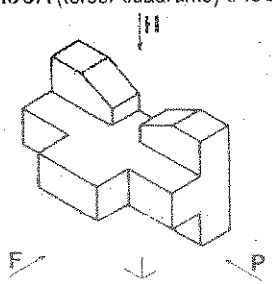


Fig. 1.20a Isométrico.

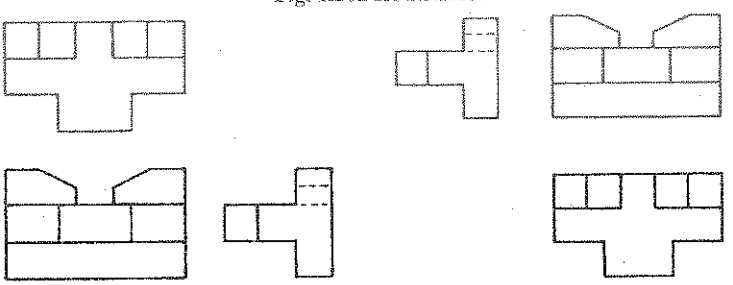


Fig. 1.20b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE

PROBLEMA 1.9: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.21a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

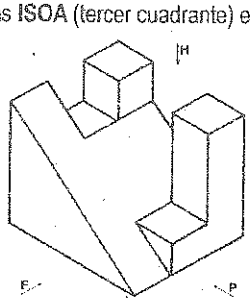


Fig. 1.21a Isométrico.

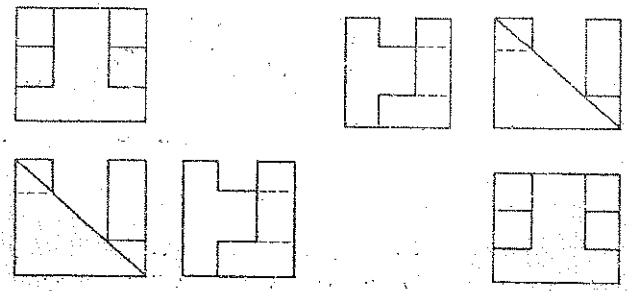


Fig. 1.21b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.10: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.22a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

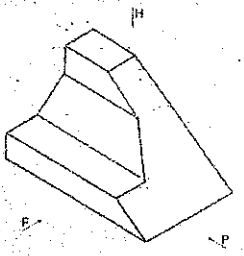


Fig. 1.22a Isométrico.

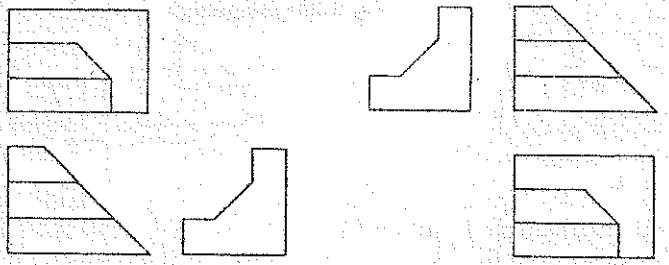


Fig. 1.22b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.11: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.23a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

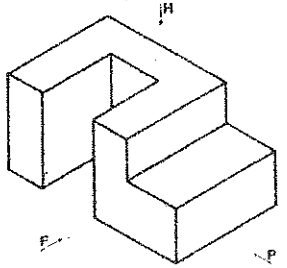


Fig. 1.23a Isométrico.

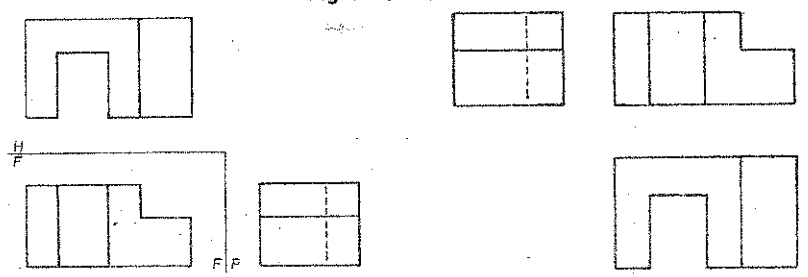


Fig. 1.23b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.12: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.24a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

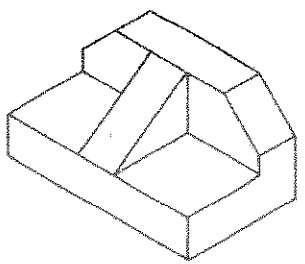


Fig. 1.24a Isométrico.

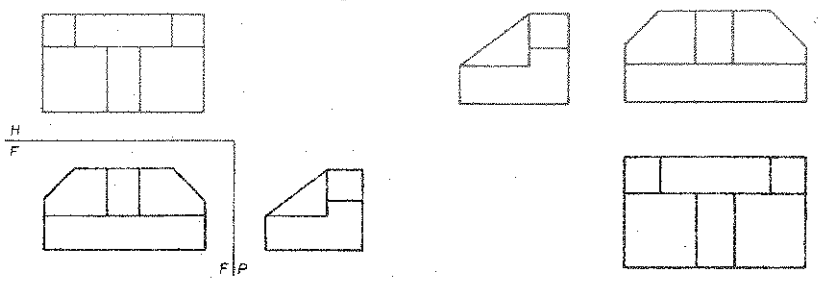


Fig. 1.24b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.13: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.25a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

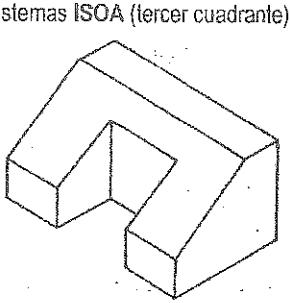


Fig. 1.25a Isométrico.

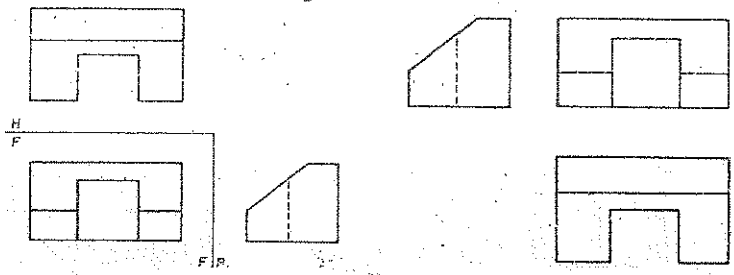


Fig. 1.25b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.14: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.26a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

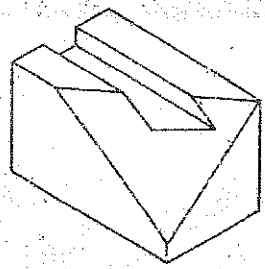


Fig. 1.26a Isométrico.

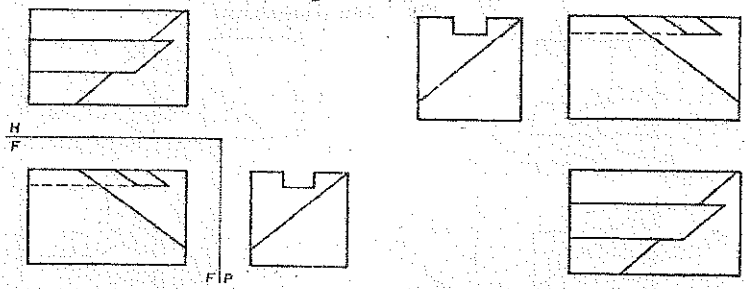


Fig. 1.26b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.15: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.27a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

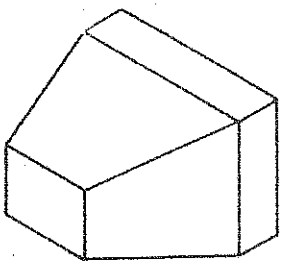


Fig. 1.27a Isométrico.

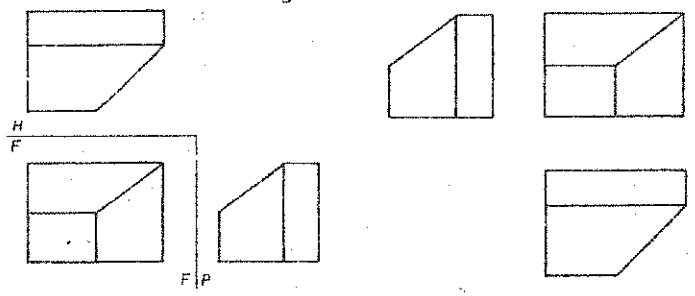


Fig. 1.27b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.16: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.28a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

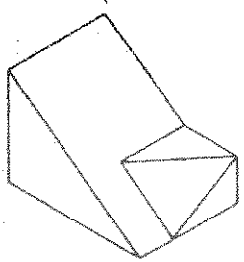


Fig. 1.28a Isométrico.

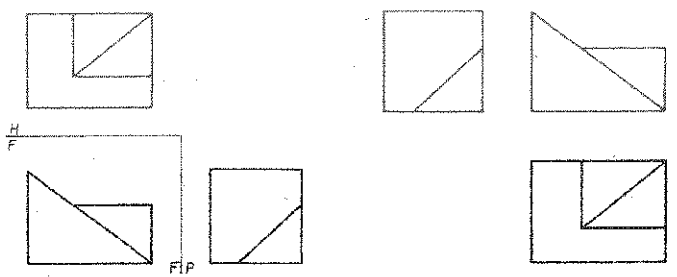


Fig. 1.28b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.17: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.29a, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

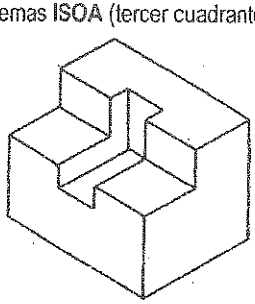


Fig. 1.29a Isométrico.

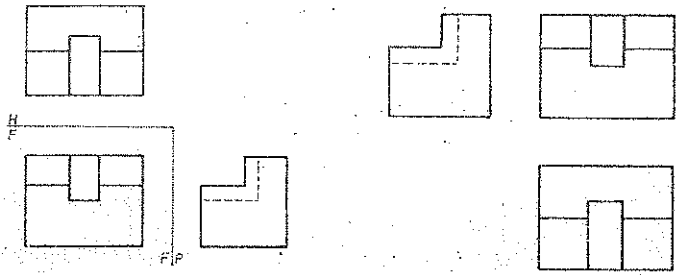


Fig. 1.29b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.18: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.30a, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

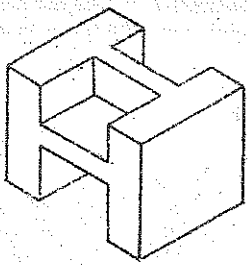


Fig. 1.30a Isométrico.

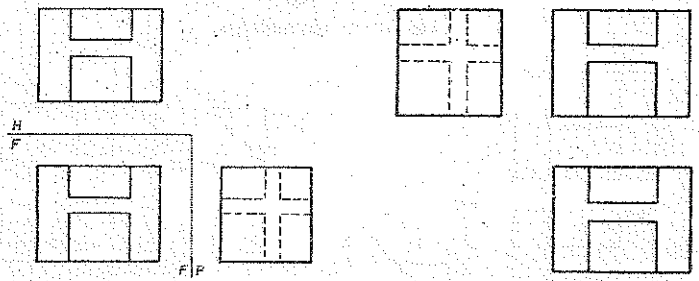


Fig. 1.30b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.19: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.31a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

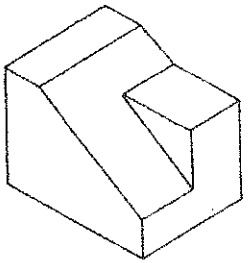


Fig. 1.31a Isométrico.

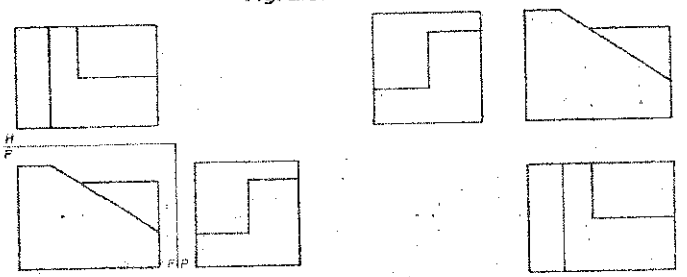


Fig. 1.31 Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.20: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.32a**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

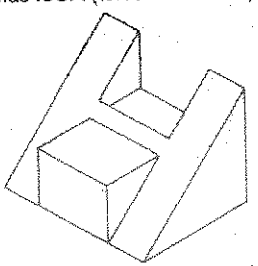


Fig. 1.32a Isométrico.

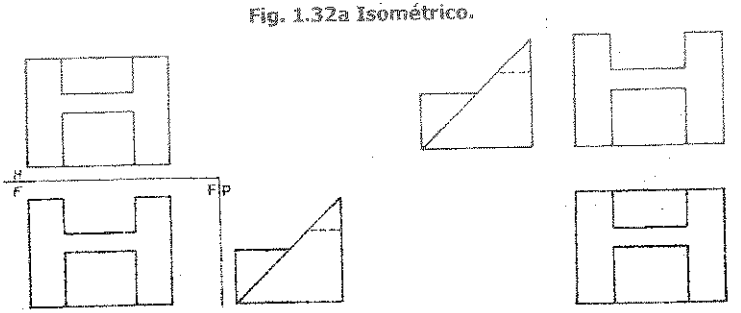


Fig. 1.32b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.21: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.33a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

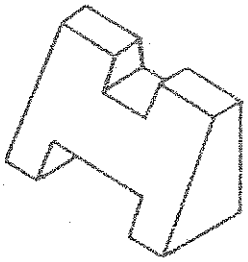


Fig. 1.33a Isométrico.

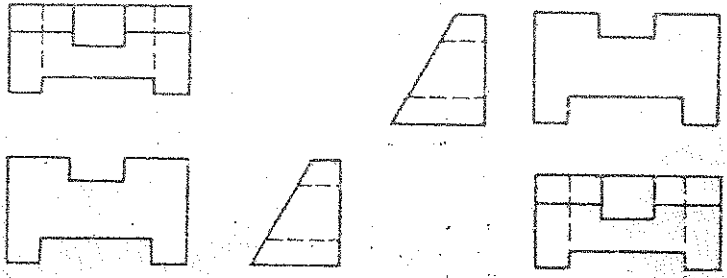


Fig. 1.33b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMA 1.22: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.34a, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

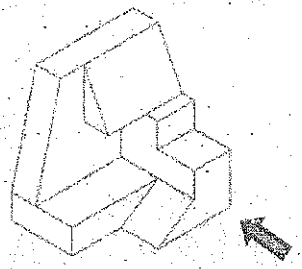


Fig. 1.34a Isométrico.

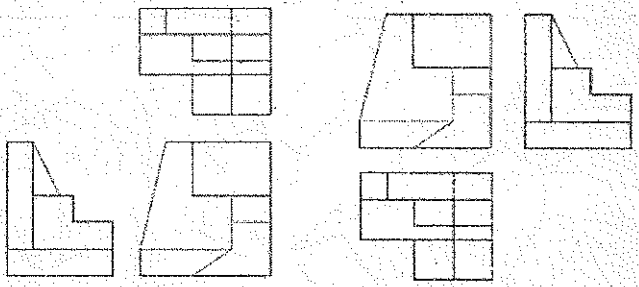


Fig. 1.33b Vistas principales de un sólido: ISOA e ISOE.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1.1-1.12: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura **1.34**, determinar las vistas principales en los sistemas **ISOA** (tercer cuadrante) e **ISOE** (primer cuadrante).

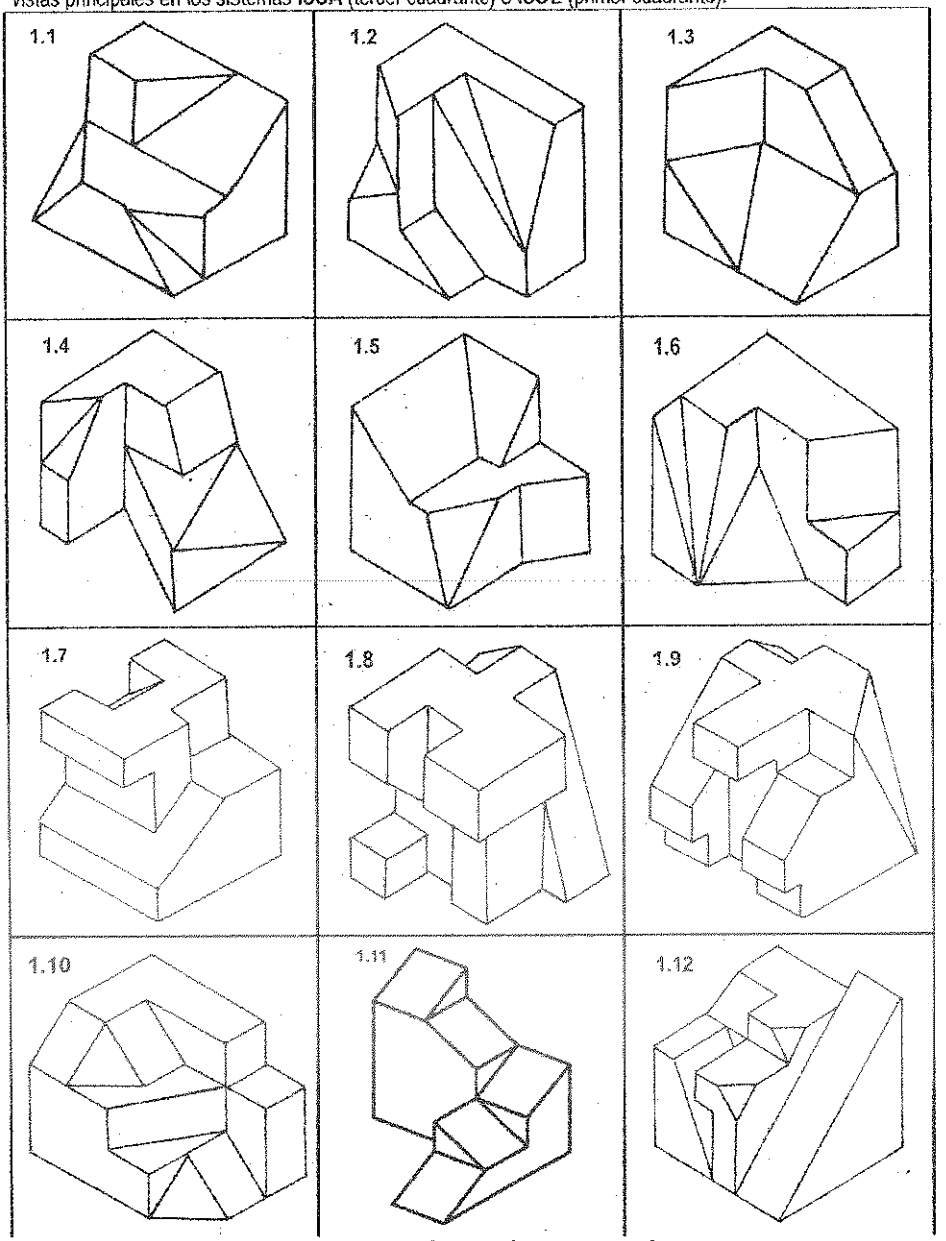


Fig. 1.34 Proyección isométrica de un sólido.

PROBLEMA 1.13-1.24: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.35, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

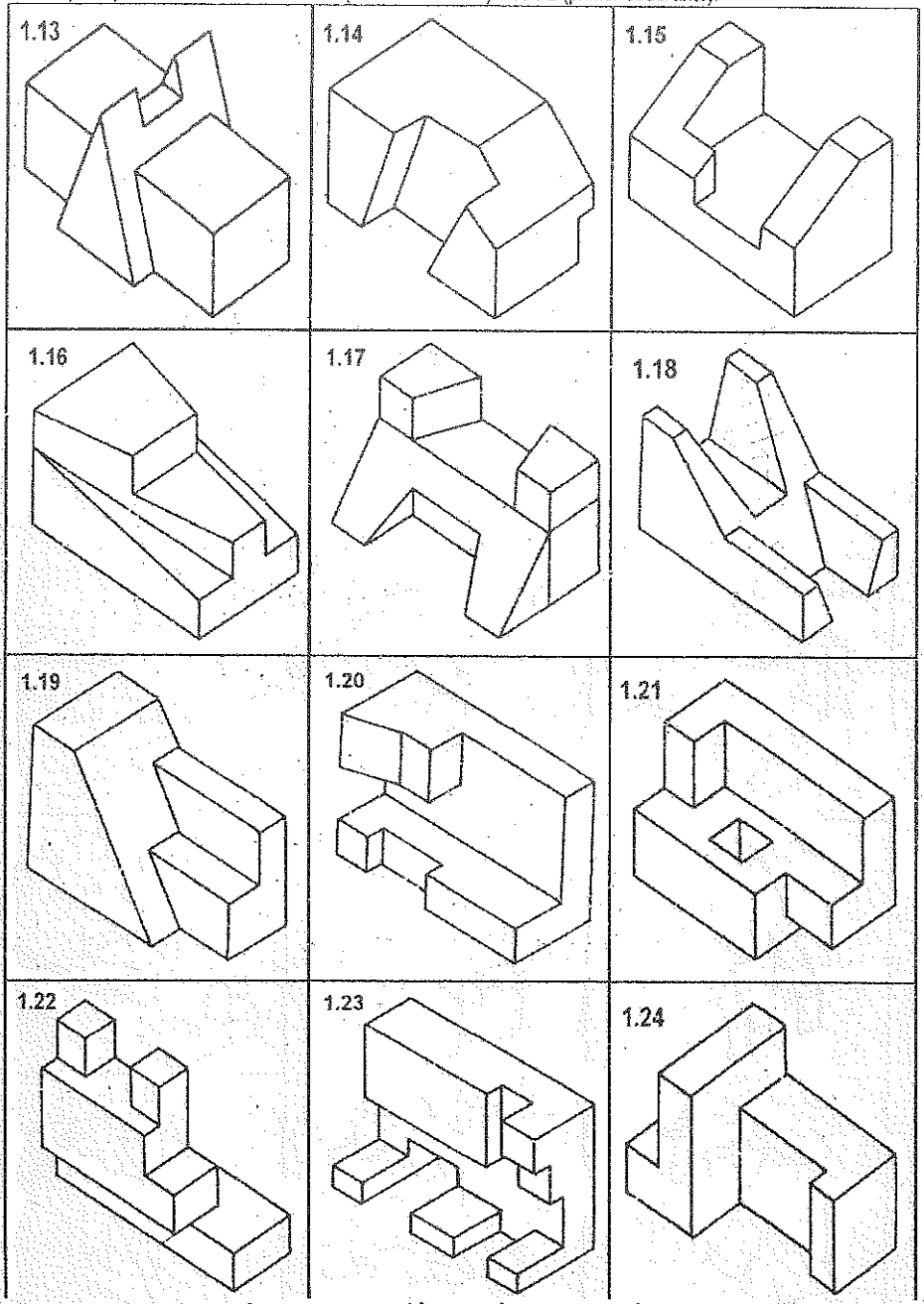


Fig. 1.35 Proyección isométrica de un sólido.

PROBLEMA 1.25-1.36: Dado la proyección isométrica del sólido mostrado en la figura 1.36, determinar las vistas principales en los sistemas ISOA (tercer cuadrante) e ISOE (primer cuadrante).

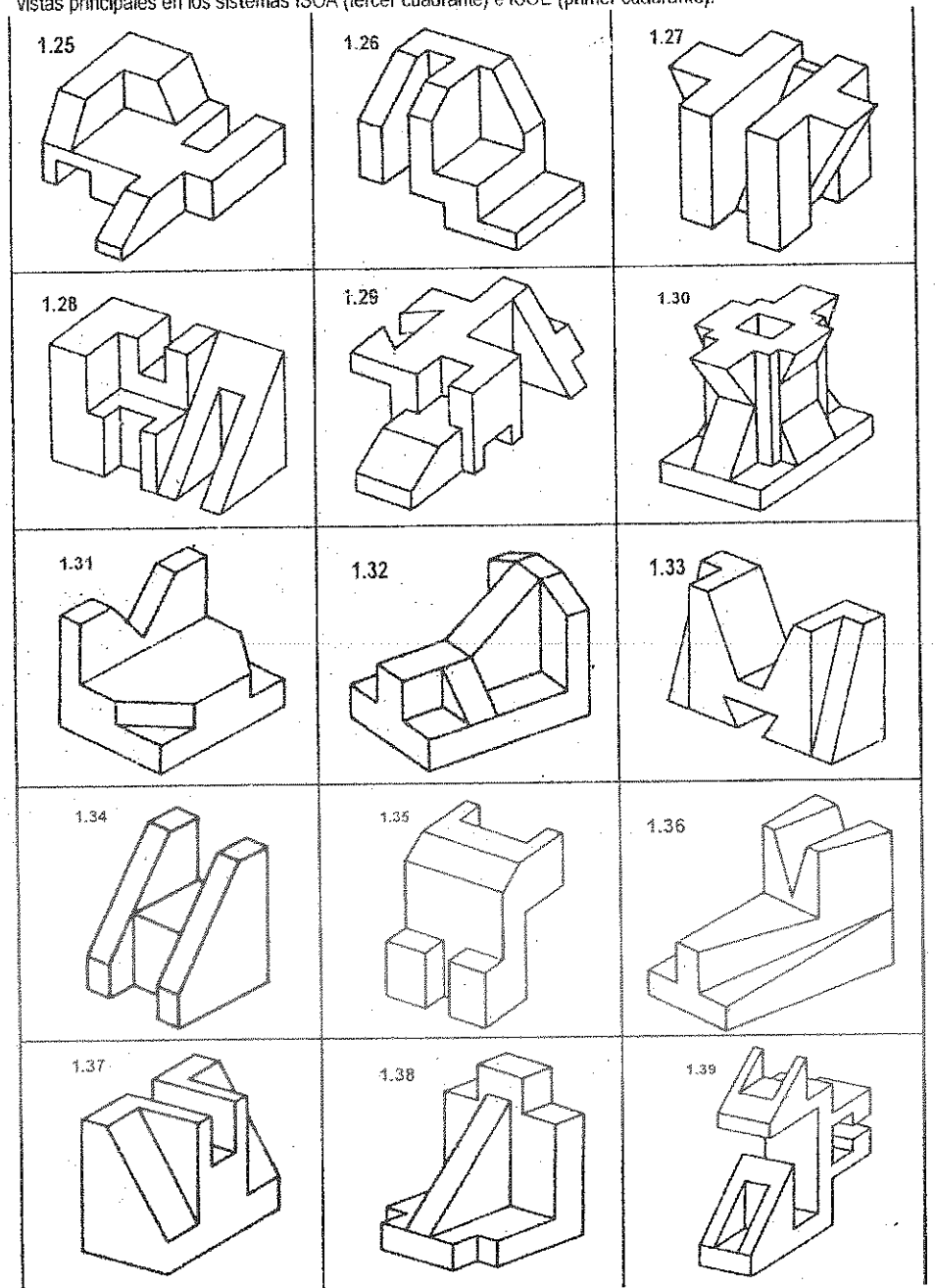
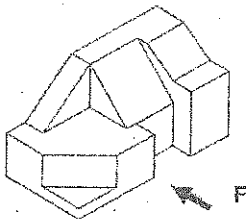
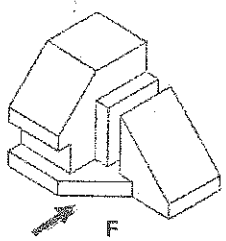


Fig. 1.36 Proyección isométrica de un sólido.

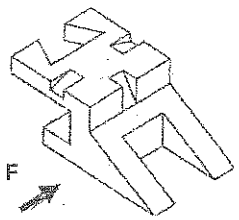
PROBLEMA Nº 1.40: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



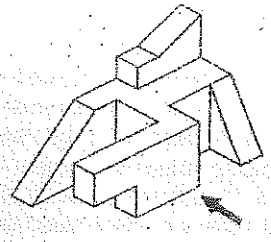
PROBLEMA Nº 1.41: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



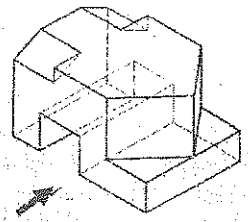
PROBLEMA Nº 1.42: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



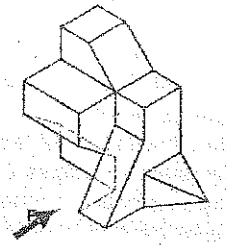
PROBLEMA Nº 1.43: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



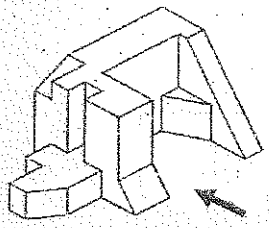
PROBLEMA Nº 1.44: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



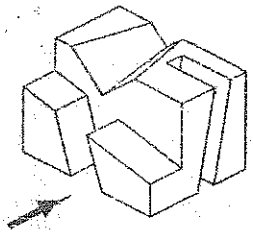
PROBLEMA Nº 1.45: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



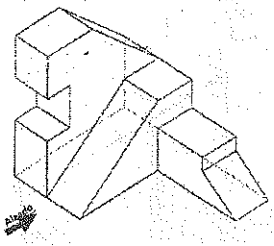
PROBLEMA Nº 146: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



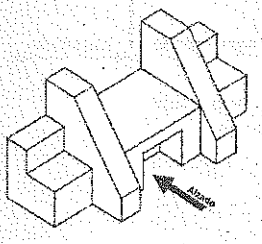
PROBLEMA Nº 1.47: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



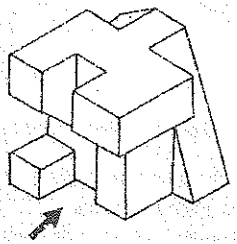
PROBLEMA Nº 1.48: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



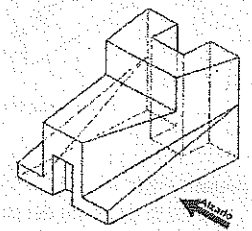
PROBLEMA Nº 1.49: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



PROBLEMA Nº 1.50: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



PROBLEMA Nº 1.51: Dado el sólido, dibujar sus vistas principales en los sistemas ISOA e ISOE.



CAPÍTULO 2:

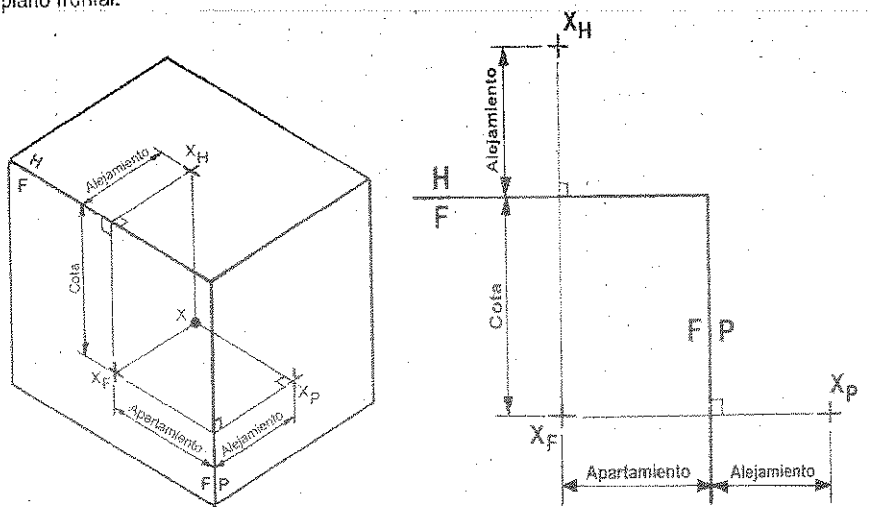
EL PUNTO

2.0 INTRODUCCIÓN

La representación mental de un objeto se crea por el análisis de punto a punto; en donde dos puntos determinan una recta, las rectas forman superficies y la combinación forma objetos. Por lo tanto la Geometría Descriptiva en base a los principios de la Proyección Ortogonal empieza su teoría en el análisis de las relaciones entre las proyecciones de un punto aislado.

2.1 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL A LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA: DEPURADO DEL PUNTO.

Si se coloca un punto en el espacio de tres dimensiones, determinado por la intersección de los tres planos principales, y si se proyecta sobre estos planos perpendiculares, se obtendrá las proyecciones del punto en cada uno de estos planos principales. En la figura **2.1 (a)** tenemos el punto X situado en el tercer cuadrante **(ISOA)**, cuyas proyecciones se muestran en los planos principales; en la figura **2.1 (b)** tenemos el Depurado del punto, que se obtiene al desdoblar los planos principales horizontal y de perfil, alrededor del plano frontal. En la **figura 2.1** se observa que las proyecciones principales del punto X, horizontal y de perfil, están a la misma distancia A del plano frontal.



a) Isométrico **b) Depurado**

Fig. 2.1 Planos Principales de un Punto.

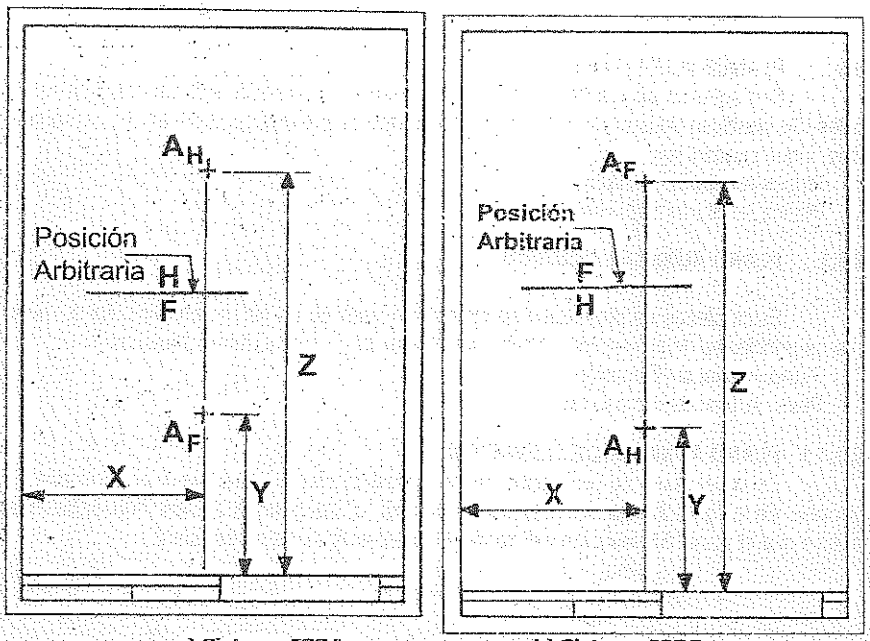
Alejamiento: es la distancia del punto X al plano frontal.
Cota: es la distancia del punto X al plazo horizontal.
Apartamiento: es la distancia del punto X al plano de perfil.

2.2 GRAFICACIÓN DE UN PUNTO POR COORDENADAS.

Con el objeto de normalizar la graficación de un punto en los planos principales horizontal y frontal, utilizaremos el sistema de coordenadas; cuyas dimensiones de estas coordenadas se dan en centímetros y siempre se grafican a la escala 1:1, a menos que se indique de otra forma. El origen de las coordenadas está en la parte inferior izquierda del espacio de trabajo en la hoja A4 (21 x 29.7cm).

La primera coordenada determina la distancia de la línea de referencia del punto dado, con respecto al origen de coordenadas situadas al margen izquierdo. La segunda y tercera coordenada determina la proyección frontal y horizontal respectivamente de un punto.

La figura 2.2 (a) muestra la graficación del punto A (x, y, z) en el sistema ISOA, y la figura 2.2 (b) muestra la graficación del punto A(x, y, z) en el sistema ISOE. Si una coordenada se desconoce, se usa el signo de interrogación *"?" ó "_"* para designarla.



a) Sistema ISOA b) Sistema ISOE

Fig. 2.2 Graficación de un punto por coordenadas.

En la figura 2.3 se muestra la graficación de los puntos M, N, y L, con sus coordenadas respectivas para cada uno de estos puntos.

La Línea de Referencia o Línea de Doblez es aquella recta común a dos planos de proyección que se interceptan y que son perpendiculares entre si. El uso de esta recta permite localizar proyecciones principales y auxiliares y su ***posición es arbitraria es decir se asume su posición,*** tal como se muestra en la figura 2.2 (a) y (b).

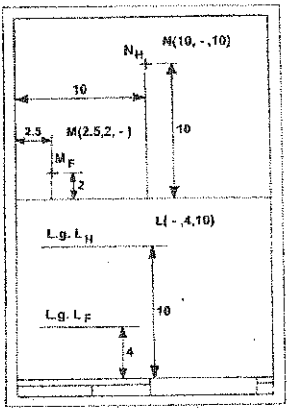


Fig. 2.3 Ejemplos de Graficación de un punto por coordenadas.

2.3 PLANOS AUXILIARES.

Son aquellos planos de proyección que tienen una posición diferente a los planos principales. Se clasifican de acuerdo a la posición del plano de proyección sobre el que se han proyectado, y que pueden ser:

1. Planos Auxiliares Primarios.
2. Planos Auxiliares Secundarios.

2.3.1 PLANO AUXILIAR PRIMARIO.

Estos planos de proyección se obtienen a partir de un plano perpendicular a uno de los planos principales de proyección. Existen dos clases de planos auxiliares primarios:

1. Plano Auxiliar de Elevación.
2. Plano Auxiliar de Inclinación.

2.3.1.1 PLANO AUXILIAR DE ELEVACIÓN.

Es aquel plano de proyección que es perpendicular al plano principal horizontal de proyección. En la figura **2.4 (a)** observamos que la cota "c" del punto X al plano horizontal es la misma; ya que el plano de elevación y el frontal son perpendiculares al horizontal.

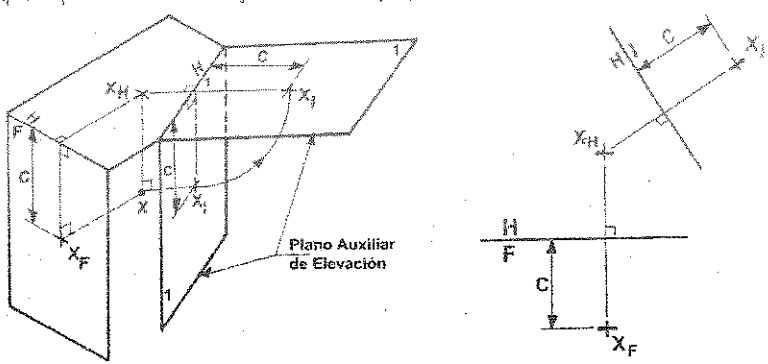
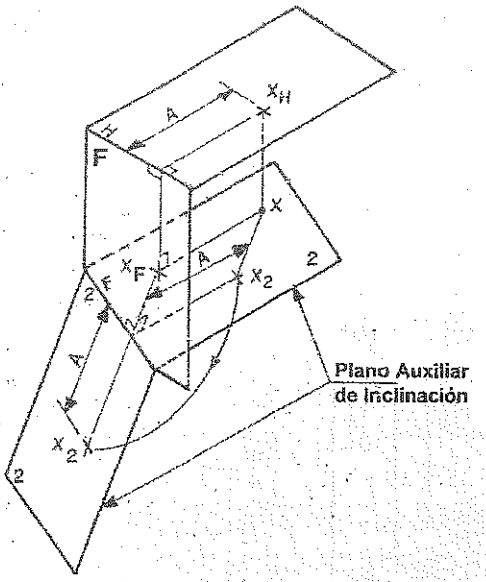


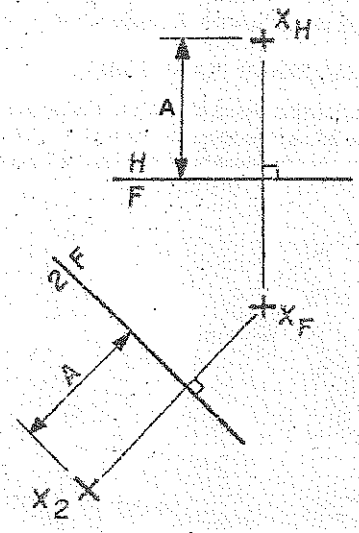
Fig. 2.4 Plano auxiliar de elevación.

2.3.1.2 PLANO AUXILIAR DE INCLINACIÓN.

Es aquel plano de proyección que es perpendicular al plano principal frontal de proyección. En la figura 2.5 (a) y (b) observamos que el alejamiento "A" del punto X hacia al plano frontal es la misma en el plano de inclinación; ya que el plano inclinado " 2 " y el horizontal son perpendiculares al plano frontal.



a) Vista isométrica de una vista de inclinación.



b) Vista de inclinación en proyecciones.
Fig. 2.5 Plano auxiliar de inclinación.

2.3.2 PLANO AUXILIAR SECUNDARIO.

Es aquel plano de proyección que se obtiene a partir de un plano perpendicular a uno de los planos auxiliares primarios. Existen tres clases de planos auxiliares primarios:

1. Plano Auxiliar Referido al Plano Horizontal.
2. Plano Auxiliar Referido al Plano Frontal.
3. Plano Auxiliar Referido al Plano de Perfil.

2.3.2.1 PLANO AUXILIAR REFERIDO AL PLANO HORIZONTAL.

Es aquel plano de proyección que se obtiene trazando un plano perpendicular al plano de proyección de elevación. En la figura 2.6 se observa que la distancia "B" del punto X al plano de elevación "H / 1" es la misma, ya que el plano de proyección "3" y el plano horizontal "H" son perpendiculares al plano de elevación.

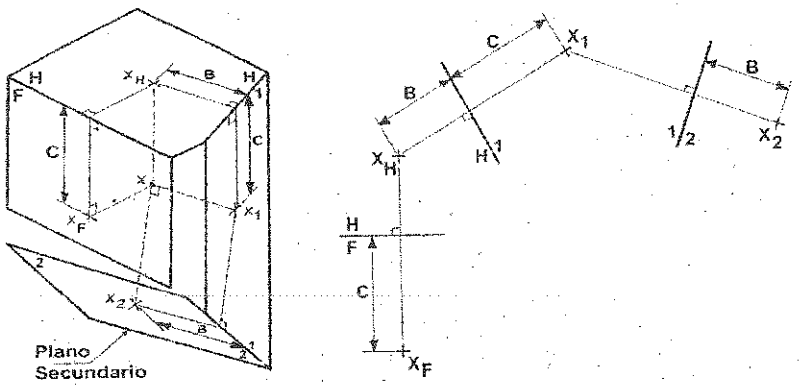


Fig. 2.6 Plano auxiliar referido al plano Horizontal.

2.3.2.2 PLANO AUXILIAR REFERIDO AL PLANO FRONTAL.

Es aquel plano de proyección que se obtiene trazando un plano perpendicular al plano de proyección de inclinación. En la figura 2.7 se observa que la distancia "D" del punto X al plano de inclinación "F/2" es la misma, ya que los planos de proyección "4" y el frontal "F" son perpendiculares al plano de inclinación.

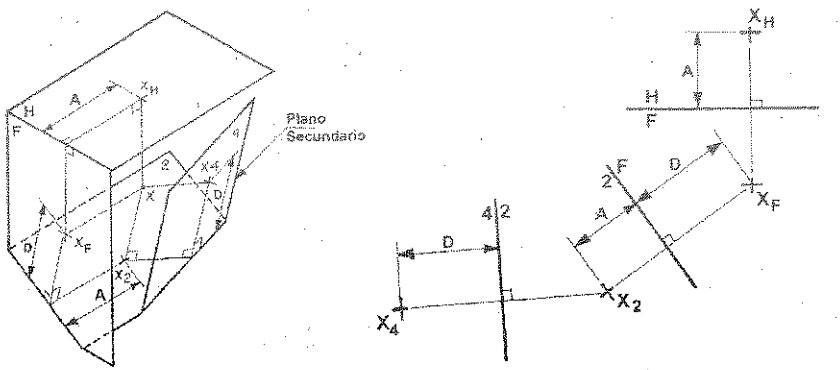


Fig. 2.7 Plano auxiliar referido al plano Frontal.

2.4 PROYECCIONES SUCESIVAS DE UN PUNTO EN EL ESPACIO.

En la figura 2.8 se muestra el procedimiento que se sigue para obtener proyecciones auxiliares sucesivas de un punto, repitiendo los pasos anteriores. El alejamiento A en el plano de perfil es el mismo alejamiento A en el plano horizontal y en el plano inclinado "3". La cota C en el plano frontal es la misma cota en el plano de elevación "1". La distancia B que se observa en el plano horizontal es igual en el plano inclinado "2". La distancia D que se observa en el plano frontal es igual en el plano inclinado "4". La distancia Ap situado en el plano frontal es igual en el plano inclinado "5".

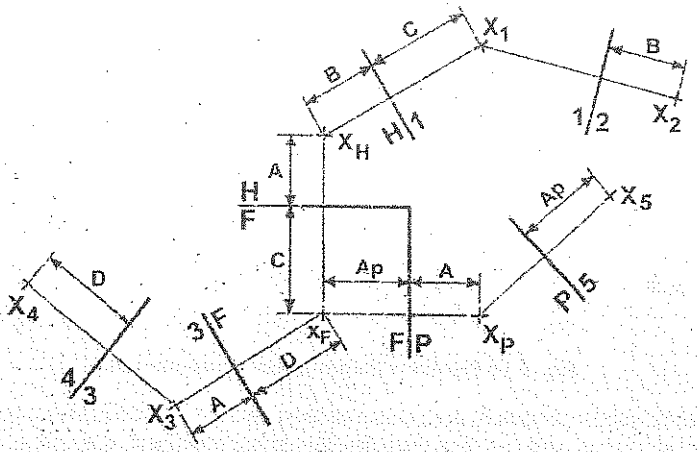


Fig. 2.8 Proyecciones sucesivas de un Punto.

2.5 PROYECCIONES RELATIVAS DE DOS PUNTOS EN EL ESPACIO.

En la figura 2.9 se muestra la posición del punto X y sus relaciones espaciales. Para especificar la posición de otro punto, es necesario especificar que este punto se encuentra arriba o abajo, adelante o atrás; o a la derecha o a la izquierda; con respecto a otro punto ya establecido.

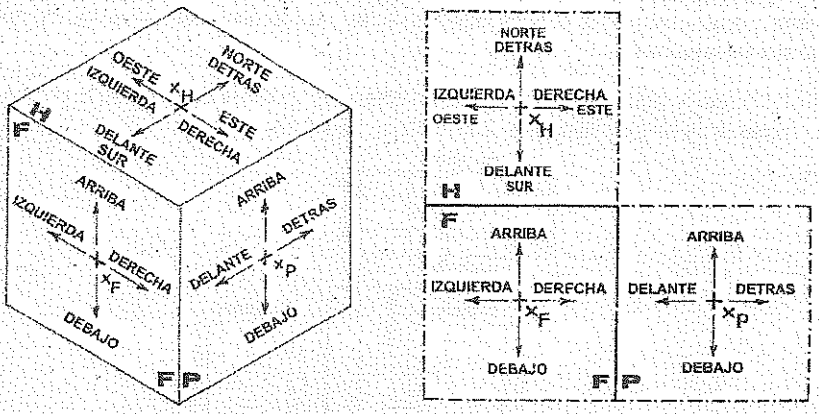


Fig. 2.9 Proyecciones relativas entre dos puntos.

Por ejemplo, el punto Y, puede ser definido en relación con el punto X, de la siguiente manera: está a **2 cm. a la *derecha*, 1.5 cm. *encima* y 2.5 cm. *delante* del punto X**; tal como se muestra en la figura **2.10 (a)**. Cuando se conectan los puntos X e Y, se observa que las relaciones utilizadas, han colocado el punto Y a una distancia definida del punto X.

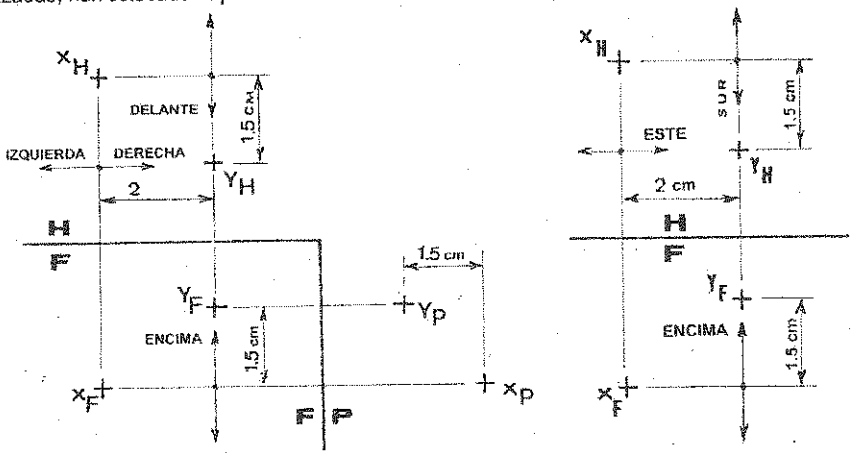


Fig. 2.10 Ejemplos de proyecciones de un punto.

La proyección relativa de dos puntos, se describe a menudo utilizando los puntos cardinales, y para señalar un punto se debe decir que está **al *norte* o al *sur*, o al *este* u *oeste*** de otro punto. En el ejemplo anterior se podrían indicar las posiciones relativas de los puntos X e Y de la siguiente manera: **el punto Y esta a 2 cm. al *este*, 1.5 cm. *encima* y 1.5 cm. al *sur* del punto X**, tal como se muestra en la figura **2.10 (b)**.

2.6 REGLAS DE VISIBILIDAD.

Aunque los objetos que se pueden dibujar son infinitos en variedad y dificultad, vamos a indicar a continuación unas cuantas reglas generales que facilitaran el trazado de los mismos, y que son las siguientes:

1. En cualquier plano de proyección de un objeto, es visible el contorno de la proyección; tal como se muestra en las figuras 2.11, 2.12 (a), (b) y 2.13.

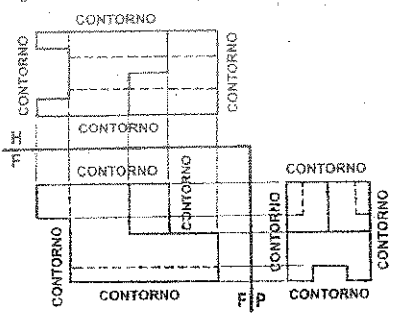
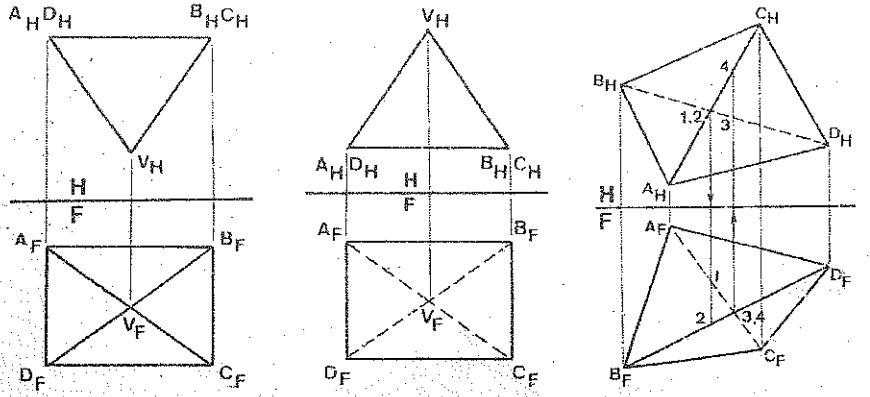


Fig. 2.11 Visible el contorno de la proyección.

2. Es visible la arista o vértice de un objeto más cercano al observador. En la figura 2.12 (a) en el plano horizontal se observa que el vértice V es el mas cercano al observador; por lo tanto es visible en el plano frontal.

3. Es invisible la arista o vértice más alejado del observador, siempre y cuando esta se encuentre dentro del contorno de la proyección. En la figura 2.12 (b) se observa que en el plano horizontal el vértice V del objeto es el más alejado del observador; por lo tanto es invisible en el plano frontal.



a) Vértice más cercano **b) Vértice más alejado.** **c) Rectas que se cruzan.**

Fig. 2.12 Determinación de la visibilidad.

4. Si el vértice de un poliedro convexo se encuentra dentro del contorno de la proyección, todas las aristas que partan de este vértice tendrán su visibilidad. En la figura 2.12 (a) y (b) se observa que las aristas que parten del vértice V, tendrán su visibilidad.

5. En cualquier plano de proyección de un poliedro convexo, para determinar la visibilidad entre dos aristas que se cruzan, se deberá trazar una línea de referencia desde el punto de cruce a un plano adyacente; buscamos a las rectas que se están cruzando, es visible la que encontremos primero (esta mas cerca al observador) e invisible la que encontremos después (más alejado del observador), en el plano donde se produce el cruce. En la figura 2.12 (c) se necesita determinar cual de las aristas, AC o BD es visible en cada plano de proyección. En el plano horizontal desde el punto de cruce (1,2) trazamos una línea de referencia al plano frontal, localizando 1 en AC y 2 en BD; luego AC será visible y BD invisible en el plano donde se produce el cruce, por ser la primera recta que se encontró. De igual manera al trazar la línea de referencia desde el punto de cruce (3,4) al plano horizontal, encontramos primero a BD y detrás de él a AC, entonces BD es visible y AC invisible en el plano frontal donde se produce el cruce.

2.7 VISTAS AUXILIARES DE SÓLIDOS.

Diferentes partes de una máquina tienen diferentes superficies, y muchas de ellas tienen una posición diferente a los planos principales. Estas vistas auxiliares se utilizan, cuando en una superficie inclinada deben mostrarse características importantes y principalmente por dos razones:

1. Conocer el tamaño y forma verdadera de una cara inclinada o algún detalle del objeto.
2. Ayuda a mostrar cuando el objeto se encuentra en una posición inclinada.

2.7.1 VISTAS AUXILIARES PRIMARIAS.

En un plano auxiliar primario solo aparece en tamaño real una de las tres dimensiones ortogonales principales de un objeto. Por esta definición es evidente que hay tres clases de planos auxiliares primarios:

- La primera clase muestra la dimensión ortogonal de altura.
- La segunda clase muestra la dimensión ortogonal de profundidad.
- La tercera clase muestra la dimensión ortogonal de anchura.

2.7.1.1 PLANO PROYECTADO A PARTIR DEL PLANO HORIZONTAL.

Es un plano auxiliar de elevación que se obtiene por la proyección sobre un plano perpendicular al plano horizontal, e inclinado respecto a los planos de proyección frontal y de perfil; tal como se muestra en la figura 2.13. Obsérvese que el plano proyectado muestra la dimensión ortogonal de altura. Como se explicará, a cada vértice del sólido se le ha asignado un número, y en base al isométrico hallamos sus planos principales, apareciendo numerados los vértices de estos tres planos.

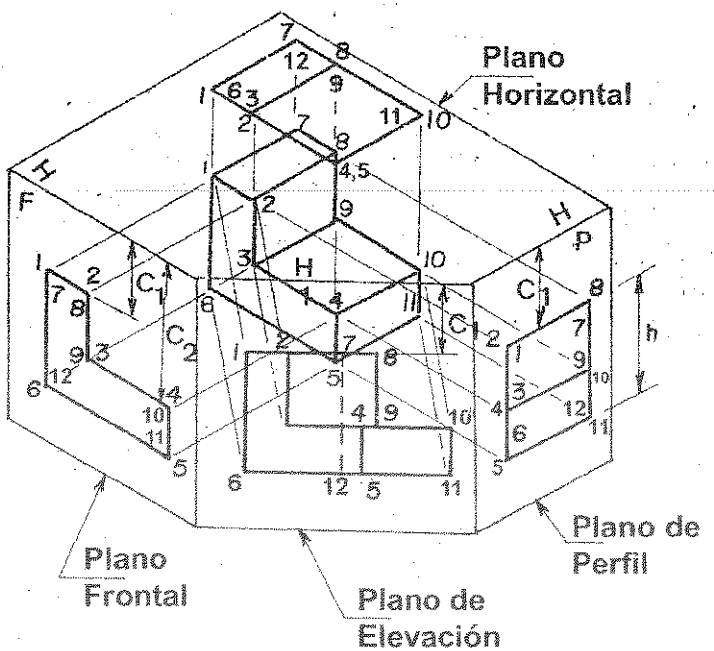


Fig. 2.13 Plano perpendicular al plano horizontal.

El plano de elevación "1" se obtiene trasladando a este plano, las cotas del plano frontal; tal como se observa en la figura 2.13 al trasladar la cota C_1 que ubica los puntos **(1, 2, 7 y 8)**, la altura **h** que ubica los puntos **(5, 6, 11 y 12)** y la cota C_2 que determina los puntos **(3, 4, 9 y 10)**. Finalmente se unirán estos vértices por rectas, observando la vista isométrica del sólido y la visibilidad de los vértices.

VISIBILIDAD: En la figura 2.14 la arista 4, 5 es el más cercano al observador, por lo tanto es visible. Como el vértice 4 está dentro del contorno de la proyección, serán visibles todas las aristas que partan de este vértice; tales como 4-3 y 4-10. Las aristas que partan del vértice 5, tales como 5-6 y 5-11 son visibles por ser contorno de proyección. La arista 7-12 es el mas lejano al observador y como está dentro del contorno de la proyección en invisible.

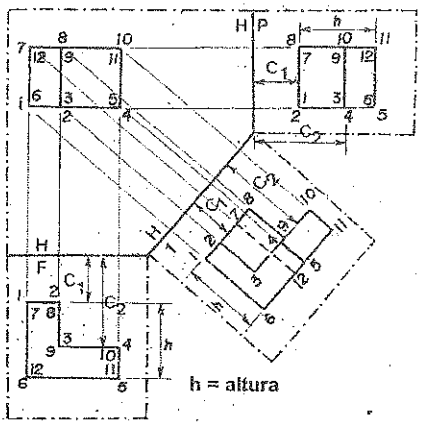


Fig. 2.14 Plano de elevación perpendicular al plano horizontal.

2.7.1.2 PLANO PROYECTADO A PARTIR DEL PLANO FRONTAL.

Es un plano auxiliar de inclinación que se obtiene por la proyección sobre un plano perpendicular a un plano frontal, e inclinado respecto a los planos de proyección horizontal y de perfil; tal como se muestra en la figura 2.15. Obsérvese que el plano proyectado muestra la dimensión ortogonal de profundidad o fondo. Se determina sus planos principales en base a la vista isométrica del sólido, apareciendo numerados los vértices de estos tres planos.

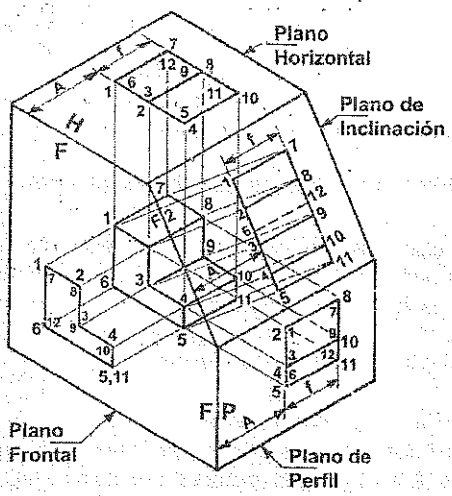


Fig. 2.15 Plano perpendicular al plano frontal.

El plano de inclinación "2" se obtiene trasladando a este plano, los alejamientos del plano horizontal; tal como se observa en la figura **2.15** al trasladar el alejamiento A que ubica los vértices **(1, 2, 3, 4, 5 y 6)** y la profundidad o fondo f que ubica los vértices **(7, 8, 9, 10, 11 y 12)**. Finalmente se unirán estos vértices por rectas observando la vista isométrica del sólido y la visibilidad de los vértices.

VISIBILIDAD: En la figura **2.16** la arista **4,10** es el más cercano al observador, por lo tanto es visible. Las aristas que partan del vértice **4**, tal como **4-3** y **4-5**, son visibles por ser contorno de proyección. Igual sucede con las aristas que partan del vértice **10**, tal como **10-9** y **10-11**; serán visibles por ser contorno de proyección. La arista **6-12** es el más lejano al observador y como está dentro del contorno de la proyección es invisible.

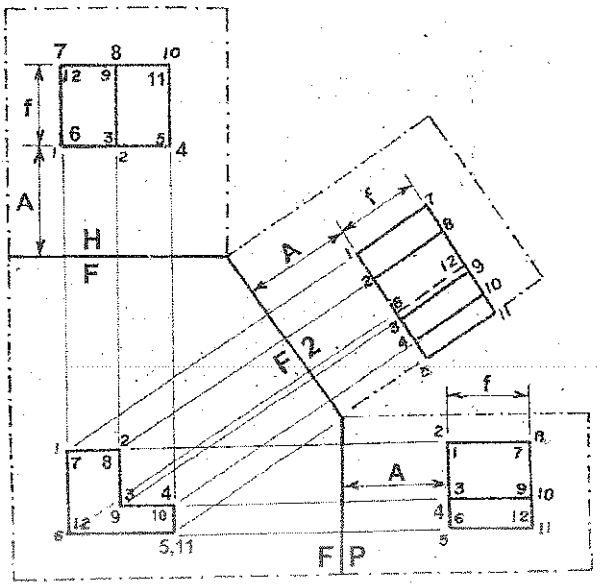


Fig. 2.16 Plano de inclinación perpendicular al plano frontal.

2.7.1.3 PLANO PROYECTADO A PARTIR DEL PLANO DE PERFIL.

Es un plano auxiliar de inclinación que se obtiene por la proyección sobre un plano perpendicular al plano de perfil, e inclinado respecto a los planos de proyección horizontal y frontal; tal como se muestra en la figura 2.17. Obsérvese que el plano proyectado muestra la dimensión ortogonal de anchura. Se determina sus planos principales en base a la vista isométrica del sólido, apareciendo numerados los vértices de estos tres planos.

El plano auxiliar "3" se obtiene trasladando a este plano de proyección, los apartamientos que se obtienen del plano horizontal; tal como se observa en la figura **2.17**, el apartamiento B_1 que ubica los vértices **(4, 5, 10 y 11)**, la anchura D que ubica los vértices **(1, 6, 7 y 12)** y el apartamiento B_2 que ubica los vértices **(2, 3, 8 y 9)**. Finalmente se unirán estos vértices por rectas observando la vista isométrica del sólido y la visibilidad de los vértices.

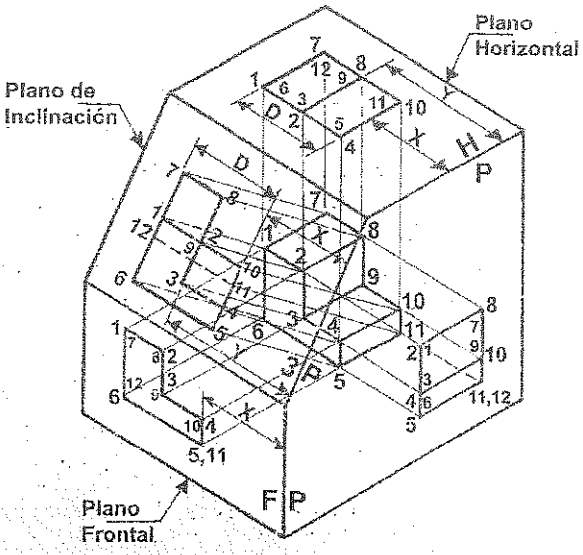


Fig. 2.17 Plano perpendicular al plano de perfil.

VISIBILIDAD: En la figura 2.18 la arista 12 es el más cercano al observador, por lo tanto es visible. Las aristas que partan del vértice 1, tal como 1-6 y 1-7 son visibles por ser contorno de proyección. Son visibles todas las aristas que partan del vértice 2, por estar dentro del contorno de la proyección; tal como 2-3 y 2-8. La arista 11-12 es el más lejano al observador y como está dentro del contorno de la proyección es invisible.

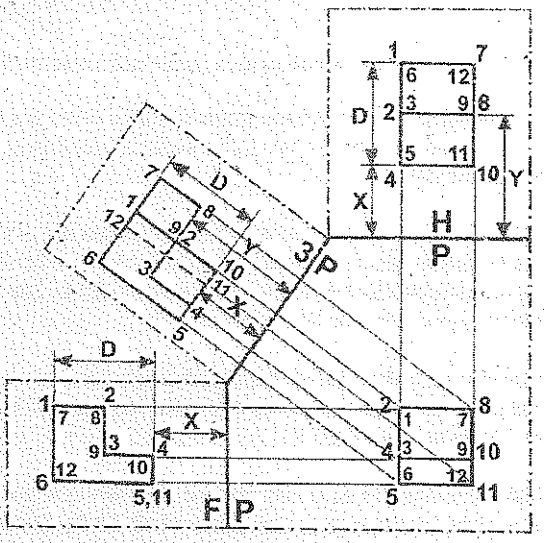


Fig. 2.18 Plano perpendicular al plano de perfil.

2.7.2 VISTAS AUXILIARES SECUNDARIAS.

En un plano auxiliar secundario no aparece en tamaño real ninguna de las dimensiones ortogonales principales de un objeto.

2.7.2.1 PLANO AUXILIAR A PARTIR DEL PLANO DE ELEVACIÓN.

Es un plano auxiliar secundario que se obtiene por la proyección sobre un plano perpendicular al plano de elevación. Se determinan dos planos principales del sólido, en base a su proyección isométrica, apareciendo numerados todos los vértices y en los dos planos principales; tal como se observa en la figura 2.17.

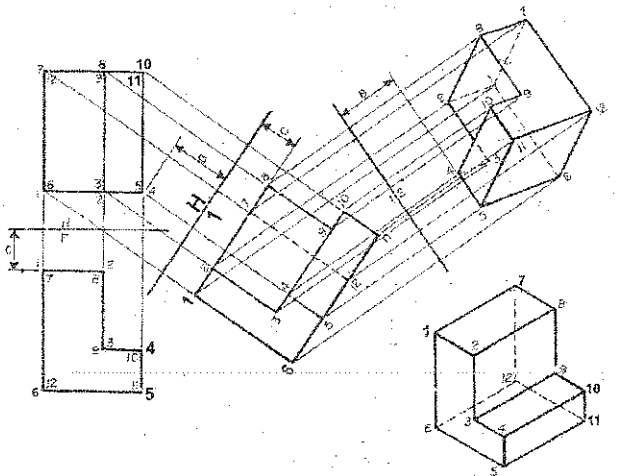


Fig. 2.17 Plano auxiliar secundario a partir del plano de elevación.

El plano de elevación "1" se obtiene trasladando las cotas del plano frontal, para los doce vértices que tiene el sólido; luego se unirán los vértices observando la vista isométrica del sólido y la visibilidad de los vértices.

VISIBILIDAD: En la figura 2.17, la arista **4,5** es el más cercano al observador, por lo tanto serán visibles todas las aristas que partan de los vértices; **4** y **5**; tal como **4-3, 4-5, 4-10, 5-11** y **5-6**. La arista **7,12** es la más lejana al observador, entonces es invisible. Las aristas **7-1, 7-8, 12-6** y **12-11** no son invisibles, por ser contorno de proyección.

El plano auxiliar secundario "3" se halla trasladando para cada vértice las distancias B que se obtienen del plano horizontal al plano de elevación, luego se unirán los vértices observando al sólido y la visibilidad de los vértices.

VISIBILIDAD: El vértice **11** es el mas cercano al observador, por lo tanto serán visibles todas las aristas que partan de ese vértice; tales como: **11-10, 11-5 y 11-12.** El vértice **1** es el más lejano al observador y se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de ese vértice; tales como **1-2, 1-6 y 1-7.**

2.7.2.2 PLANO AUXILIAR A PARTIR DEL PLANO DE INCLINACIÓN.

Es un plano auxiliar secundario que se obtiene por la proyección sobre un plano perpendicular al plano de inclinación. Se determinan dos planos principales del sólido, en base a su vista isométrica; apareciendo numerados los vèrtices de estos dos planos de proyección; tal como se observa en la figura 2.18.

El plano inclinado "2" se obtiene trasladando los alejamientos del plano horizontal, para los dieciséis vértices que tiene el sólido; luego se unirán los vèrtices observando al sólido y la visibilidad de los vértices.

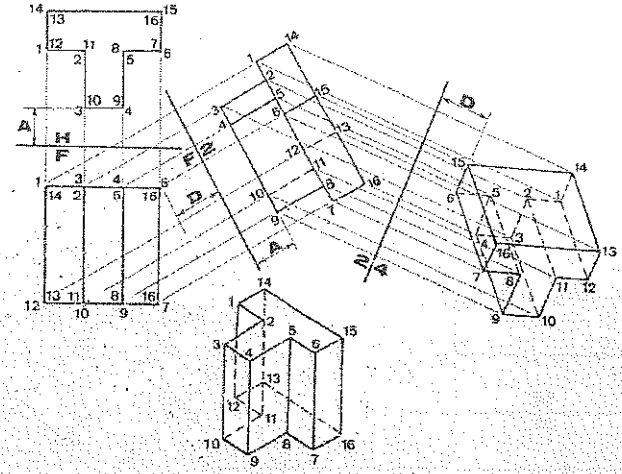


Fig. 2.18 Plano auxiliar secundario a partir del plano de inclinación.

VISIBILIDAD: La arista **6,15** es el más cercano al observador, por lo tanto serán visibles todas las aristas que partan de los vértices **6** y **15**; tal como **6-5, 6-7, 6-15, 15-14 y 15-16.** La arista **12-13** es el más lejano al observador, entonces es invisible. Las aristas **13-14** y **13-16** no son invisibles, por ser contorno de proyección.

El plano auxiliar secundario **"4"** se obtiene trasladando para cada vèrtice las distancias **D**, del plano principal frontal al plano de inclinación; luego se unen los vértices observando detenidamente al sólido y la visibilidad de sus vértices.

VISIBILIDAD: El vèrtice **16** es el más cercano al observador, por lo tanto serán visibles todas las aristas que partan de ese vèrtice; tales como **16-7, 16-13 y 16-15.** El vèrtice **3** es el más lejano al observador y se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de ese vèrtice; tales como **3-2, 3-4 y 3-10**.

2.7.2.3 PLANO AUXILIAR SECUNDARIO REFERIDO AL PLANO DE PERFIL.

Es un plano auxiliar secundario que se obtiene por la proyección sobre un plano perpendicular al plano auxiliar **P/5**. Se determinan dos planos principales del sólido, en base a su vista isométrica; apareciendo numerados todos los vértices de estos dos planos de proyección; tal como se observa en la figura **2.19**. El plano inclinado **5** se obtiene trasladando los apartamientos **E** que son distancias de cada vertice, en el plano frontal hacia el plano auxiliar P/5; para los dieciséis vertices que tiene el sólido; luego se unirán estos vèrtices observando al sólido y la visibilidad de sus vèrtices.

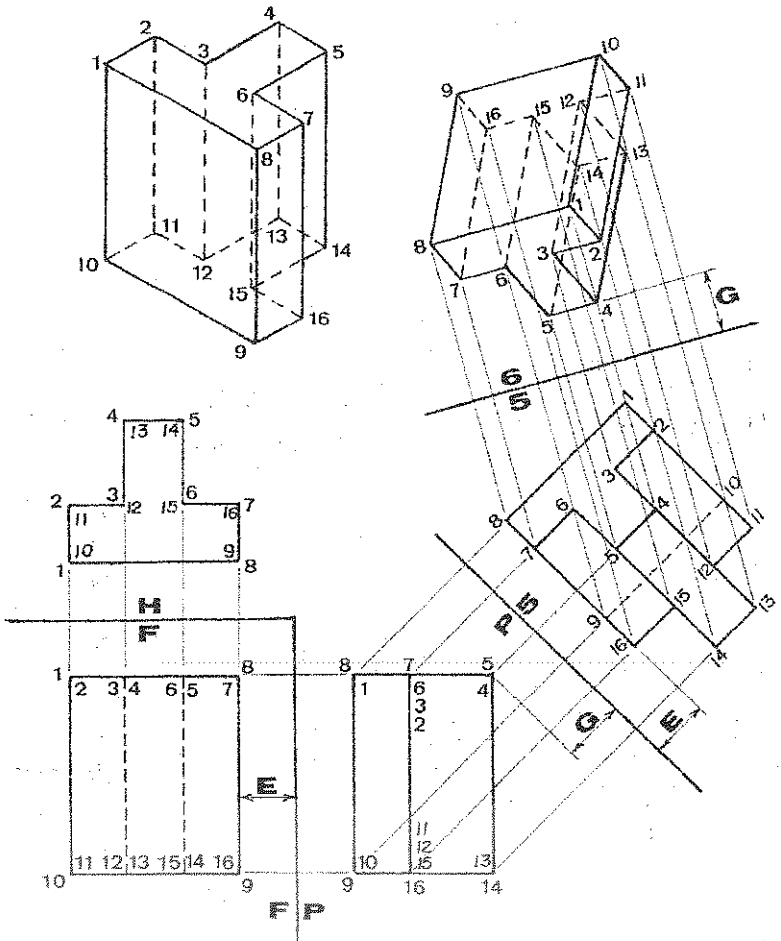


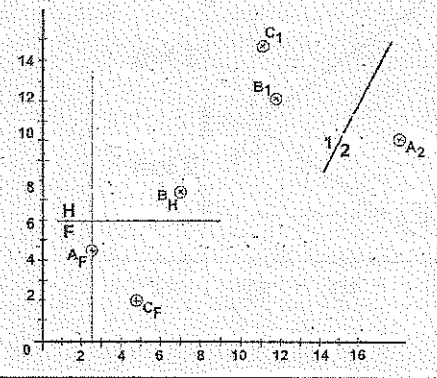
Fig. 2.19 Plano auxiliar secundario referido al plano de perfil.

VISIBILIDAD: La arista **4,5** es el más cercano al observador, por lo tanto serán visibles todas las aristas que partan de los vértices **4** y **5**; tales como **4-3, 4-5, 4-13, 5-6** y **5-14.** La arista **9,10** es el más lejano al observador, entonces es invisible. Las aristas **9-8, 9-16, 10-1** y **10-11** no son invisibles por ser contorno de proyección.

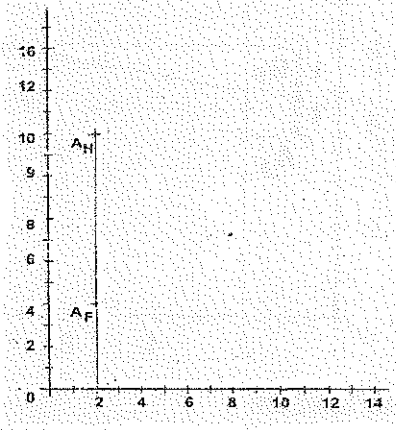
El plano auxiliar secundario **6** se halla trasladando para cada vértice las distancias **G**, que se obtienen midiendo las distancias de cada vértice hacia el plano auxiliar **5**; luego se unirán los vértices observando al sólido y la visibilidad de los vértices.

VISIBILIDAD: El vértice **1** es el más cercano al observador, por lo tanto serán visibles todas las aristas que partan de ese vértice; tales como **1-2. 1-8 y 1-10.** El vértice **14** es el más lejano al observador y se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de ese vértice; tales como **14-5, 14-13 y 14-15.**

PROBLEMA 2.2: Completar las proyecciones que faltan de los puntos A, B y C; y determinar la posición de la línea de referencia H/1. NOTA: Los puntos encerrados en círculos son datos del problema, tales como: A_F, C_1, B_H, B_1, C_1 y A_2, y las líneas de pliegue H/F y 1/2.

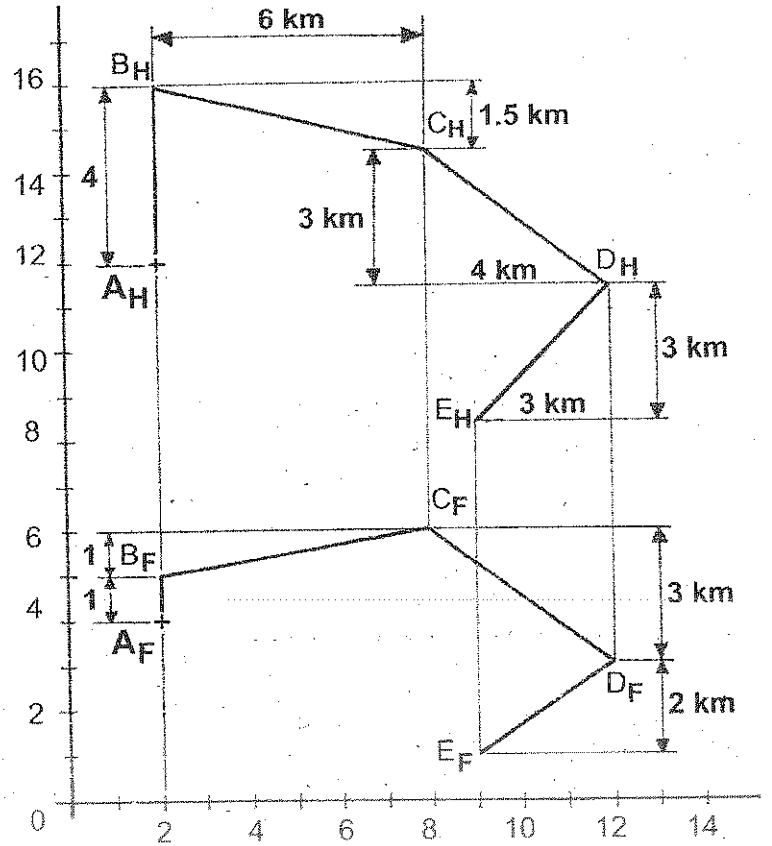


PROBLEMA 2.1: Dibujar el polígono abierto ABCDE, sabiendo que: B está **4km** al Norte y **1000mts** arriba de A; C está **6km** a la derecha, **1500mts** delante y **1000mts** arriba de B; D está **4km** hacia el Este, **3km** al Sur y **3km** debajo de C y el punto E se encuentra **2km** debajo de D, **3km** delante y **3km** a la izquierda de dicho punto.
A(4, 4, 12). ESCALA: 1: 100,000



PROBLEMAS RESUELTOS

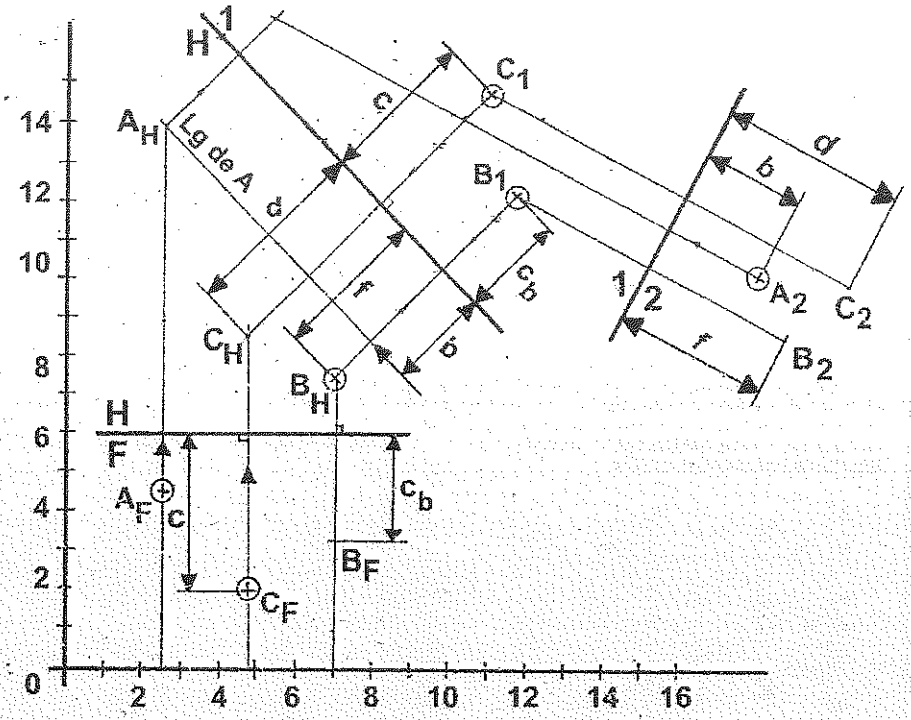
SOLUCIÓN 2.1:



PROCEDIMIENTO:

1. Graficar el punto **A** según el método estudiado
2. El punto **B** está **4kms** al Norte de **A**, se grafica en el plano horizontal; y **1000mts** arriba de **A**, se grafica en el plano frontal.
3. El punto **C** está **6km** a la derecha de **B**, se traza una línea de referencia paralela a la del punto **B**; **1500mts** delante (se grafica en el plano horizontal) y **1000mts** arriba de **B** (se grafica en el plano frontal).
4. El punto **D** está **4km** hacia el Oeste, se traza una línea de referencia paralela a la del punto **C**; **3km** al Sur (se grafica en el plano horizontal) y **3km** debajo de **C** (se grafica en el plano frontal).
5. El punto **E** está **3km** a la izquierda, se traza una línea de referencia paralela a la del punto **D**; **3km** delante (se grafica en el plano horizontal) y **2km** debajo de **D** (se grafica en el plano frontal).

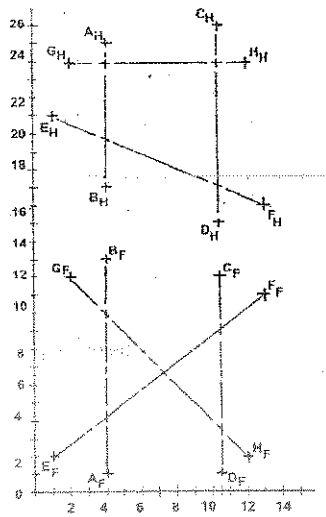
SOLUCION 2.2:



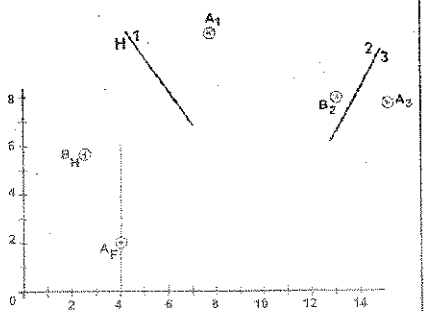
PROCEDIMIENTO:

1. Desde los planos de proyección H y 1, unir el punto B trazando su línea de referencia.
2. Desde los planos de proyección horizontal H y de elevación 1, y desde el punto "C" trazamos su línea de referencia perpendicular al plano de proyección H/F y paralela a la línea de referencia que une los puntos B_H y B_1 respectivamente; estas rectas se cortan y nos determina la proyección horizontal del punto C.
3. Ubicar el plano de elevación H/1perpendicular a la línea de referencia que une los puntos C_H y C_1, y a una distancia "c" (cota del punto C) obtenida en el plano frontal.
4. En el plano Horizontal y desde el punto B, trazamos su línea de referencia perpendicular al plano de proyección H/F; luego trasladamos la cota "c_b" obtenida en el plano de elevación H/1 al plano frontal, ubicándose la proyección frontal del punto B.
5. En el plano auxiliar "2" medimos la distancia "b" del punto A, y la trasladamos al plano horizontal H; por donde pasa el l.g. del punto "A", el corte de este lugar geométrico con la línea de referencia de A_F trazada perpendicular al plano de proyección H/F, determina la proyección horizontal del punto "AH".
6. Desde los planos de proyección "H" y "2", trazamos desde el punto A su línea de referencia perpendicular a los planos de proyección H/1 y 1/2 respectivamente; el corte de ambas rectas determina la proyección en el plano de elevación del punto A_1.
7. Finalmente en el plano auxiliar "2" completamos las proyecciones de los puntos B y C, trasladando las distancias "d" y "f" respectivamente.

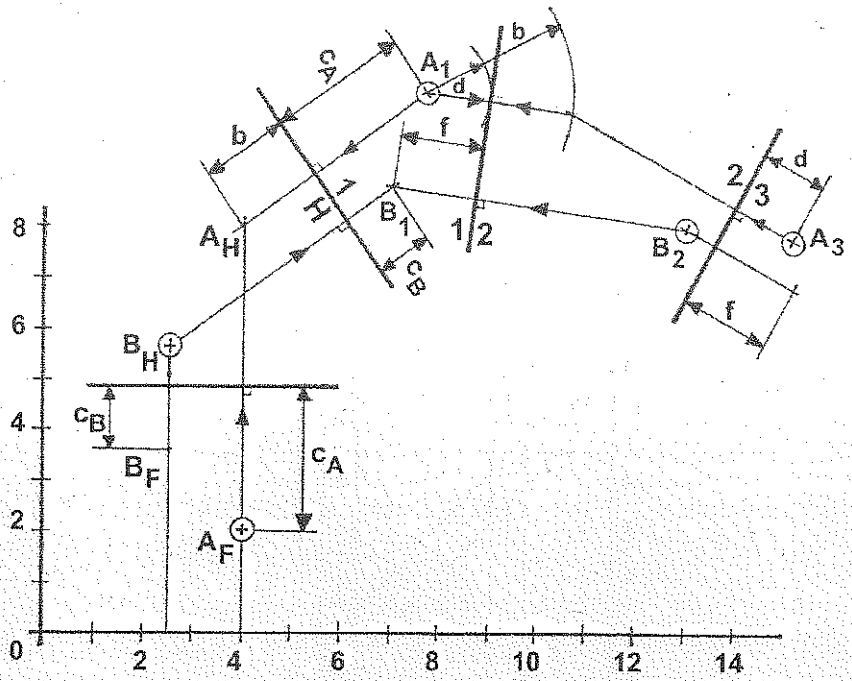
PROBLEMA 2.4: Los segmentos AB, CD, EF y GH son parte de los ejes de tuberías de 130cm de diámetro. Completar las proyecciones principales H y F de las tuberías, incluyendo su visibilidad. Resolver sin emplear vistas auxiliares. ESCALA: 1:100. A(4,1,25), B(4,13,17); C(10.5,12,26), D(10.5,1,15); E(1,2,21), F(13,11,16); G(2,12,24), H(12,2,24)



PROBLEMA 2.3: Completar las proyecciones que faltan de los puntos A y B; y determinar la posición de las líneas de referencia H/F y 1/2. NOTA: Los puntos encerrados en círculos son datos del problema, tales como: A_F, B_H, A_1, B_2 y A_3, y las líneas de pliegue H/1 y 2/3.



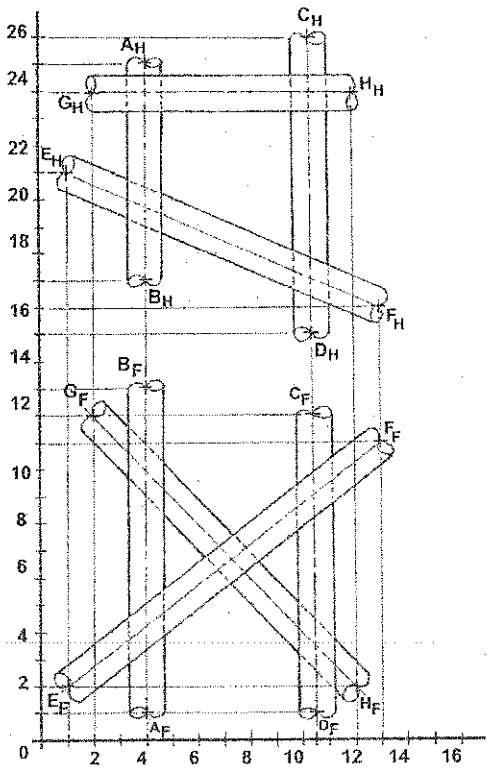
SOLUCIÓN 2.3:



PROCEDIMIENTO:

1. Trazar la línea de referencia **H/F** perpendicular a la línea de referencia del punto **"A"** y a una distancia **"c"** obtenida del plano de elevación **"1"**; luego en el corte con la línea de referencia trazada desde A_1 determinamos la proyección horizontal del punto **A**.
2. Desde A_3 trazar su línea de referencia de longitud arbitraria, perpendicular al plano de proyección **2/3**.
3. Con centro en A_1 trazamos un arco de radio **"d"**, valor obtenido del plano de proyección **"3"**, para el punto **A**.
4. Con centro en A_1 trazamos el arco de radio (d+b), este último valor (**"b"**) se obtiene del plano horizontal para el punto **A**; luego en el corte de este arco con la línea de referencia de A_3, determina la proyección en el plano auxiliar **2/3** de A_2.
5. Desde los planos de proyección **"1"** y **"2"** unir el punto **A**, trazando su línea de referencia.
6. Trazar el plano de proyección **"1/2"** tangente al arco de radio **"d"** y perpendicular a la línea de referencia del punto **A**.
7. Trazar desde B_H y B_2 su línea de referencia perpendicular a los planos de proyección **"H/1"** y **"1/2"** respectivamente; el corte de estas rectas determina B_1 en el plano de elevación.
8. Trasladar al plano frontal **"F"** y al plano auxiliar **"3"** las distancias **"e"** y **"f"** respectivamente, valores obtenidos del plano de elevación **"1"**; obteniéndose B_F y B_3

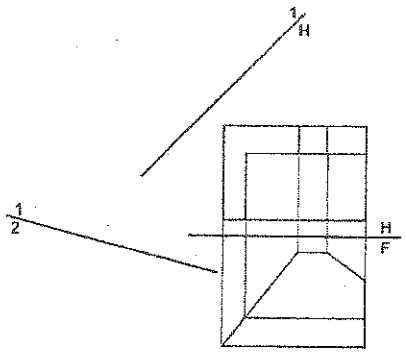
SOLUCIÓN 2.4:



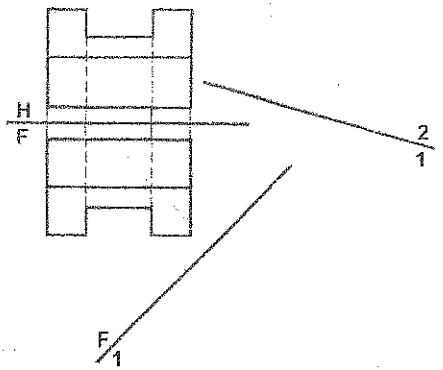
PROCEDIMIENTO:

1. Rectas AB y GH: ***Visibilidad en H:*** cruce de las rectas AB y GH; en el ***plano frontal*** observamos que GH está encima de AB, entonces GH es visible y AB invisible, en el plano donde se produce el cruce. ***Visibilidad en F:*** cruce de las rectas BA y GH; en el ***plano horizontal*** hallamos a BA delante de GH, entonces BA es visible y GH invisible, en el plano donde se produce el cruce.
2. Rectas CD y GH: ***Visibilidad en H:*** cruce de las rectas CD y HG; en el ***plano frontal*** observamos que CD está encima de HG, entonces CD es visible y HG invisible, en el plano donde se produce el cruce. ***Visibilidad en F:*** cruce de las rectas DC y HG; en el ***plano horizontal*** hallamos a DC delante de HG, entonces DC es visible y HG invisible, en el plano donde se produce el cruce.
3. Rectas BA y EF: ***Visibilidad en H:*** cruce de las rectas BA y EF; en el ***plano frontal*** observamos que BA está encima de EF, entonces BA es visible y EF invisible, en el plano donde se produce el cruce. ***Visibilidad en F:*** cruce de las rectas AB y EF; en el ***plano horizontal*** hallamos a AB delante de EF, entonces AB es visible y EF invisible, en el plano donde se produce el cruce.
4. Rectas CD y EF: ***Visibilidad en H:*** cruce de las rectas DC y FE; en el ***plano frontal*** observamos que FE está encima de DC, entonces FE es visible y DC invisible, en el plano donde se produce el cruce. ***Visibilidad en F:*** cruce de las rectas CD y FE; en el ***plano horizontal*** hallamos a FE delante de CD, entonces FE es visible y CD invisible, en el plano donde se produce el cruce.
5. Rectas EF y GH: ***Visibilidad en F:*** cruce de las rectas EF y GH; en el ***plano horizontal*** hallamos a EF delante de GH, entonces EF es visible y GH invisible, en el plano donde se produce el cruce.

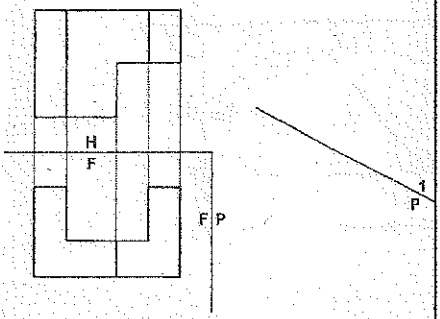
PROBLEMA 2.5: Dado las vistas principales Horizontal y Frontal de un sólido, hallar las vistas auxiliares H1 y 12; y el dibujo isométrico.



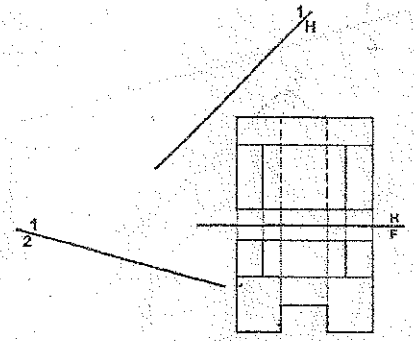
PROBLEMA 2.8: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones F / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



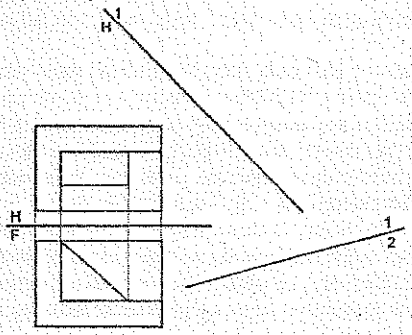
PROBLEMA 2.6: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones P, P / 1 y el dibujo isométrico.



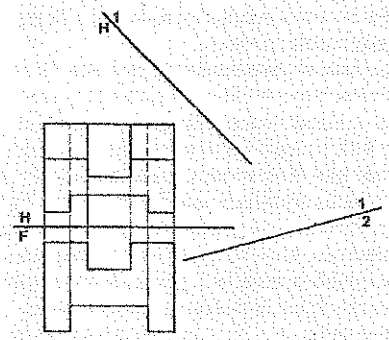
PROBLEMA 2.9: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



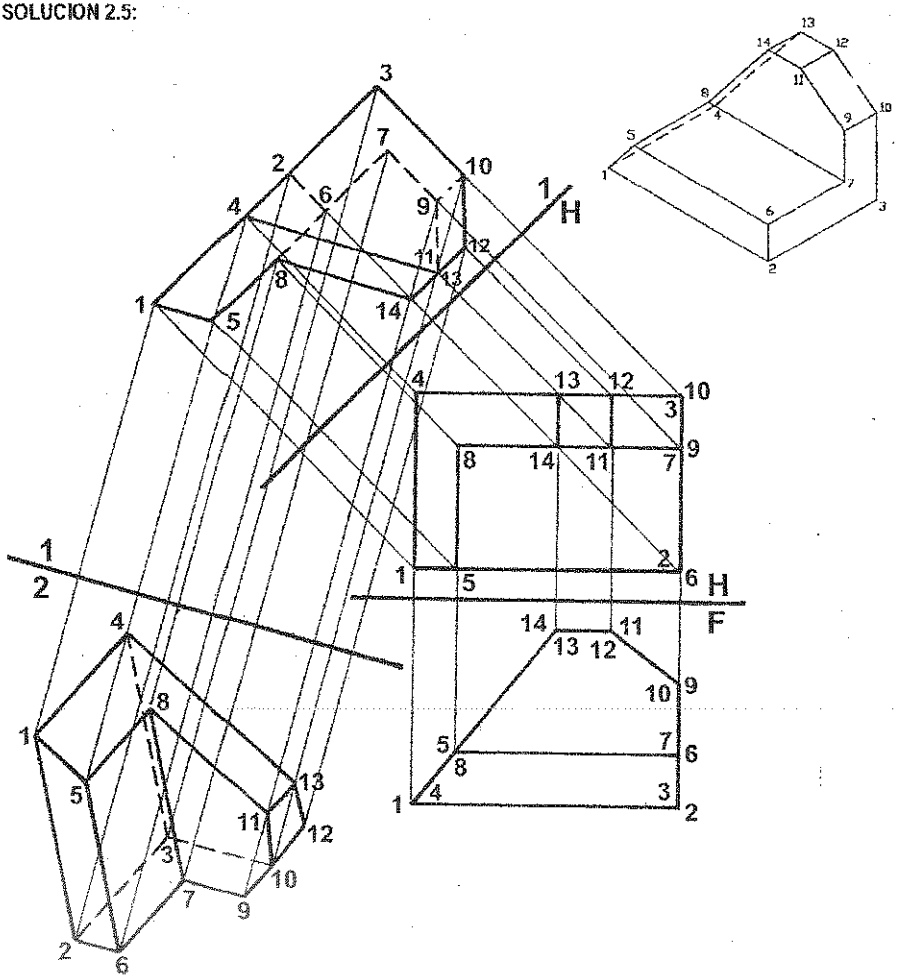
PROBLEMA 2.7: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones H/1, 1/2 y el dibujo isométrico.



PROBLEMA 2.10: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



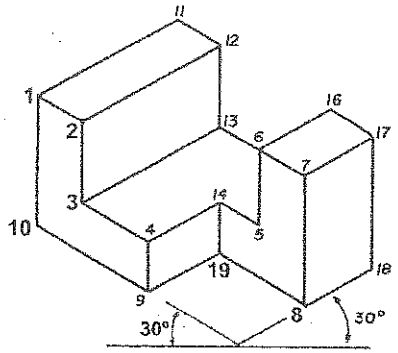
SOLUCION 2.5:

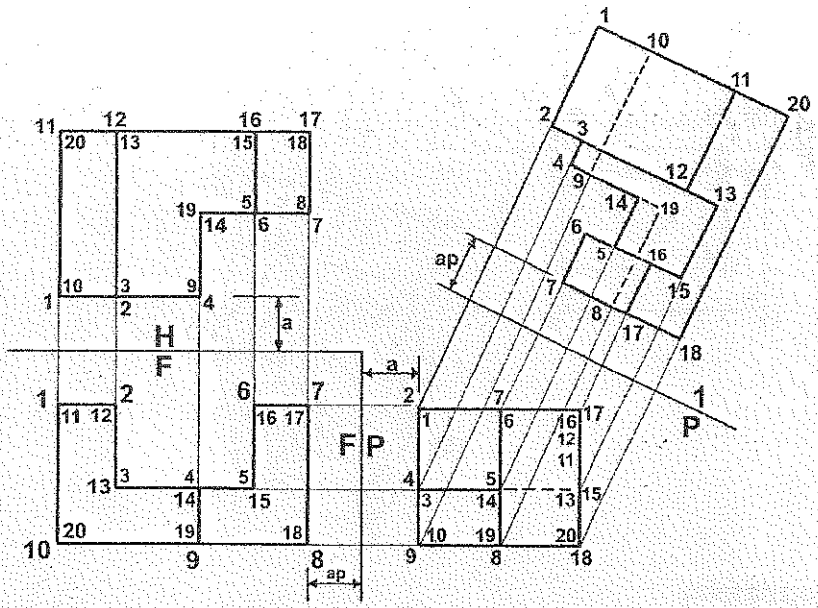


PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número.
2. Se halla el plano auxiliar de elevación "1", trasladando para cada punto las cotas del plano principal frontal; luego se unirán los puntos observando el isométrico. ***Visibilidad***: El vértice 4 es el más cercano al observador por lo tanto serán visible todas las aristas que partan de ese vértice; tales como: **4-1, 4-3** y **4-13.** La arista **2-6** es el más lejano al observador por lo tanto será invisible. La arista **7-9** es otra arista más lejos al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección; por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de los vértices **7** y **9**; tales como: **7- 6, 7- 9, 7- 8, 9 - 10** y **9 - 11.**
3. Se halla el plano auxiliar **"2"**, trasladando para cada vértice su distancia hacia el plano de elevación; luego se unirán estos vértices por rectas según lo observado en el isométrico. ***Visibilidad:*** Es visible la arista **1 - 5**; por ser la más cercana al observador. La arista **3-10** es invisible por ser la arista más lejana al observador; como el vértice **3** está dentro del contorno de proyección, todas las arista que partan de el, tendrán su visibilidad (Invisible), tales como **3 – 2** y **3 - 4.**

SOLUCION 2.6:

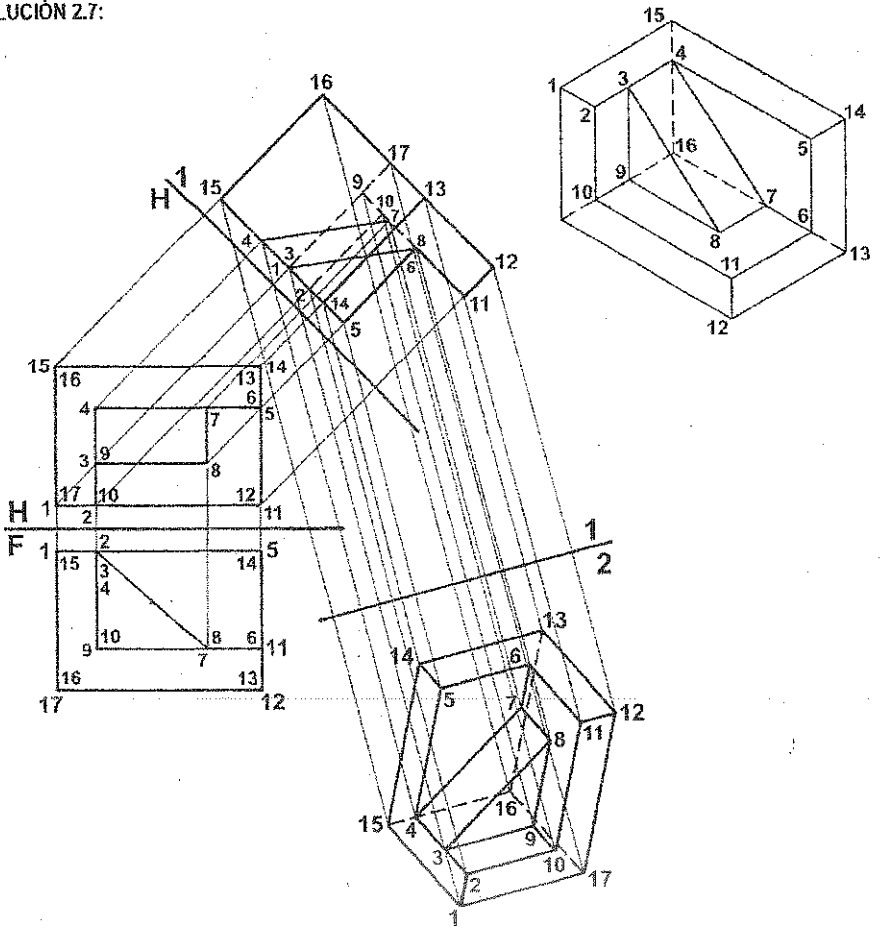




PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número.
2. Se halla la vista del perfil "P" trasladando para cada punto, los alejamientos hallados en la vista horizontal; luego unir estos vértices observando al isométrico. ***VISIBILIDAD:*** Son visibles las aristas **7-8** y **17-18**, por ser la mas cercana al observador. Las aristas **1-10** y **11-20** son aristas más alejadas, pero en la vista de perfil son visibles por ser contorno de proyección.
3. Se halla la vista auxiliar "**1**", trasladando para cada punto los apartamientos de la vista frontal. **VISIBILIDAD:** El vértice **17** es el más cercano al observador, por lo tanto serán visible todas las aristas que parten de este vértice, tales como: **17-7, 17-16** y **17-18**. El vértice **9** es el más lejano al observador, entonces serán invisibles todas las aristas que parten de este vértice, tales como: **9-4, 9-10** y **9–19**. En la vista auxiliar "**1**" se observa que la arista **9-4** es visible, por ser contorno de proyección.

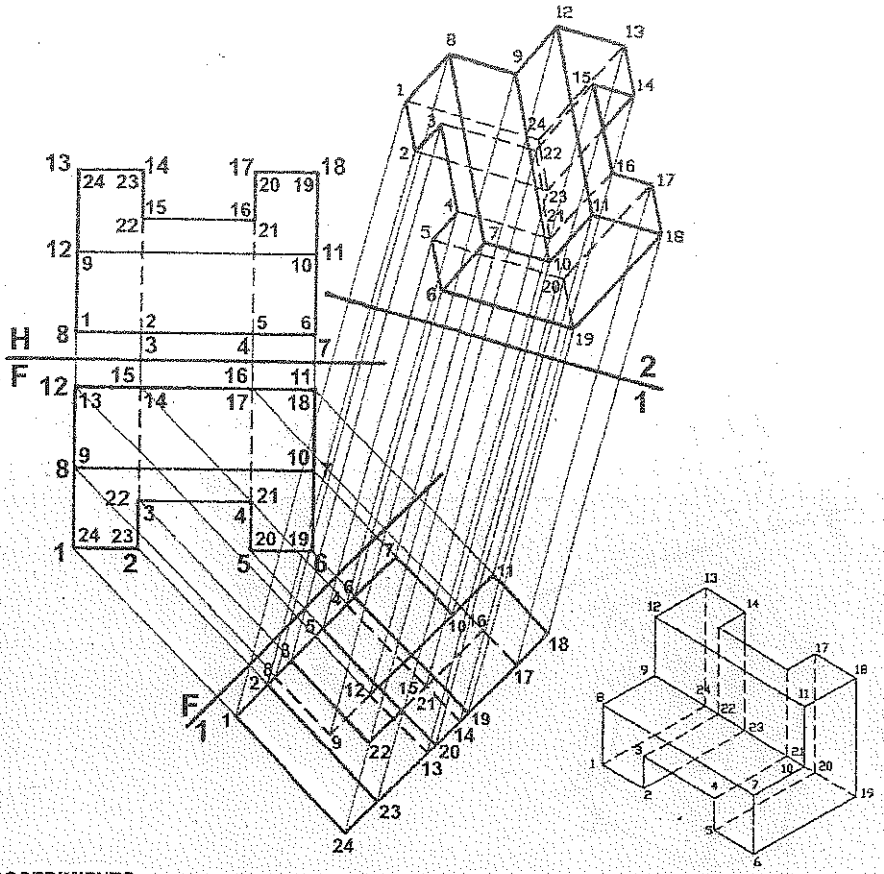
SOLUCIÓN 2.7:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número.
2. Se halla el plano de elevación "1", trasladando para cada vértice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** La arista 13,14 es la más cercana al observador, por lo tanto será visible esta arista. La arista **1-17** es el más lejano al observador, y en el plano de elevación se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible.
3. Se halla el plano auxiliar "2", trasladando para cada vértice, la distancias del punto al plano de elevación; luego se unirán todos estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** El vértice **11** es el más cercano al observador, por lo tanto será visible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **11-5, 11-10** y **11-12.** El vértice **16** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **16-13, 16-15** y **16-17.**
4. Para completar la visibilidad en los planos de proyección **"1"** y **"2"** se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

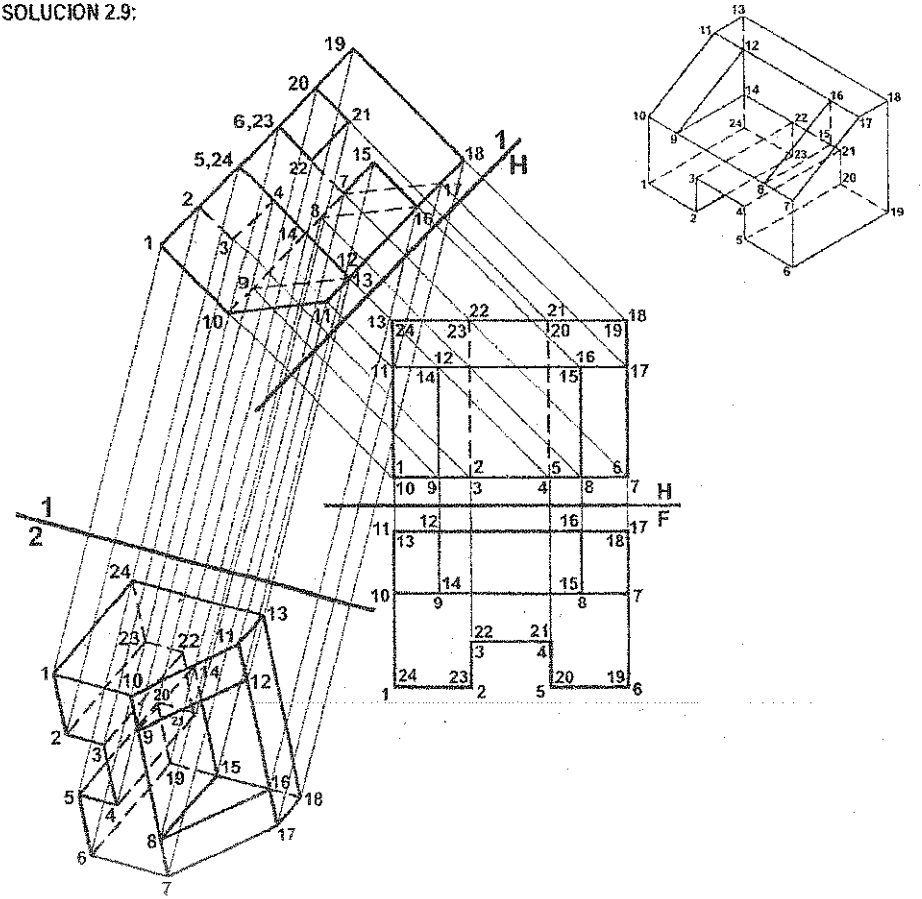
SOLUCION 2.8:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número.
2. Se halla el plano de inclinación **"1"**, trasladando para cada vértice su alejamiento, obtenida del plano principal horizontal; luego se unirán estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** La arista **6,19** es la más cercana al observador, por lo tanto será visible esta arista. La arista **12-13** es la más lejana al observador, y en el plano de inclinación se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible. El vértice **12** es invisible, se encuentra dentro del contorno de la proyección; por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de este vértice; tales como: **12-9, 12-11** y **12-13.**
3. Se halla el plano auxiliar **"2"**, trasladando para cada vértice, la distancias de cada punto al plano de inclinación; luego se unirán todos estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** El vértice **11** es el más cercano al observador, por lo tanto será visible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **11-18, 11-10** y **11-12**. El vértice **24** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **24-13, 24-1** y **24-19.**
4. Para completar la visibilidad en los planos de proyección **"1"** y **"2"** se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

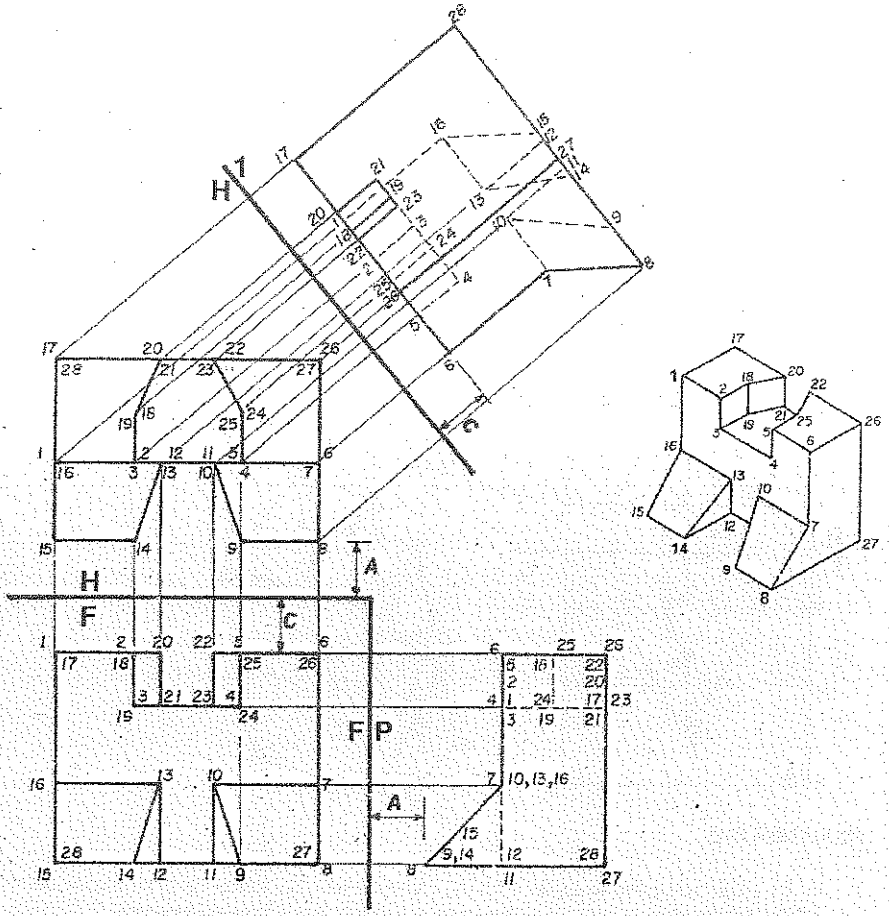
SOLUCION 2.9:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número.
2. Se halla el plano de elevación "1", trasladando para cada vértice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** La arista 13,24 es la más cercana al observador, por lo tanto será visible esta arista. La arista 6-7 es la más lejana al observador, y en el plano de elevación se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible. El vértice 7 es invisible, se encuentra dentro del contorno de la proyección; por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de este vértice; tales como: 7-17, 7-8 y 7-6.
3. Se halla el plano auxiliar "2", trasladando para cada vértice, la distancias de cada punto hacia el plano de elevación; luego se unirán todos estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** El vértice **10** es el más cercano al observador, por lo tanto será visible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **10-1, 10-9 y 10-11.** El vértice **19** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **19-6, 19-18 y 19-20.**
4. Para completar la visibilidad en los planos de proyección **"1"** y **"2"** se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

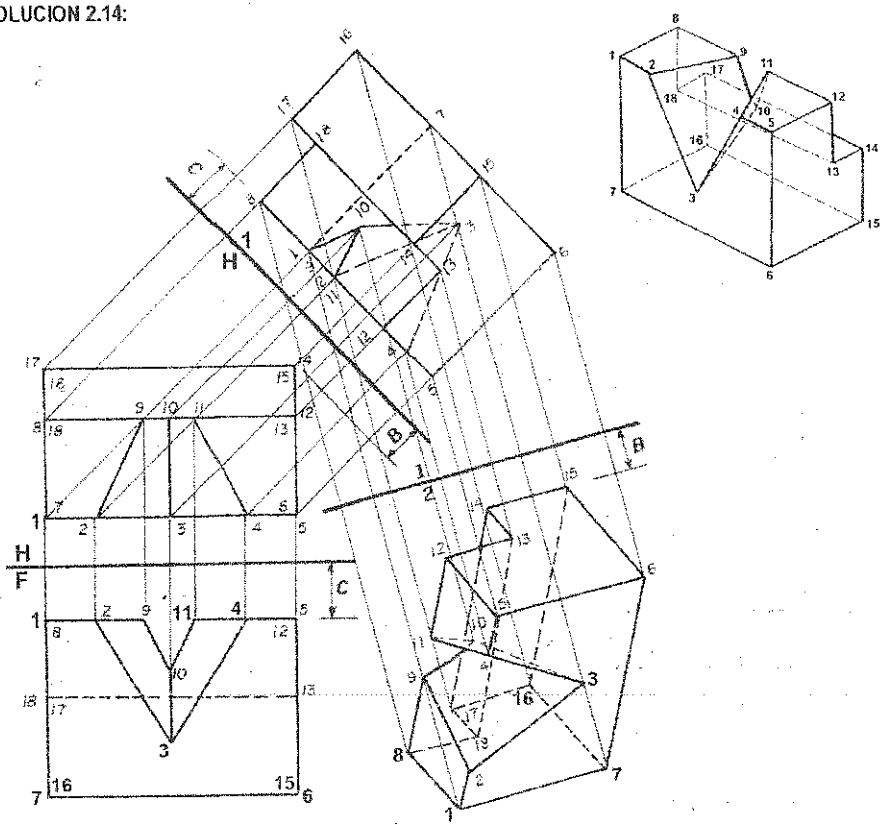
SOLUCION 2.13:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales frontal y perfil, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número; teniendo en cuenta las que se han asignado en el isométrico.
2. Se halla el plano horizontal **"H"**, trasladando para cada vértice sus alejamientos **"A"**, obtenida del plano principal de perfil; luego se unirán todos estos puntos por rectas y observando en el isométrico la correlación de estos.
3. Se halla el plano de elevación **"1"**, trasladando para cada vértice las cotas **"C"**; luego se unirán todos estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** La arista **26-27** es visible por ser la más cercana al observador. EL vértice **15** es invisible, porque este el más lejano al observador. La arista **1-16** es invisible, por ser una arista lejana al observador y se encuentra dentro del contorno de la proyección. El vértice **16** es invisible, se encuentra dentro del contorno de la proyección, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **16-13** y **14-15**.
4. Para completar la visibilidad de todas las aristas en los planos de proyección **"H"** y **"1"**, se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

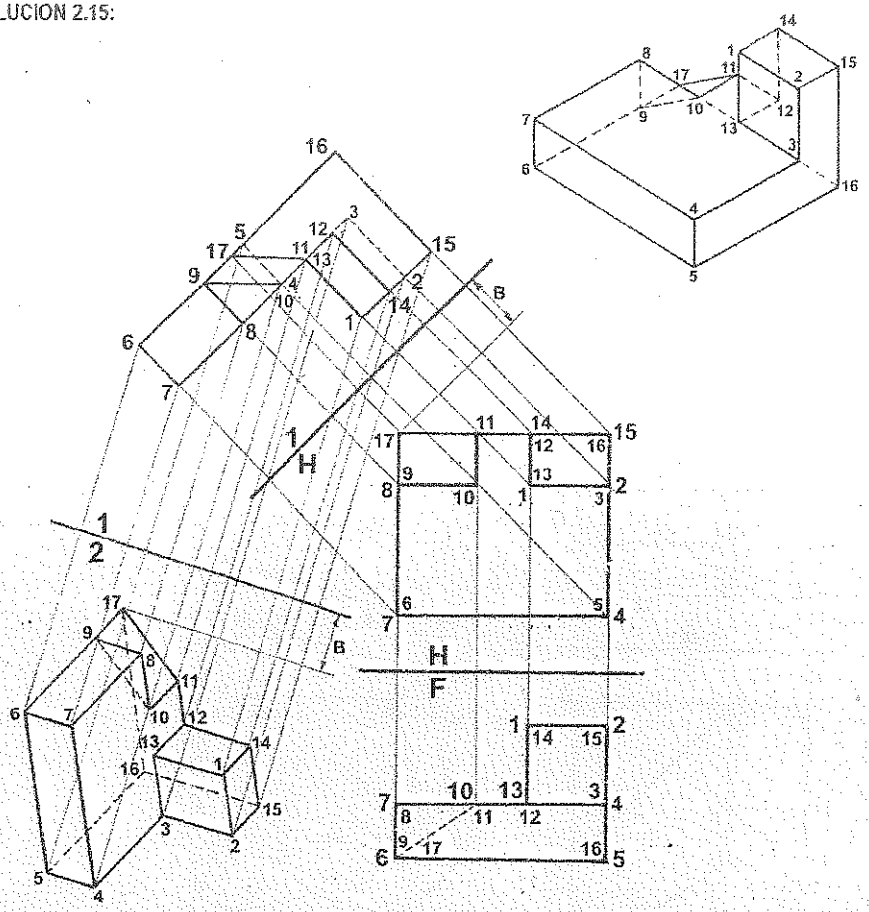
SOLUCION 2.14:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número; teniendo en cuenta las que se han asignado en el isométrico.
2. Se halla el plano de elevación "1", trasladando para cada vértice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán todos estos puntos por rectas y observando en el isométrico la correlación de estos. **VISIBILIDAD:** La arista **14-15** es la más cercana al observador, por lo tanto será visible esta arista. El vértice **14** es visible, luego serán visibles todas las aristas que partan de él; tales como: **14-15** y **14-17**. La arista **1-7** es la más lejana al observador, y en el plano de elevación será invisible. El vértice 3 es invisible, por ser una arista alejada del observador, en el plano de elevación se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de este vértice; tales como: **3 – 2, 3-4** y **3 - 10**.
3. Se halla el plano auxiliar "2", trasladando para cada vértice, sus distancias hacia al plano de elevación, tal como "B"; luego se unirán todos estos puntos por rectas. **VISIBILIDAD:** El vértice 5 es visible por ser el más cercano al observador, por lo tanto, todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **5-4, 5-6** y **5-12**. El vértice **16** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **16-7, 16-15** y **16-17**.
4. Para completar la visibilidad de todas las aristas en los planos de proyección **"1"** y **"2"**, se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

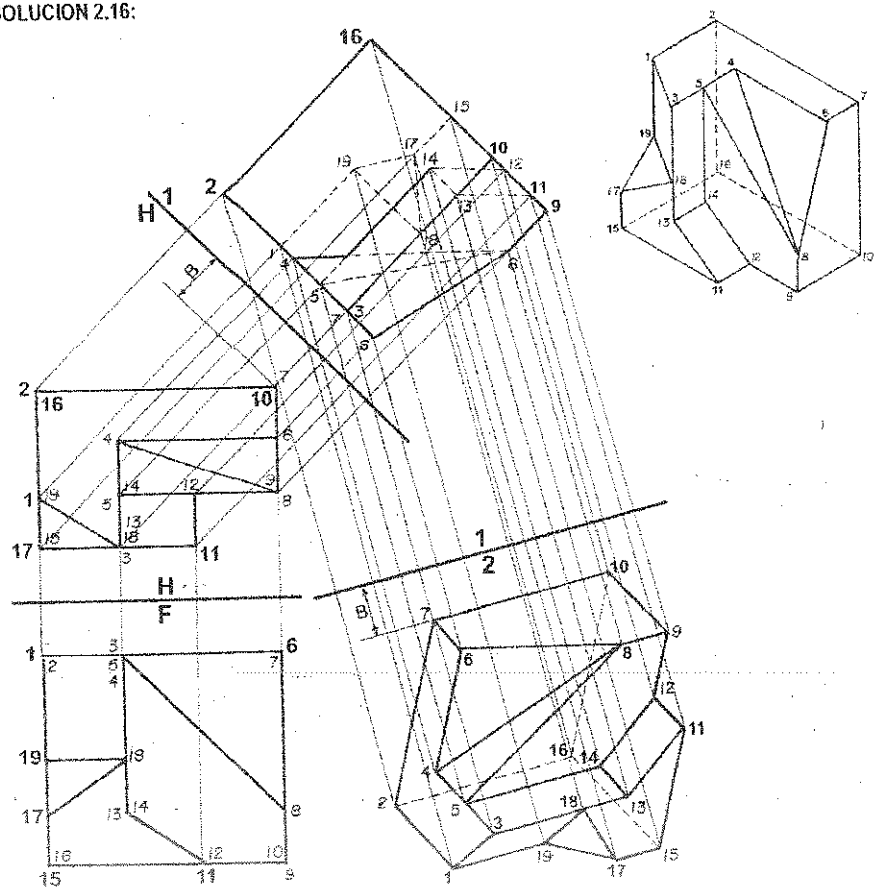
SOLUCION 2.15:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número; teniendo en cuenta las que se han asignado en el isométrico.
2. Se halla el plano de elevación "1", trasladando para cada vértice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán todos estos puntos por rectas y observando en el isométrico la correlación de estos. **VISIBILIDAD:** El vértice **17** será visible por ser la más cercana al observador, por lo tanto serán visible todas las aristas que partan de él; tales como: **17-9, 17-11** y **17-16.** La arista **4-5** es la más lejana al observador, y en el plano de elevación será invisible.
3. Se halla el plano auxiliar "2", trasladando para cada vértice, sus distancias hacia al plano de elevación, tal como "B", luego se unirán todos estos puntos por rectas según el isométrico. **VISIBILIDAD:** El vértice **7** es visible por ser el más cercano al observador, por lo tanto, todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **7-4, 7-6** y **7-8.** El vértice **16** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **16-5, 16-15** y **16-17.**
4. Para completar la visibilidad de todas las aristas en los planos de proyección "1" y "2", se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

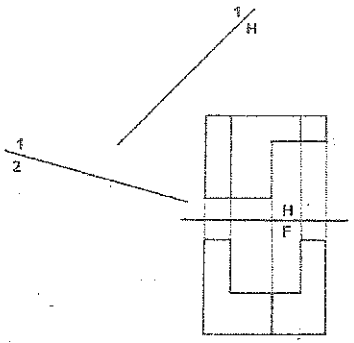
SOLUCION 2.16:



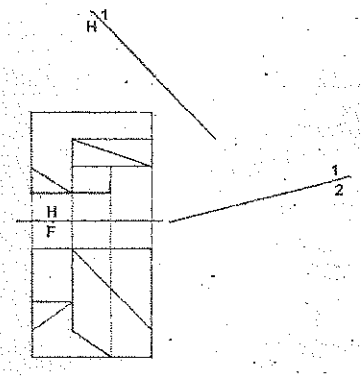
PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número; teniendo en cuenta las que se han asignado en el isométrico.
2. Se halla el plano de elevación "1", trasladando para cada vértice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán todos estos puntos por rectas y observando en el isométrico la correlación de estos. **VISIBILIDAD:** La arista **7-10** será visible por ser la más cercana al observador. La arista **15-17** es la más lejana al observador, y en el plano de elevación será invisible. El vértice **17** está dentro del contorno de la proyección, por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de ese vértice tales como **17-18** y **17-19**.
3. Se halla el plano auxiliar "2", trasladando para cada vértice, sus distancias hacia al plano de elevación, tal como "B"; luego se unirán todos estos puntos por rectas según el isométrico. **VISIBILIDAD:** El vértice **6** es visible por ser el más cercano al observador, por lo tanto, todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **6-4, 6-7 y 6-8.** El vértice **16** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **16-2, 16-10 y 16-15.**
4. Para completar la visibilidad de todas las aristas en los planos de proyección "1" y "2", se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

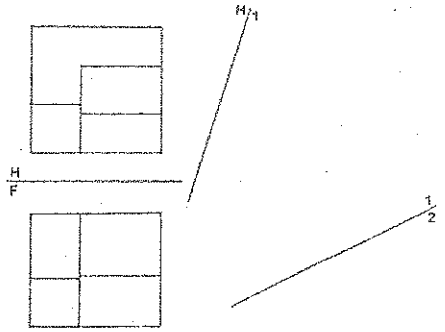
PROBLEMA 2.17: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



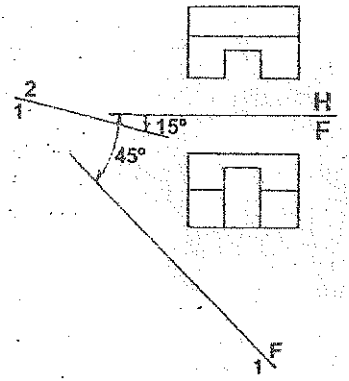
PROBLEMA 2.18: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



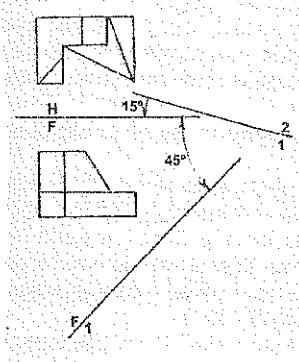
PROBLEMA 2.19: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



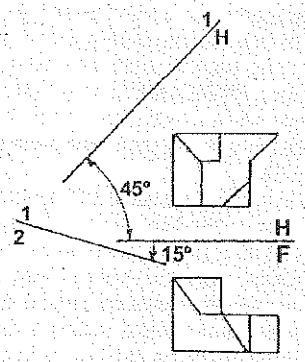
PROBLEMA 2.20: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones F / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



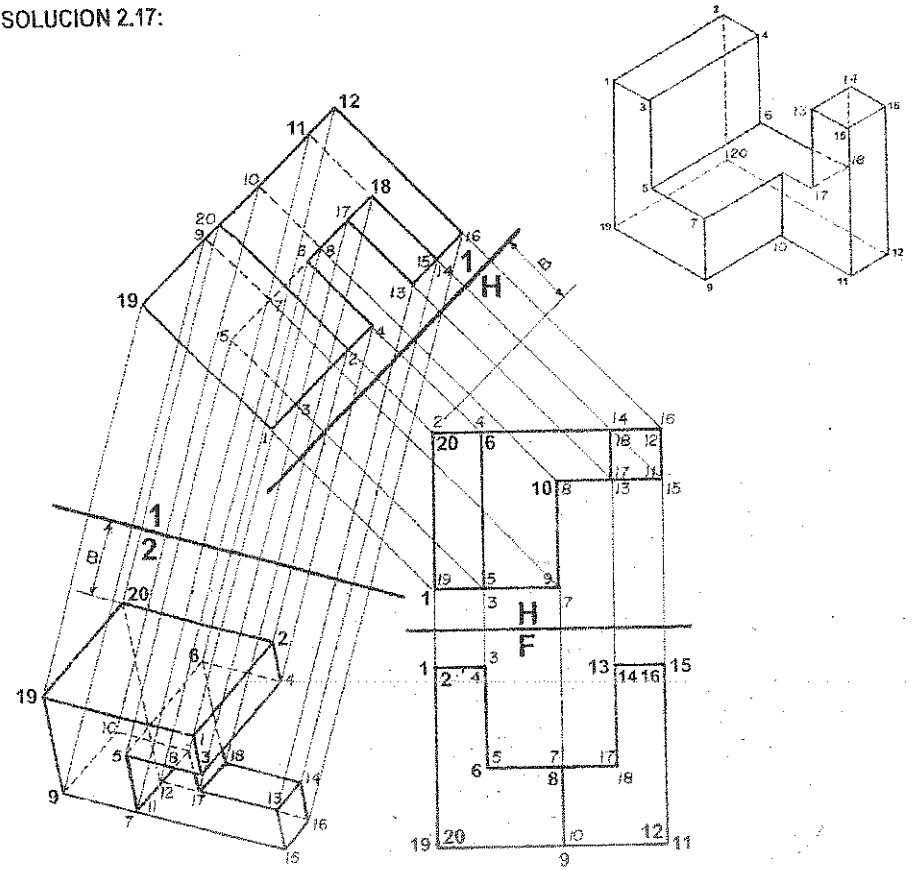
PROBLEMA 2.21: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones F / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



PROBLEMA 2.22: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



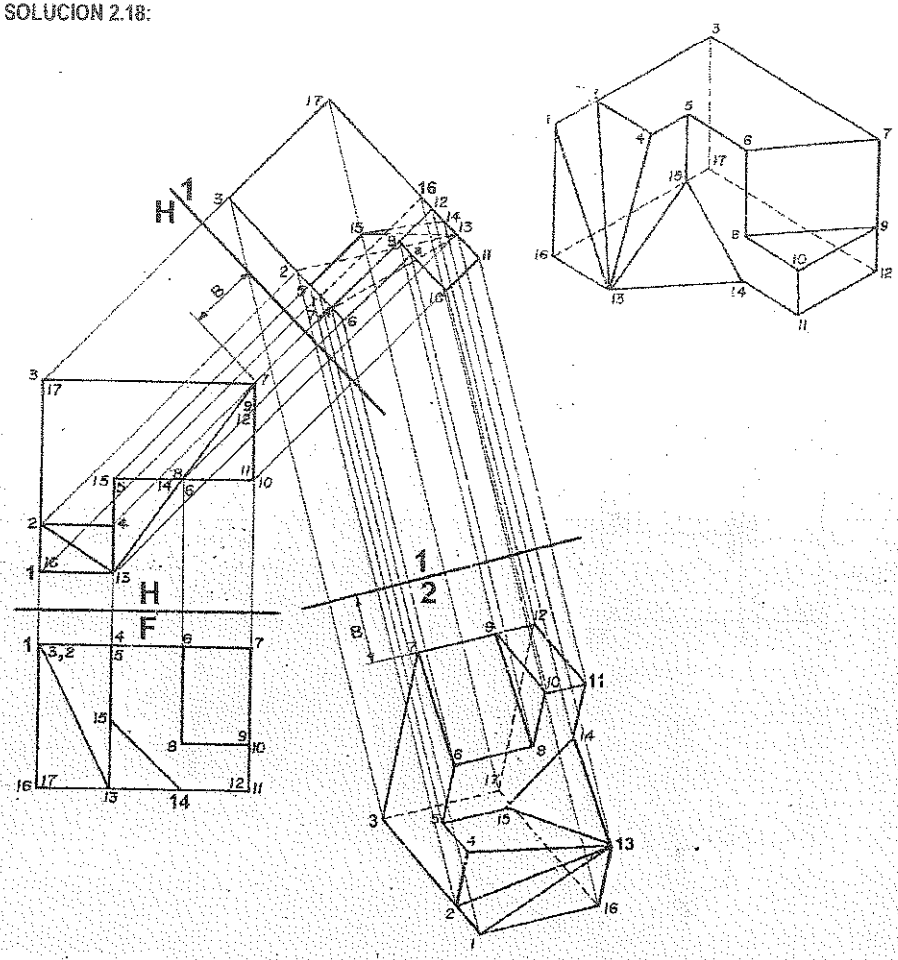
SOLUCION 2.17:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número; teniendo en cuenta las que se han asignado en el isométrico.
2. Se halla el plano de elevación "1", trasladando para cada vértice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán todos estos puntos por rectas y observando en el isométrico la correlación de estos. **VISIBILIDAD:** La arista **2-20** será visible por ser la más cercana al observador. La arista 9-7 es la más lejana al observador, y en el plano de elevación será invisible. El vértice 7 está dentro del contorno de la proyección, por lo tanto serán invisibles todas las aristas que partan de ese vértice tales como 7-5 y 7-8.
3. Se halla el plano auxiliar "2", trasladando para cada vértice, sus distancias hacia al plano de elevación, tal como "B"; luego se unirán todos estos puntos por rectas según el isométrico. **VISIBILIDAD:** El vértice **1** es visible por ser el más cercano al observador, por lo tanto, todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **1-2, 1-3 y 1-19.** El vértice **12** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **12-11, 12-16 y 12-20.**
4. Para completar la visibilidad de todas las aristas en los planos de proyección "1" y "2", se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

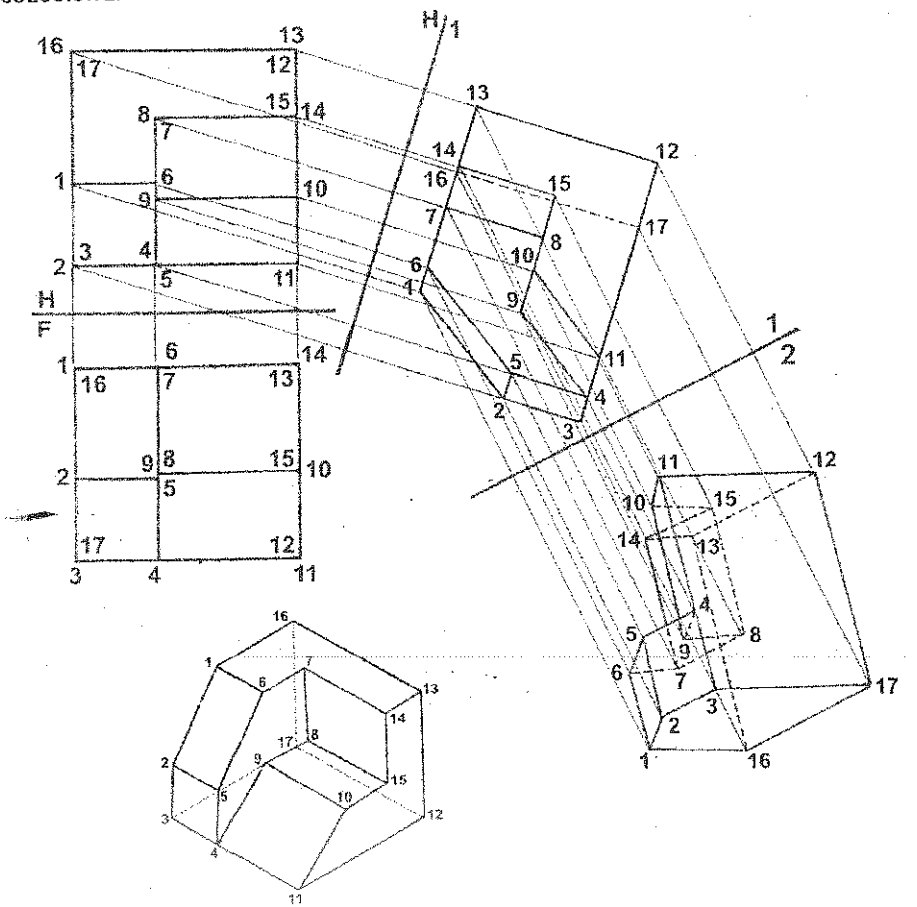
SOLUCION 2.18:



PROCEDIMIENTO:

1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número; teniendo en cuenta las que se han asignado en el isométrico.
2. Se halla el plano de elevación **"1"**, trasladando para cada vèrtice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán todos estos puntos por rectas y observando en el isométrico la correlación de estos. **VISIBILIDAD:** La arista **7-9-12** será visible por ser la más cercana al observador. La arista **1-16** es la más lejana al observador, y en el plano de elevación será invisible.
3. Se halla el plano auxiliar **"2"**, trasladando para cada vértice, sus distancias hacia al plano de elevación, tal como "B"; luego se unirán todos estos puntos por rectas según el isométrico. **VISIBILIDAD:** El vértice **10** es visible por ser el más cercano al observador, por lo tanto, todas las aristas que partan de este vèrtice, tendrán su visibilidad; tales como: **10-8, 10-9** y **10-11.** El vèrtice **17** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible, y todas las aristas que partan de este vèrtice, tendrán su visibilidad; tales como: **17-3, 17-12** y **17-16.**
4. Para completar la visibilidad de todas las aristas en los planos de proyección **"1"** y **"2"**, se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

SOLUCION 2.19:

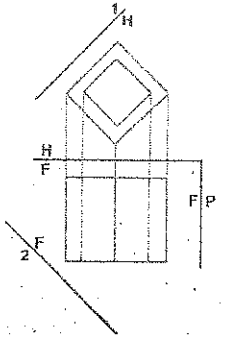


PROCEDIMIENTO:

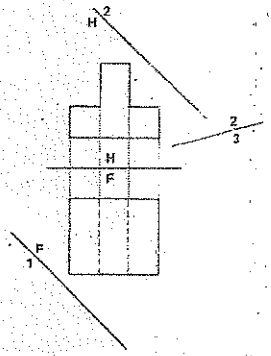
1. En las vistas principales horizontal y frontal, identificamos cada vértice de la proyección del sólido, asignándole un número; teniendo en cuenta las que se han asignado en el isométrico.
2. Se halla el plano de elevación "1", trasladando para cada vértice su cota, obtenida del plano principal frontal; luego se unirán todos estos puntos por rectas y observando en el isométrico la correlación de estos. **VISIBILIDAD:** El vértice **11** será visible por ser el más cercano al observador; el vértice **10** es otro vértice más cerca al observador, será visible y todas las aristas que partan de él tendrán su visibilidad. La arista **16-17** es la más lejana al observador, y en el plano de elevación será invisible.
3. Se halla el plano auxiliar "2", trasladando para cada vértice, sus distancias hacia al plano de elevación; luego se unirán todos estos puntos por rectas según el isométrico. **VISIBILIDAD:** El vértice **3** es visible por ser el más cercano al observador, por lo tanto, todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **3-2, 3-4** y **3-17**. El vértice **13** es el más lejano al observador, se encuentra dentro del contorno de la proyección, por lo tanto será invisible, y todas las aristas que partan de este vértice, tendrán su visibilidad; tales como: **13-12, 13-14** y **13-16**.
4. Para completar la visibilidad de todas las aristas en los planos de proyección **"1"** y **"2"**, se deben tener en cuenta las demás reglas de visibilidad.

PROBLEMAS PROPUESTOS

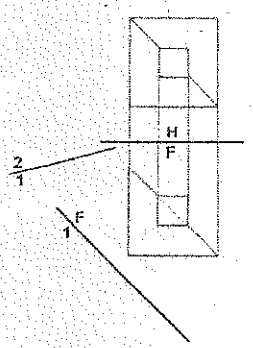
PROBLEMA 2.1: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones P, H / 1, F / 2 y el dibujo isométrico.



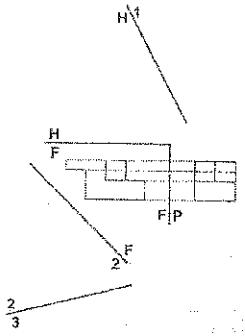
PROBLEMA 2.2: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones F / 1, H / 2, 2 / 3 y el dibujo isométrico.



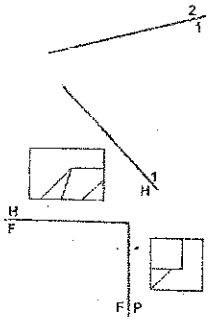
PROBLEMA 2.3: Dado las proyecciones principales H y F de un sólido, hallar las proyecciones F / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



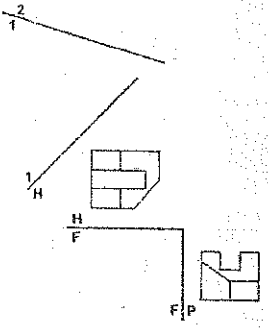
PROBLEMA 2.4: Dado las proyecciones principales F y P de un sólido, hallar las proyecciones H / 1, F / 2, 2 / 3 y el dibujo isométrico.



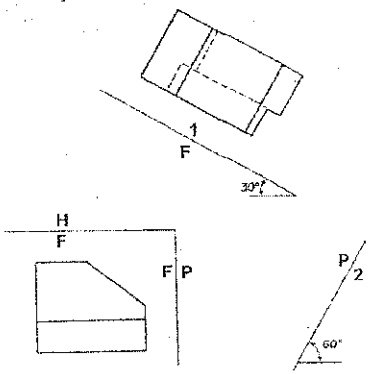
PROBLEMA 2.5: Dado las proyecciones principales H y P de un sólido, hallar las proyecciones F, H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



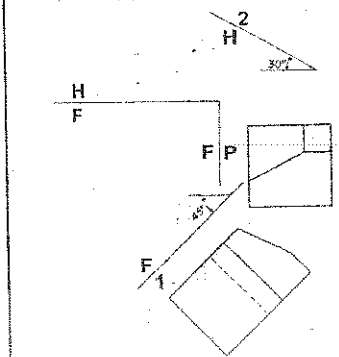
PROBLEMA 2.6: Dado las proyecciones principales H y P de un sólido, hallar las proyecciones F, H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



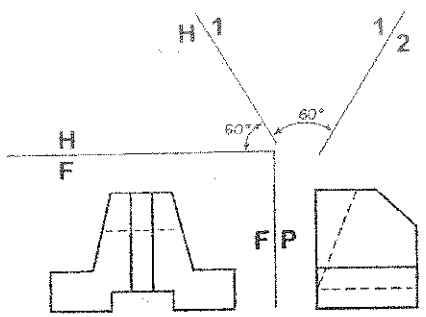
PROBLEMA 2.7: Dado la proyección frontal F y la vista auxiliar F / 1, hallar las proyecciones H, P, P / 2 y el dibujo isométrico.



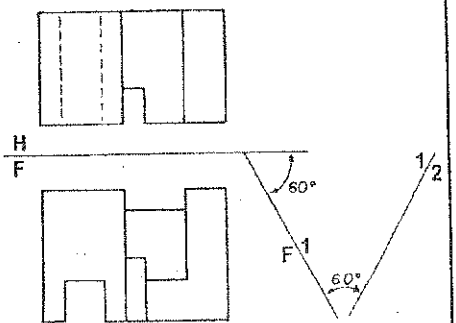
PROBLEMA 2.8: Dado la proyección de perfil P y la vista auxiliar F / 1, hallar las proyecciones H, F, H / 2 y el dibujo isométrico.



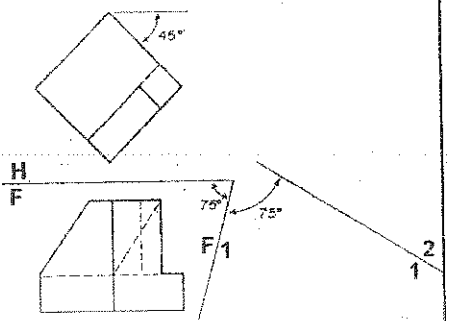
PROBLEMA 2.9: Dadas las proyecciones principales F y P, hallar las proyecciones H, H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



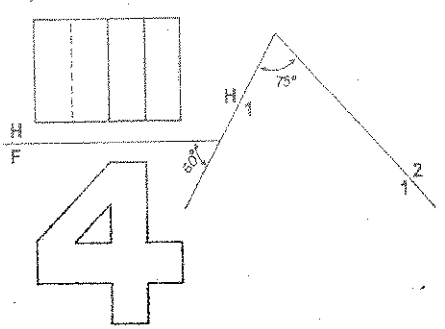
PROBLEMA 2.10: Dadas las proyecciones principales H y F, hallar las proyecciones F / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



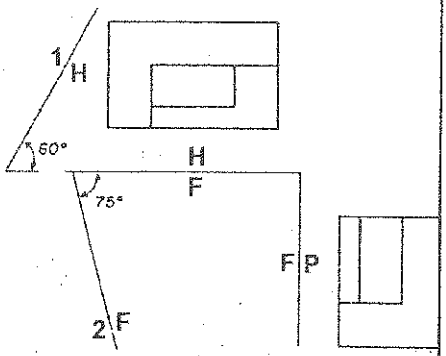
PROBLEMA 2.11: Dadas las proyecciones principales H y F, hallar las proyecciones F / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



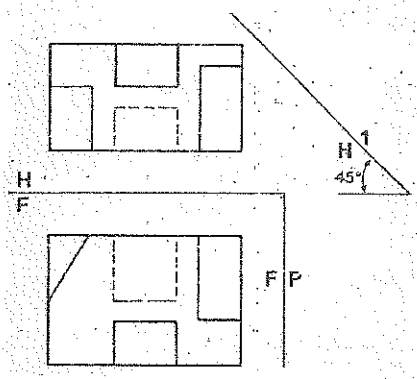
PROBLEMA 2.12: Dadas las proyecciones principales H y F, hallar las proyecciones H / 1, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



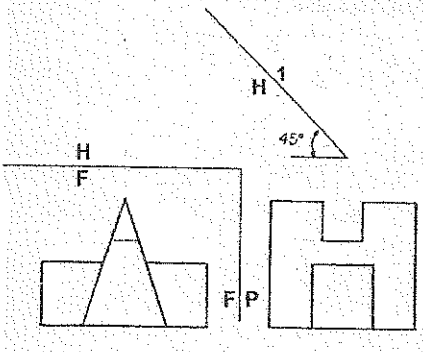
PROBLEMA 2.13: Dadas las proyecciones principales H y P, hallar las proyecciones F, H / 1, F / 2 y el dibujo isométrico.



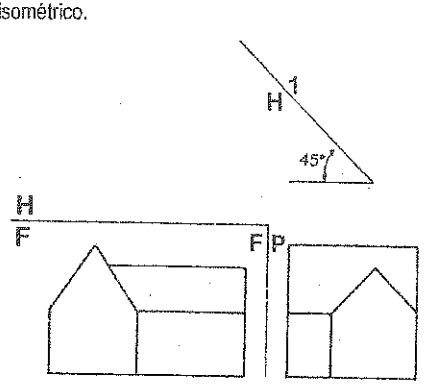
PROBLEMA 2.14: Dadas las proyecciones principales H y F, hallar las proyecciones P, H / 1 y el dibujo isométrico.



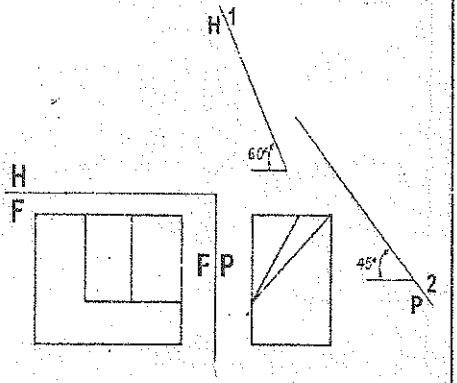
PROBLEMA 2.15: Dadas las proyecciones principales F y P, hallar las proyecciones H, H / 1 y el dibujo isométrico.



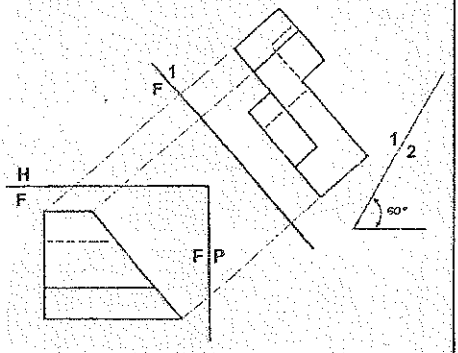
PROBLEMA 2.16: Dadas las proyecciones principales F y P, hallar las proyecciones H, H / 1 y el dibujo isométrico.



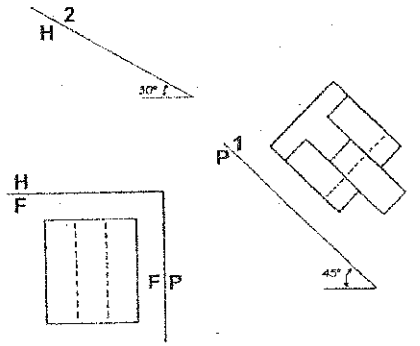
PROBLEMA 2.17: Dadas las proyecciones principales F y P, hallar las proyecciones H, H / 1, P / 2 y el dibujo isométrico.



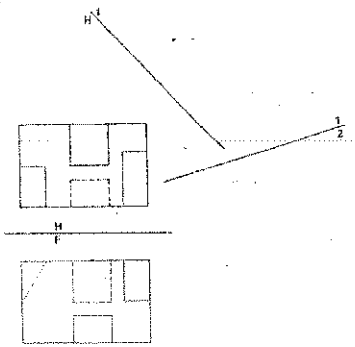
PROBLEMA 2.18: Dadas las proyecciones frontal F y F / 1, hallar las proyecciones H, P, 1 / 2 y el dibujo isométrico.



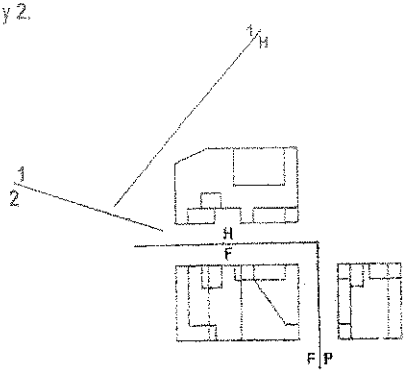
PROBLEMA 2.19: Dadas las proyecciones frontal F y P / 1, hallar las proyecciones H, P, H / 2 y el dibujo isométrico.



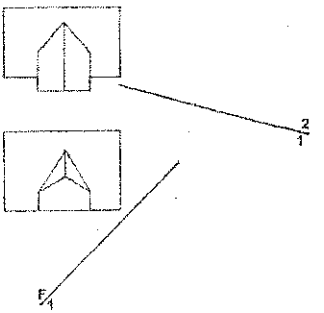
PROBLEMA 2.20: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



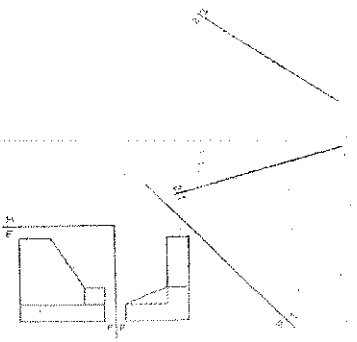
PROBLEMA 2.21: Dadas las vistas principales H, F y P, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



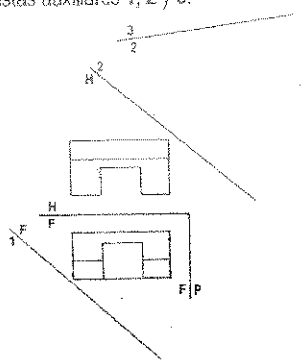
PROBLEMA 2.22: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares1 y 2.



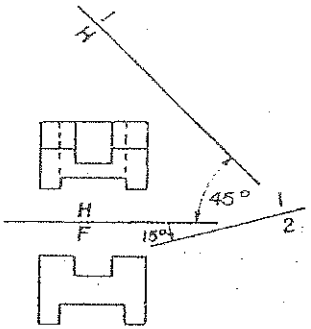
PROBLEMA 2.23: Dadas las vistas principales F y P, hallar el dibujo isométrico, la vista principal H y las vistas auxiliares 1, 2 y 3.



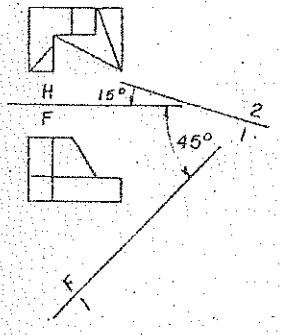
PROBLEMA 2.24: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico, la vista principal P y las vistas auxiliares 1, 2 y 3.



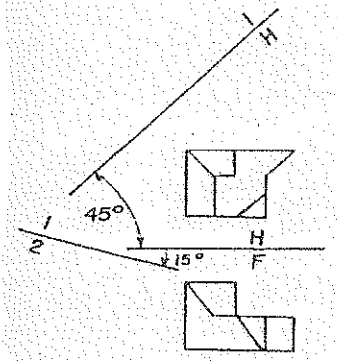
PROBLEMA 2.25: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



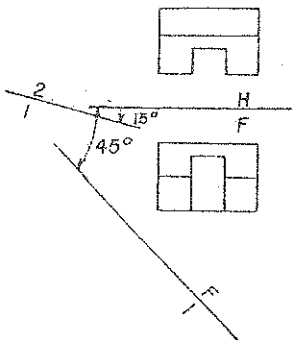
PROBLEMA 2.26: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



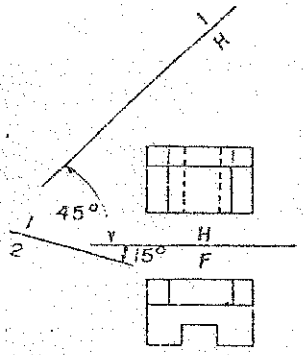
PROBLEMA 2.27: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



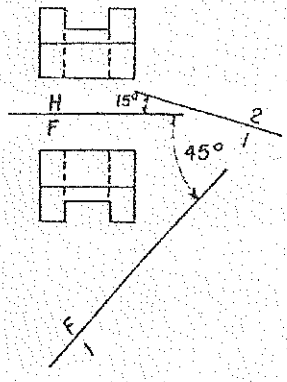
PROBLEMA 2.28: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



PROBLEMA 2.29: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



PROBLEMA 2.30: Dadas las vistas principales H y F, hallar el dibujo isométrico y las vistas auxiliares 1 y 2.



CAPITULO 3:

LA RECTA

3.1 POSICION NO PARTICULAR DE UNA RECTA EN EL ESPACIO.

Una recta oblicua es aquella que no es paralela, ni perpendicular a ningún plano principal de proyección. En la figura 3.1 tenemos la recta oblicua AB situada en el tercer cuadrante, formado por los planos principales de proyección: horizontal, frontal y de perfil; que mediante líneas de proyección obtenemos las proyecciones principales de la recta sobre dichos planos. Luego realizamos el desdoblamiento de los planos principales horizontal y de perfil, alrededor del plano frontal; de tal forma de que estos tres planos principales están en un mismo plano, es decir, obtenemos el depurado.

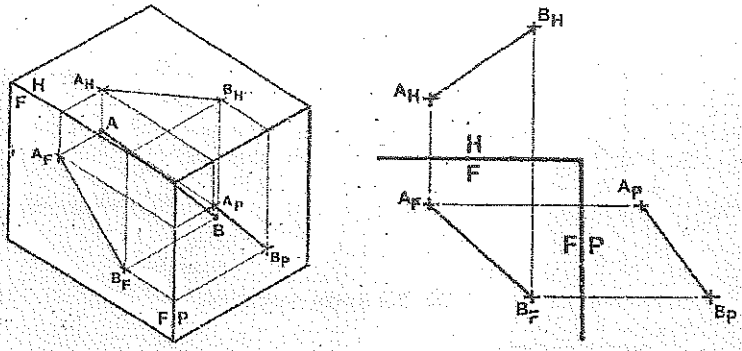


Fig. 3.1 Planos principales de una recta.

3.2 POSICIONES PARTICULARES DE UNA RECTA EN EL ESPACIO.

Es la posición que adopta una recta de ser paralela o perpendicular a un plano principal de proyección. En ambas posiciones la recta se proyecta en dimensión verdadera en uno de los planos principales.

a) **CON RESPECTO AL PARALELISMO:** Una recta al proyectarse paralela a un plano de proyección principal, se proyectará sobre el en dimensión verdadera. Como son tres los planos principales, se tienen tres tipos de rectas:

1. Recta Horizontal (recta o línea de nivel)
2. Recta Frontal.
3. Recta de Perfil.

b) **CON RESPECTO A LA PERPENDICULARIDAD:** Una recta en dimensión verdadera al ser perpendicular a un plano de proyección principal, se proyectará sobre él de punta (como un punto). Como son tres los planos, se tienen tres casos:

1. Recta Vertical.
2. Recta Normal (Ortofrontal).
3. Recta Horizontal – Frontal (Ortoperfil).

3.2.1 CON RESPECTO AL PARALELISMO.

Una recta al ser paralela a un plano principal de proyección, se proyectará sobre él, en dimensión verdadera.

1. RECTA HORIZONTAL.

Es aquella recta que es paralela al plano principal horizontal, proyectándose sobre él en dimensión verdadera, tal como se muestra en la figura 3.2.

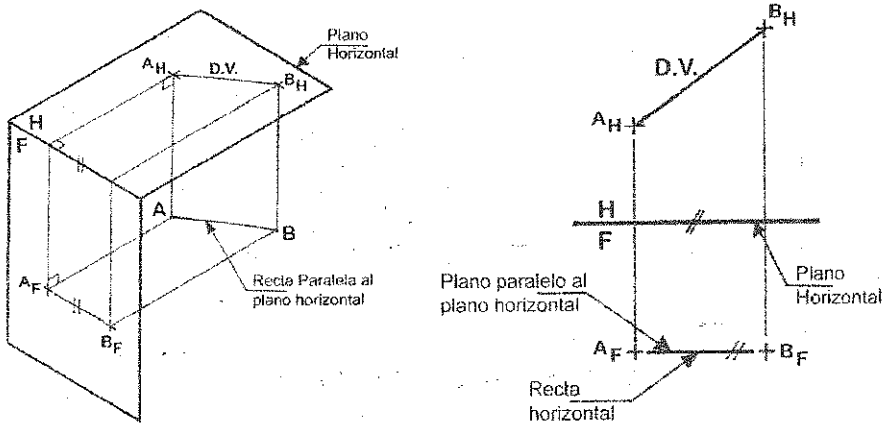


Fig. 3.2 Recta horizontal.

2. RECTA FRONTAL.

Es aquella recta que es paralela al plano principal frontal, proyectándose sobre él en dimensión verdadera; tal como se muestra en la figura 3.3.

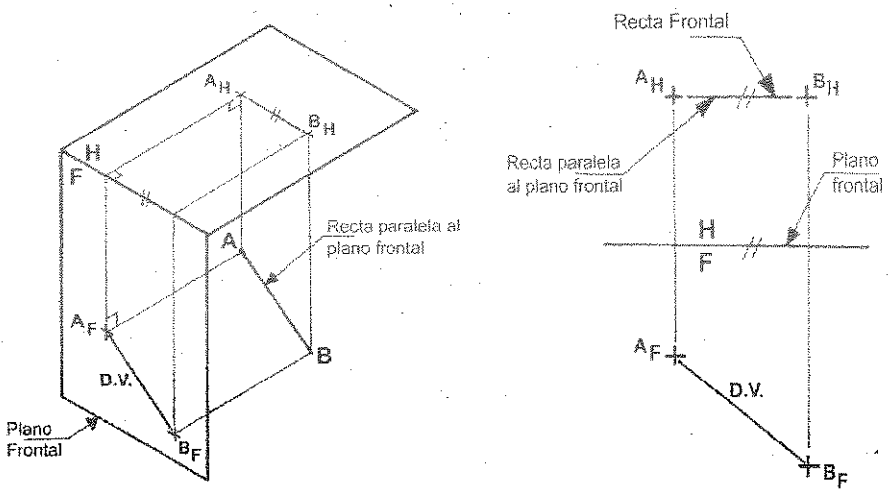


Fig. 3.3 Recta frontal.

3. RECTA DE PERFIL.

Es aquella recta que es paralela al plano principal de perfil, proyectándose sobre él en dimensión verdadera; tal como se muestra en la figura 3.4.

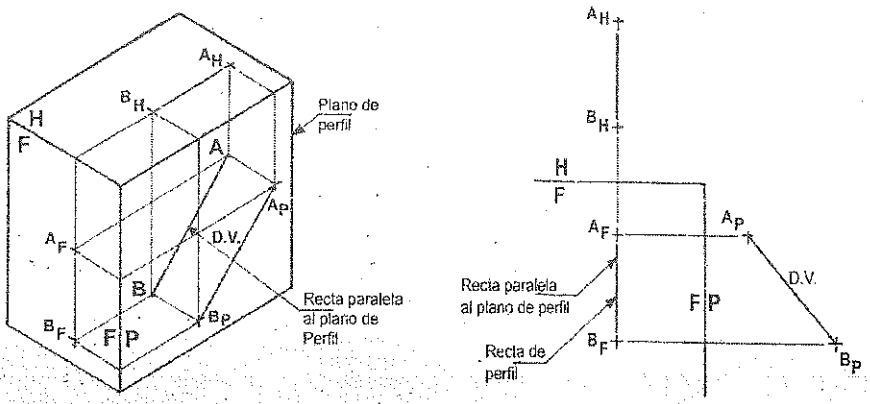


Fig. 3.4 Recta de Perfil.

3.2.2 CON RESPECTO A LA PERPENDICULARIDAD.

Una recta en dimensión verdadera, al ser perpendicular a un plano principal de proyección, se proyectará sobre él de punta.

1. RECTA VERTICAL.

Es una recta en dimensión verdadera, que es perpendicular al plano principal horizontal, proyectándose de punta sobre él; tal como se muestra en la figura 3.5.

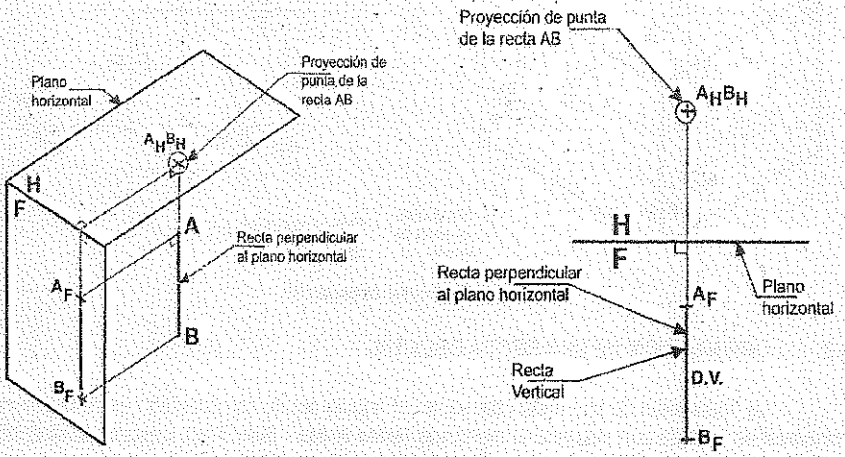


Fig. 3.5 Recta vertical.

2. RECTA NORMAL (ORTOFRONTAL).

Es una recta en dimensión verdadera, que es perpendicular al plano principal frontal, proyectándose de punta sobre él; tal como se muestra en la figura **3.6**.

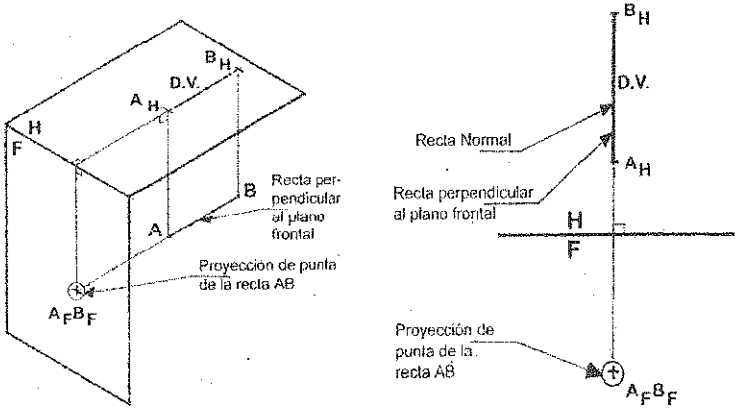


Fig. 3.6 Recta normal.

3. RECTA HORIZONTAL – FRONTAL (ORTOPERFIL).

Es una recta en dimensión verdadera, que es perpendicular al plano principal de perfil, proyectándose de punta sobre él; tal como se muestra en la figura **3.7**.

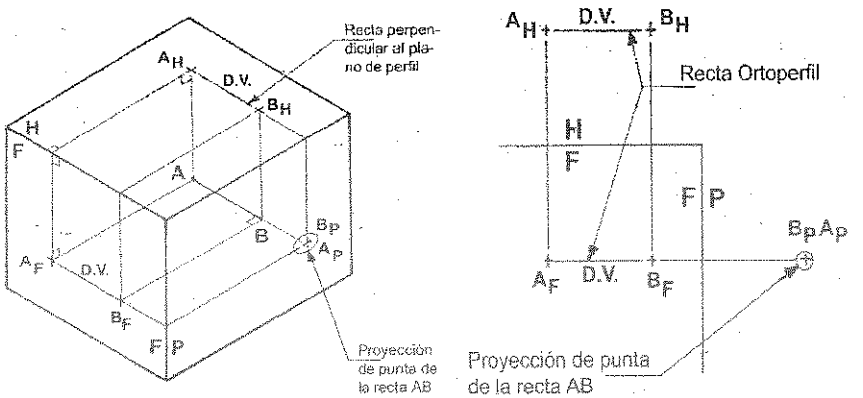


Fig. 3.7 Recta ortoperfil.

3.3 ORIENTACIÓN DE UNA RECTA OBLICUA.

La orientación de una recta oblicua, es el ángulo agudo comprendido entre la proyección horizontal de la recta con respecto al meridiano (***línea Norte - Sur***). Para describir la dirección de una recta sobre la superficie de la tierra, se utiliza el término de ***Rumbo***; que se expresa en grados y se dice primero **N** o **S** y luego **E** u **O**; tal como se observa en la figura **3.8**.

En la figura 3.8 muestra a la recta AB, que supone A hacia B, tiene una orientación de Sβ°E; de igual manera la recta BA, B hacia A, tiene una orientación de Nβ°E. Para ambos casos observamos que el ángulo β° (se acostumbra especificar este ángulo menor a 90°) es común en la dirección de la recta AB o BA, y se elige el sur o el norte, según la dirección de base, variando los puntos cardinales.

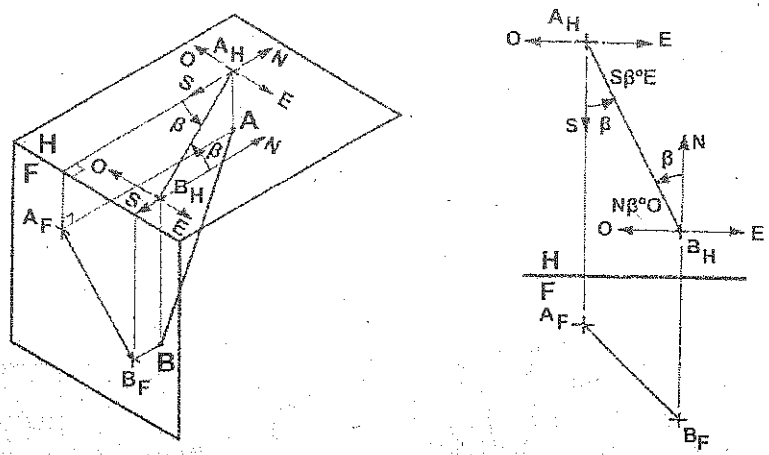


Fig. 3.8 Orientación de una recta.

3.4 DIMENSION VERDADERA DE UNA RECTA OBLICUA.

Una recta oblicua que sea paralela a un plano de proyección, será proyectada sobre este plano en dimensión verdadera. Para hallar esta dimensión verdadera se utiliza los métodos siguientes:

1. Con vista auxiliar.
2. Por diferencia de cotas.

En la figura 3.9 se dan las proyecciones principales horizontal y frontal de una recta oblicua AB, que no es paralela a los planos principales; se desea determinar la dimensión verdadera de dicha recta oblicua.

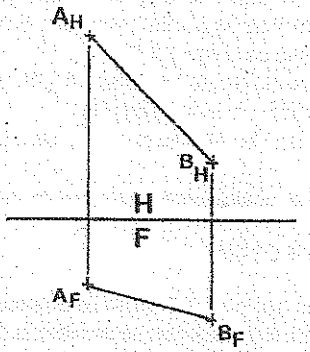


Fig. 3.9 Proyecciones principales de una recta.

3.4.1 CON VISTA AUXILIAR.

Este método consiste que para determinar la dimensión verdadera de una recta oblicua es necesario utilizar un plano auxiliar, paralelo a la proyección oblicua de la recta; tal como se observa en la figura 3.10.

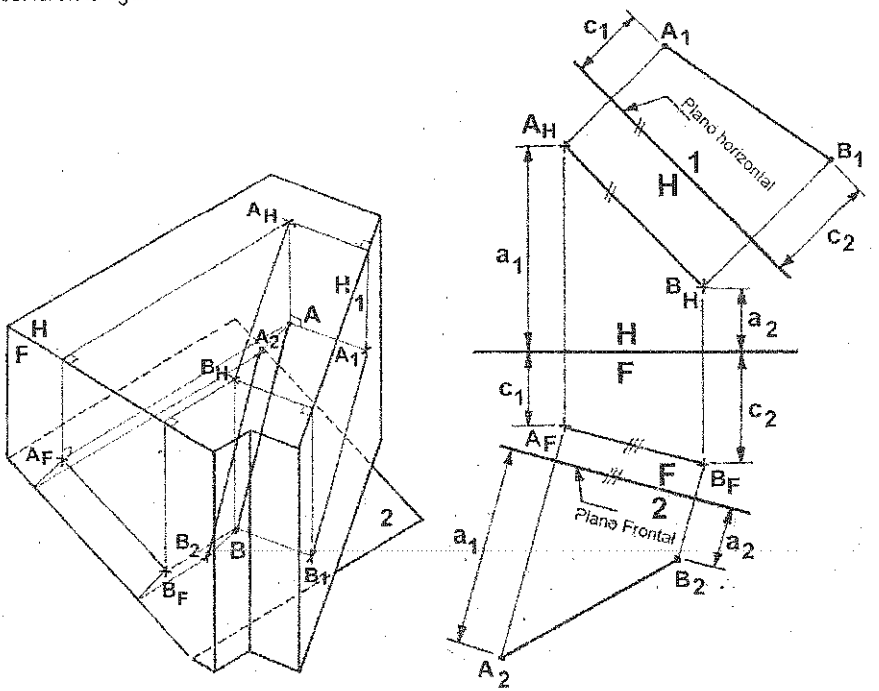


Fig. 3.10 Dimensión verdadera de una recta oblicua.

PROCEDIMIENTO:

1. Trazar un plano auxiliar, paralelo a la proyección horizontal o frontal respectivamente de la recta AB; este plano de proyección auxiliar puede ser, el plano de elevación H1 o el plano de inclinación; como se observa en la figura 3.10.
2. Trazar las líneas de referencia desde los puntos A y B, perpendicular y hacia los planos de proyección de elevación (H1) o de inclinación (F2).
3. Trasladar cotas para el plano de elevación "1", y alejamientos para el plano de inclinación "2".
4. Unimos los puntos hallados, obteniéndose la dimensión verdadera de la recta oblicua.

3.4.2 POR DIFERENCIA DE COTAS.

Este método consiste que para determinar la dimensión verdadera de una recta oblicua, no es necesario utilizar ningún plano auxiliar; se requiere la distancia horizontal entre estos dos puntos y su diferencia de cotas. En la figura 3.11 se observa las vistas principales de una recta oblicua.

PROCEDIMIENTO:

1. Trazamos una recta horizontal, como se observa en la figura 3.11, y asumimos un punto de la proyección horizontal de la recta oblicua AB dada; tal como A_H.
2. En la vista horizontal, medimos la distancia d_H^{AB}, que equidista el punto B_H de A_H. En la recta horizontal asumida y a partir de A_H, trasladamos la distancia "d_H^{AB}", hallándose el punto B_H.
3. Desde A_H o B_H, trazamos una perpendicular (seleccionamos en este caso el punto B_H); y medimos en ella la diferencia de cota "d_c^{AB}", obtenida de la proyección frontal de la recta AB; hallándose el punto B de elevación.
4. Luego unimos A_H con B_1, formándose un triángulo rectángulo, en donde hallamos la dimensión verdadera de la recta oblicua AB.

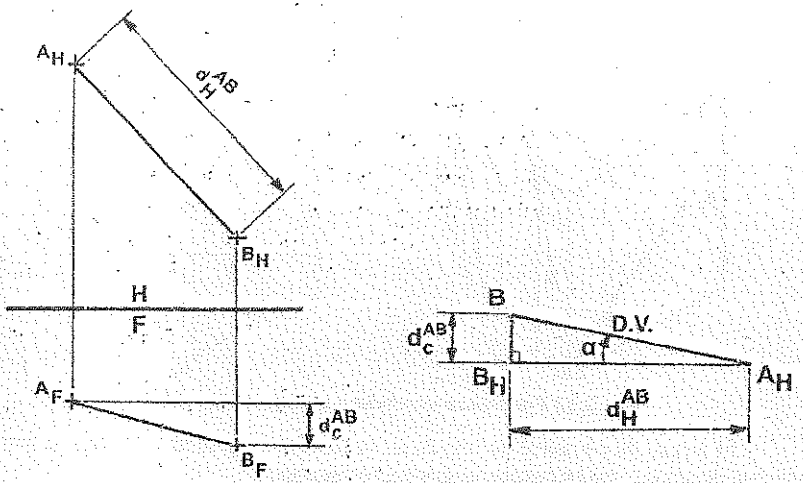


Fig. 3.11 Método por diferencia de cotas.

3.5 PENDIENTE VERDADERA DE UNA RECTA.

Es el ángulo comprendido entre una recta oblicua proyectada en dimensión verdadera con respecto a un plano horizontal; tal como se observa en la figura 3.12. En la figura 3.10, se puede observar que la pendiente verdadera de una recta oblicua, sólo se puede obtener, en el plano de elevación, ya que en este plano de proyección cumple la definición de pendiente verdadera.

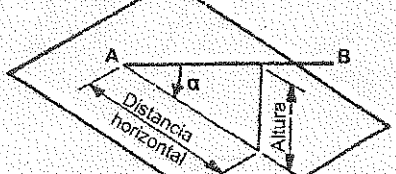


Fig. 3.12 Pendiente de una recta.

En la figura **3.13** se dan las proyecciones principales horizontal y frontal de una recta oblicua **AB**; se desea determinar su pendiente verdadera.

PROCEDIMIENTO:

1. Determinar en un plano de elevación la dimensión verdadera de la recta oblicua **AB**, tal como se observa en la figura **3.13**.
2. Desde los extremos A_1 y B_1, trazamos una recta paralela al plano horizontal, siendo estas rectas planos horizontales.
3. El ángulo comprendido entre la recta en dimensión verdadera con el plano horizontal trazado, representa la pendiente verdadera de la recta oblicua.

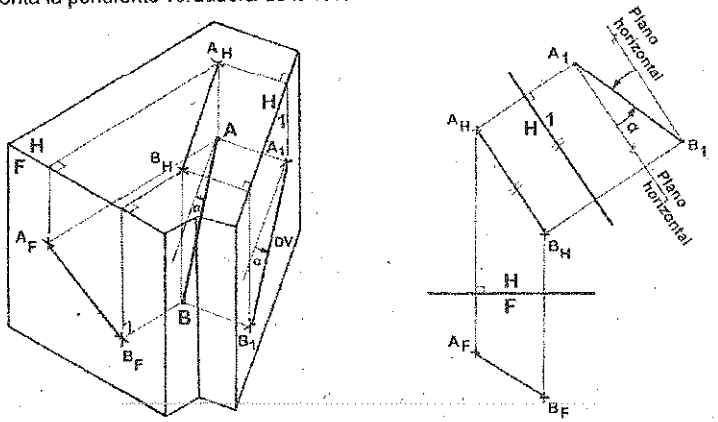


Fig. 3.13 Pendiente verdadera de una recta oblicua.

El ángulo de pendiente de una recta, se expresa en grados, o también e términos de porcentaje de grados, que se calcula por la siguiente expresión:

$$\text{Porcentaje de grado} = \frac{\text{Altura vertical}}{\text{Distancia horizontal}} \text{x} 100$$

La figura **3.14** muestra a una recta oblicua **AB**, que tiene una pendiente de **45%**. Igualmente en esta figura se muestra el método para obtener la pendiente de una recta, a partir del plano horizontal y frontal, sin necesidad de un plano auxiliar.

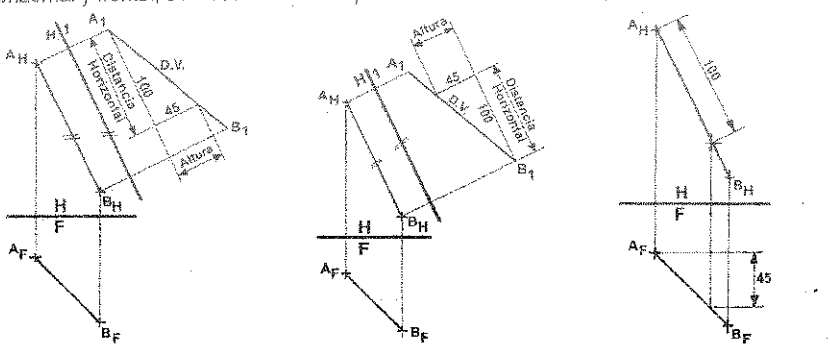


Fig. 3.14 Pendiente en porcentaje de una recta.

La pendiente verdadera, en el caso de una recta frontal, se halla en el plano principal frontal; tal como se muestra en la figura 3.15.

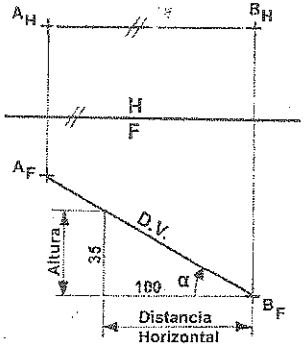


Fig. 3.15 Pendiente verdadera de una recta frontal.

La pendiente de una recta puede ser ascendente o descendente.

1. ASCENDENTE: (Elevación o que sube)
   La pendiente de una recta se dice que es ascendente, cuando se dirige hacia arriba; tal como se observa en el plano de elevación "1" de la figura 3.14, en donde la recta sube de B_1 hacia A_1.

2. DESCENDENTE: (Depresión o que baja)
   La pendiente de una recta se dice que es descendente cuando se dirige hacia abajo; tal como se observa en el plano de elevación "1" de la figura 3.14; en donde la recta baja de A_1 hacia B_1.

3.6 PROYECCION DE PUNTA DE UNA RECTA.

Una recta oblicua se proyecta de punta en un plano de proyección, cuando este plano de proyección sea perpendicular a la dimensión verdadera de dicha recta; tal como se observa en la figura 3.17.

En la figura 3.16, se dan las proyecciones principales horizontal y frontal de una recta oblicua AB; se desea determinar la proyección de punta de dicha recta.

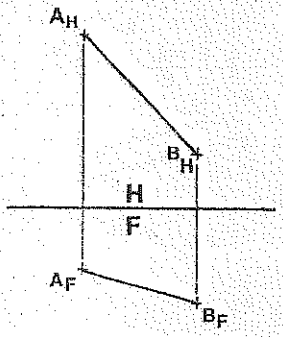


Fig. 3.16 Proyecciones principales de una recta oblicua.

En la figura 3.17 se observa a la recta AB en el espacio, y al plano auxiliar "3" perpendicular a esta recta. Se observa además que el plano auxiliar "3" debe ser perpendicular a la dimensión verdadera de la recta AB, para que se pueda obtener la proyección de punta de esta recta.

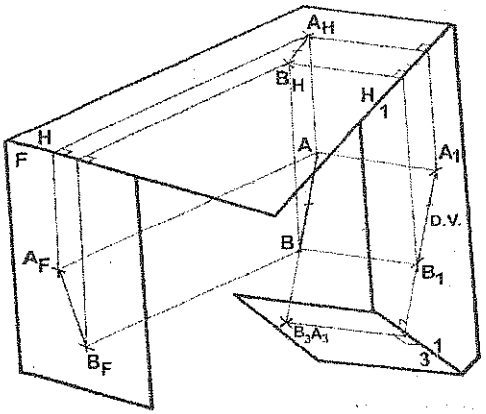


Fig. 3.17 Proyección de punta de una recta oblicua.

PROCEDIMIENTO:

1. Determinar la dimensión verdadera de la recta oblicua AB, trazando un plano de elevación o con un plano de inclinación, paralela a la recta oblicua; tal como se observa en la figura 3.18.
2. Trazar un plano de proyección perpendicular a la dimensión verdadera de la recta oblicua AB; tal como los planos auxiliares 1/3 y 2/4, proyectándose la recta AB de punta en estos planos de proyección.

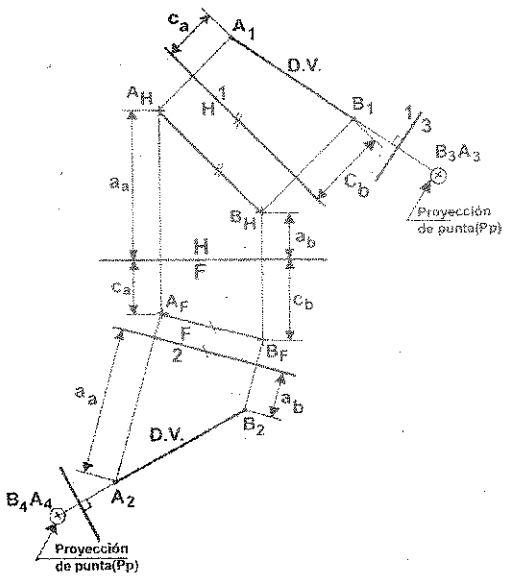


Fig. 3.18 Proyección de punta de una recta oblicua.

3.7 PUNTO CONTENIDO EN UNA RECTA.

Se dice que un punto está contenido en una recta, cuando éste se proyecte contenido en dicha recta en cualquier plano de proyección que pueda trazarse de ella.

En la figura 3.19 se dan tres proyecciones principales de la recta oblicua AB, y la proyección frontal del punto M contenida en dicha recta; se requieren encontrar las proyecciones horizontal y de perfil del punto M.

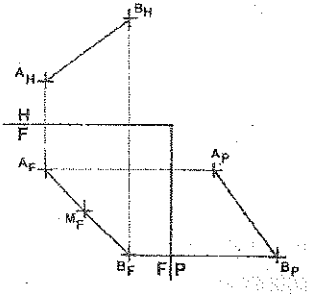


Fig. 3.19 Punto contenido en una recta.

PROCEDIMIENTO:

1. Desde M_F, trazamos las líneas de referencia hacia los planos principales, horizontal y de perfil, tal como se observa en la figura 3.20.
2. Las líneas de referencia trazadas desde M_F, se cortan con la recta AB, determinándose las proyecciones de M_H y M_P respectivamente.

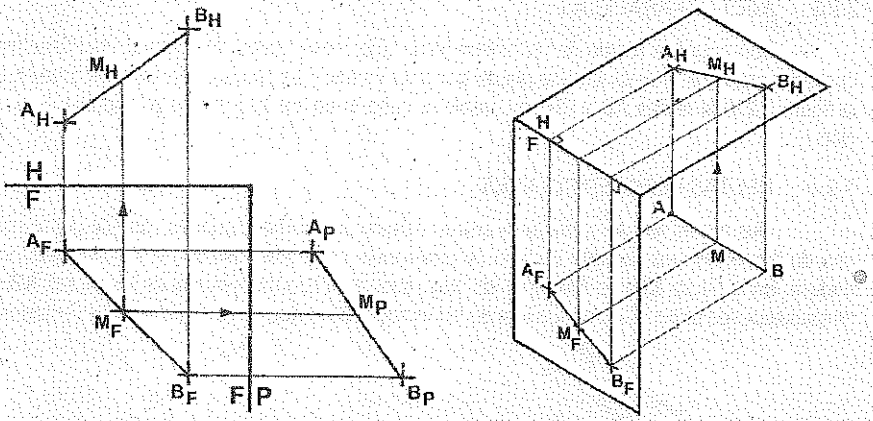


Fig. 3.20 Punto contenido en una recta.

3.8 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO.

Las posiciones relativas de dos rectas, son aquellas que adoptan estas rectas en el espacio, de ser concurrentes (rectas que se cortan), no concurrentes (rectas que se cruzan), paralelas y perpendiculares.

3.8.1 RECTAS QUE SE CORTAN (CONCURRENTES).

Son aquellas rectas coplanares (que pertenecen a un mismo plano) que se cortan, es decir que tienen un punto de intersección común en cualquier plano de proyección que pueda trazarse. En la figura 3.21 el punto P pertenece a las rectas AB y CD.

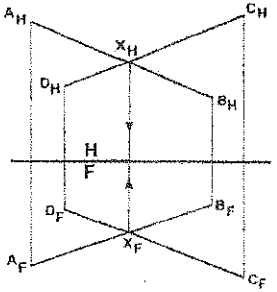


Fig. 3.21 Rectas que se cortan

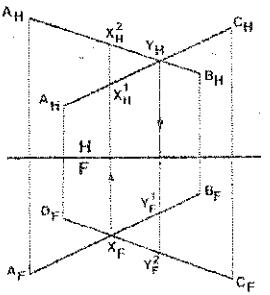


Fig. 3.22 Rectas que se cruzan

3.8.2 RECTAS QUE SE CRUZAN.

Son aquellas rectas no coplanares (no pertenecen a un mismo plano) que no se cortan, es decir que no tienen un punto de intersección en común en cualquier plano de proyección que pueda trazarse. En la figura 3.22 las recta AB y CD en la proyección horizontal aparentemente se cortan en el punto P, pero en la proyección frontal origina dos puntos separados; similarmente en la proyección frontal las rectas aparentemente se cortan en Q, pero en la proyección horizontal origina dos puntos separados.

3.8.3 RECTAS PARALELAS.

Son aquellas rectas de un mismo plano que tienen todos sus puntos equidistantes, en cualquier plano de proyección que pueda trazarse; es decir se proyectarán siempre paralelas. En la figura 3.23 las rectas AB y CD son paralelas entre si en los tres planos principales de proyección.

3.8.4 RECTAS PERPENDICULARES.

Dos rectas que se cortan o se cruzan entre si son perpendiculares, cuando por lo menos, una de las rectas sea paralela al plano de proyección, proyectándose sobre él en dimensión verdadera. En la figura 3.24 se muestran las proyecciones horizontal y frontal de las rectas AB y CD perpendiculares entre si, en donde una de las rectas (AB) se proyecta en dimensión verdadera.

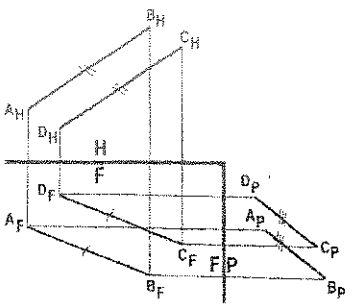


Fig. 3.23 Rectas paralelas.

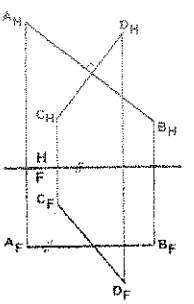
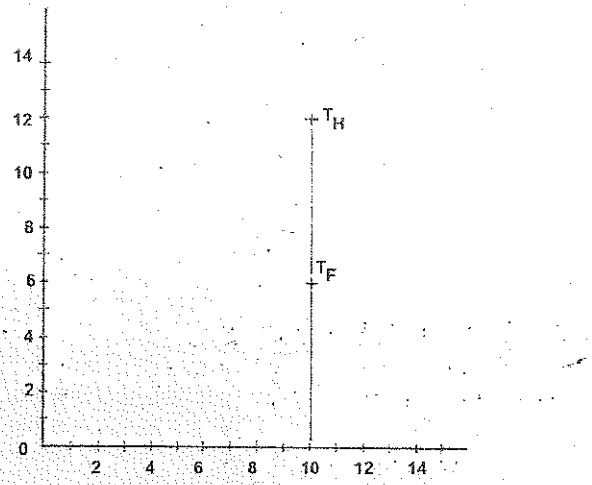


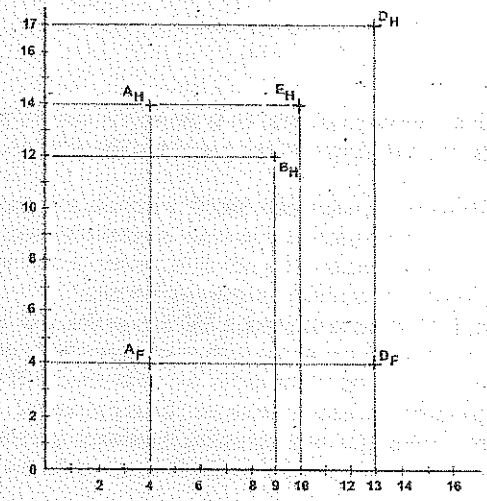
Fig. 3.24 Rectas perpendiculares.

PROBLEMAS RESUELTOS

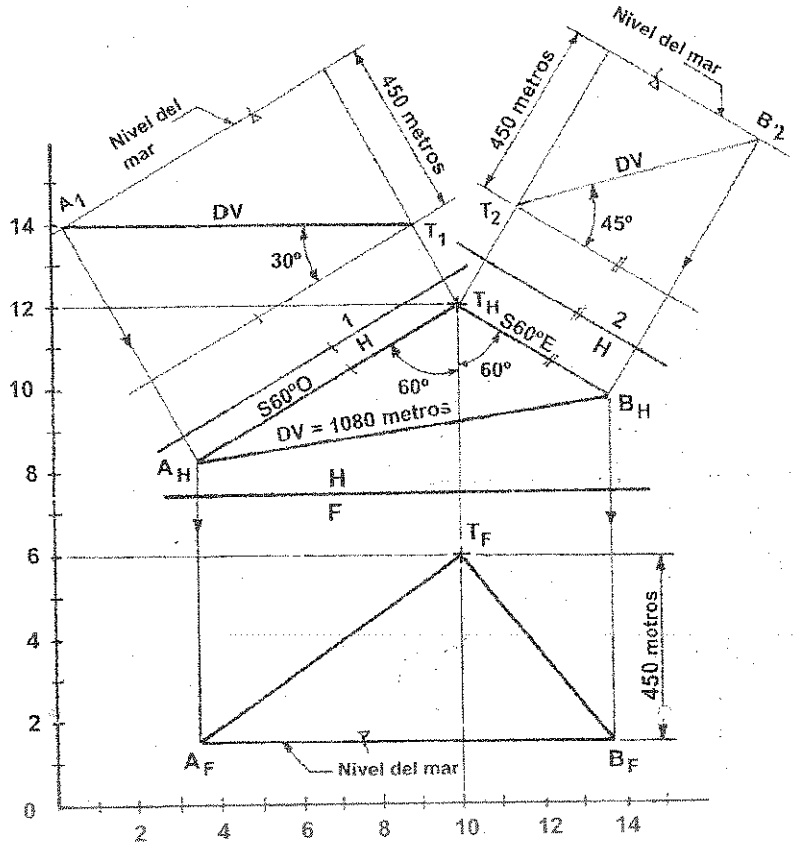
PROBLEMA 3.1: Desde la parte alta de una torre, situada a 450 metros sobre el nivel del mar, se observa con orientación S60°O y con un ángulo de depresión de 30°, la posición de un barco A en el mar. Igualmente se observa desde la torre, con orientación S60°E y con un ángulo de depresión de 45°, la posición en el mar de otro barco B. Hallar las proyecciones horizontal y frontal de los barcos y la distancia que los separa. **ESCALA: 1:12,500. Torre T(10,6,12)**



PROBLEMA 3.2: Un árbol vertical se ve desde los puntos A y D, de las orillas de un lago, según las direcciones AB y DE. La Linea de mira que parte de A, observa la parte mas baja del árbol con un ángulo de elevación de 30°; y la linea de mira que parte de D, observa la parte mas alta del árbol, con un ángulo de elevación de 40°. Localizar las proyecciones del árbol y encontrar su altura. **ESCALA: 1:250**
A(4,4,14), B(9,?,12), D(13,4,17), E(10



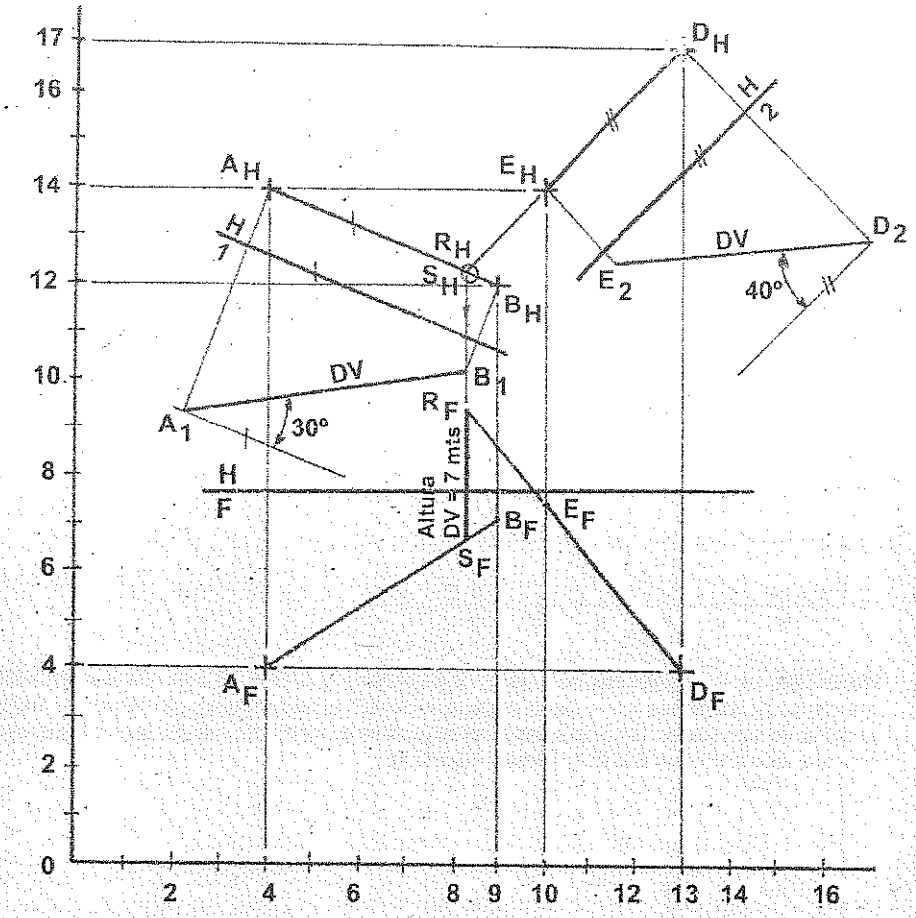
SOLUCIÓN 3.1:



PROCEDIMIENTO:

1. Graficar las coordenadas del punto T en sus vistas principales; en la proyección frontal y por debajo del punto T_F medimos los **450mts.** determinándose el lugar geométrico (lg) del nivel del mar.
2. Desde el punto T en el plano horizontal trazamos la orientación **S60°O**, y paralelo a él, trazamos el plano de elevación "1", en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente de **30°** y el l.g. del nivel del mar, el corte de ambas rectas nos da la posición **A** del barco en el mar, luego completamos la proyección de este punto en sus planos principales.
3. Desde la proyección horizontal del punto T, trazamos la orientación **S60°E** y paralelo a él, trazamos el plano de elevación "2", en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente de **45°** y el l.g. del nivel del mar, el corte de ambas rectas nos da la posición **B** del barco en el mar, luego completamos la proyección de este punto en sus planos principales.
4. Unir los puntos A_H y B_H en sus planos principales, esta recta representa la distancia que separa a los barcos; en el plano horizontal y con la escala **1:12,500** medimos a esta recta, que es una recta horizontal.
5. La distancia obtenida en dimensión verdadera en el plano horizontal es de **1080 metros.**

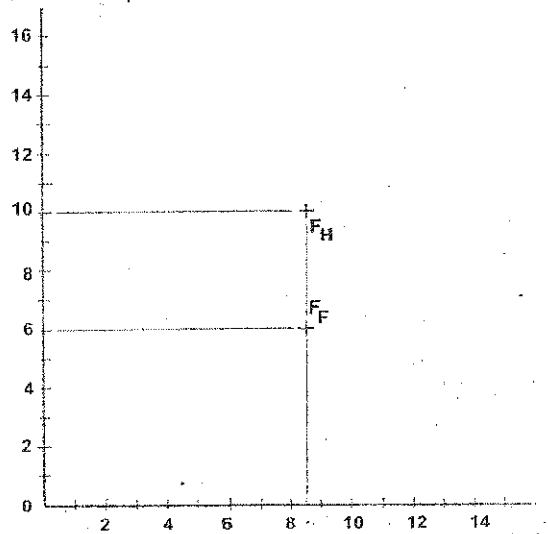
SOLUCIÓN 3.2:



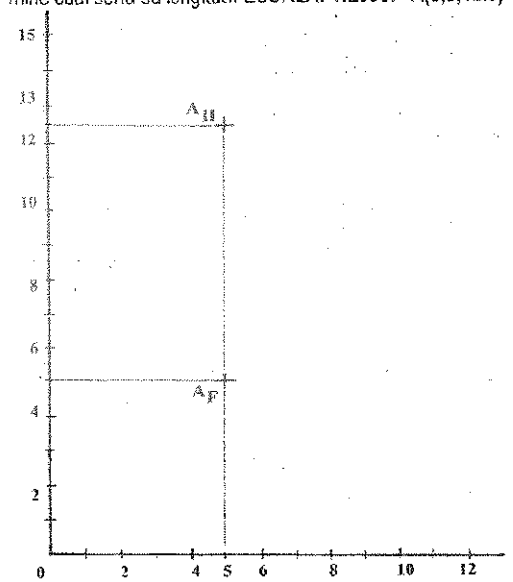
PROCEDIMIENTO:

1. Graficar las coordenadas de los puntos A, B, D y E en sus vistas principales.
2. En el plano horizontal y paralela a la dirección AB; trazamos el plano de elevación **"1"**, en este plano de proyección y desde el punto A graficamos la pendiente ascendente de **30°**; esta recta se corta con la línea de referencia del B, hallándose la proyección de elevación de este punto, luego completamos la proyección frontal de este punto, trasladando su cota.
3. En el plano horizontal trazamos la dirección ED y paralelo a él, trazamos el plano de elevación **"2"**; en este plano de proyección y desde el punto D, graficamos la pendiente ascendente de **40°**, el corte de esta recta con la línea de referencia del punto E, determina la proyección de elevación este punto; luego trasladamos la cota del punto E al plano frontal.
4. En el plano horizontal, el cruce de las direcciones AB y ED nos determina la proyección de punta del árbol vertical RS, en el plano frontal medimos su longitud, siendo esta de **7 metros**.

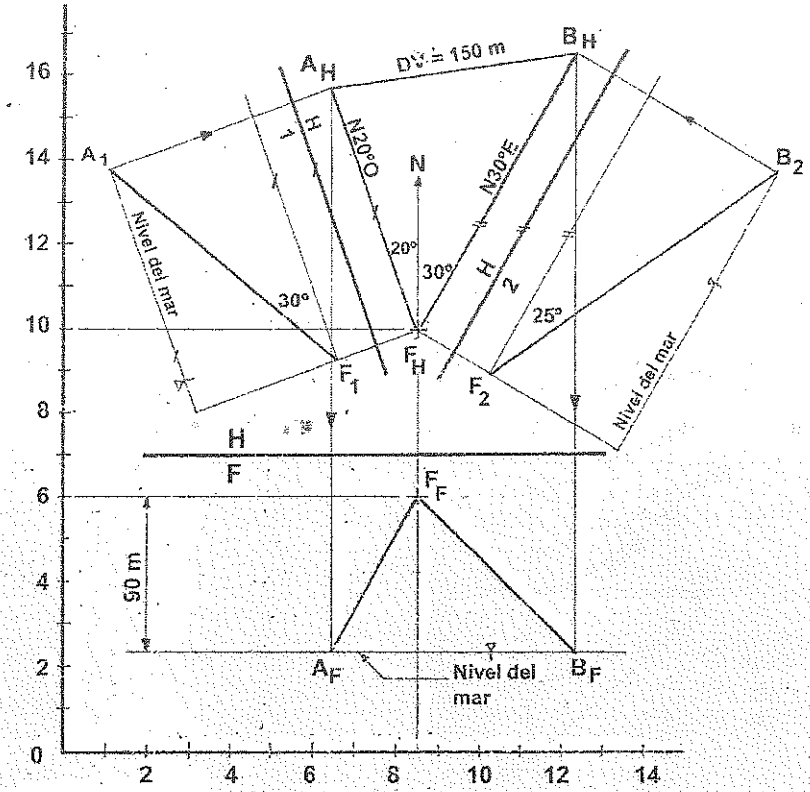
PROBLEMA 3.3: Desde la parte más alta de un faro F situado a nivel del mar y de 90 metros de altura, se ubica un barco en la dirección **N20°O** y con pendiente de **30°**. Cinco minutos mas tarde se le vuelve ubicar al mismo barco con una dirección **N30°E** con pendiente de **25°**. Determinar la distancia recorrida por el barco y la velocidad supuesta uniforme. Resolver utilizando Vistas Auxiliares. **ESCALA: 1:2,500 F(8.5,6,10).**



PROBLEMA 3.4: Dos túneles rectilíneos parten desde el punto **A**. El túnel **AB** tiene una dirección **N45°E**, una longitud de **100 metros** con un ángulo de depresión de **40°**. El túnel **AC** tiene una dirección de **S66°E** y un ángulo de depresión de **15°**. Si un nuevo ***túnel de perfil*** ha de conectarse entre los puntos C y B, determine cuál seria su longitud. **ESCALA: 1:2000. A(6,5,12.5)**



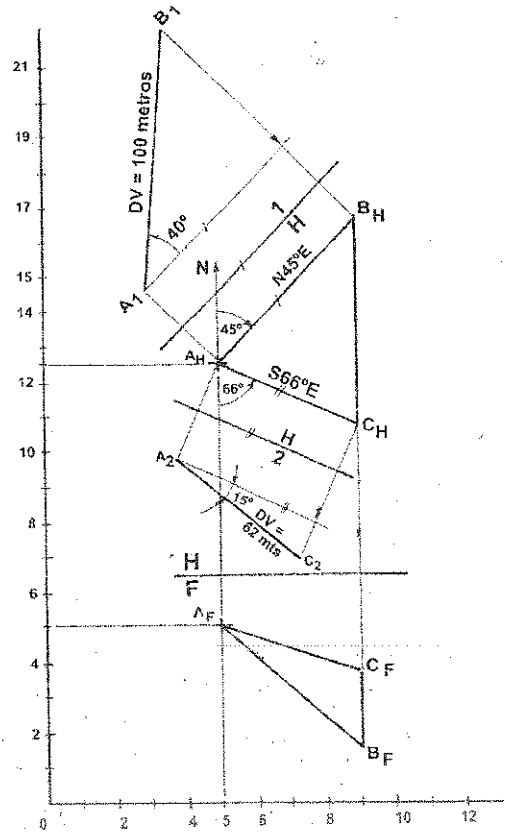
SOLUCIÓN 3.3:



PROCEDIMIENTO:

1. Graficar las coordenadas del punto F en sus vistas principales; en la proyección frontal y por debajo del punto F_F medimos los **90mts.** determinándose el lugar geométrico (lg) del nivel del mar.
2. Desde el punto F en el plano horizontal trazamos la orientación **N20°O**; y paralelo a él, trazamos el plano de elevación **"1"**, en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente de **30°** y trasladamos la cota del l.g. del nivel del mar; el corte de ambas rectas nos da la posición **A** del barco en el mar, luego completamos la proyección de este punto en sus planos principales.
3. Desde la proyección horizontal del punto F, trazamos la orientación **N30°E** y paralelo a él, trazamos el plano de elevación **"2"**, en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente de **25°** y trasladamos la cota del l.g. del nivel del mar; el corte de ambas rectas nos da la posición **B** del mismo barco en el mar, luego completamos la proyección de este punto en sus planos principales.
4. Unir los puntos A_H y B_H en sus planos principales, esta recta representa la distancia que separa a los barcos; en el plano horizontal y con la escala **1:2,500** medimos a esta recta, que es una recta horizontal.
5. La distancia obtenida en dimensión verdadera en el plano horizontal es de **150 metros**.

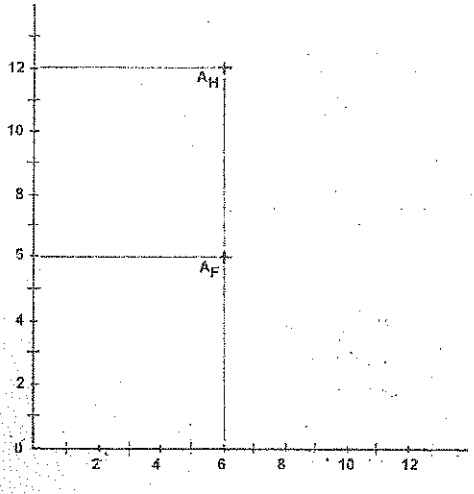
SOLUCIÓN 3.4:



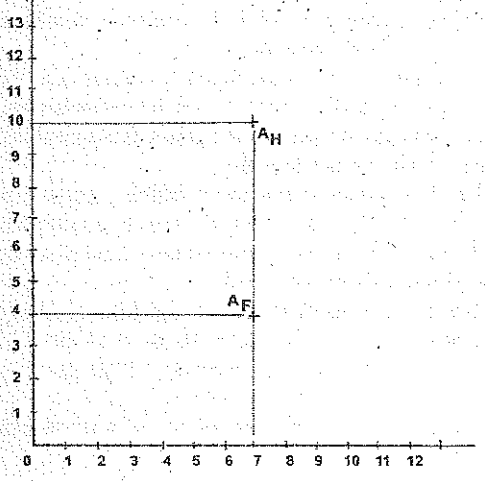
PROCEDIMIENTO:

1. Graficar las coordenadas del punto **A** en sus vistas principales.
2. Desde el punto **A** en el plano horizontal trazamos la orientación **N45°E** del túnel **AB**; y paralelo a él, trazamos el plano de elevación **"1"**, en este plano de proyección medimos la pendiente descendente de **40°** y la longitud de **100m** de la recta **AB**, hallándose el extremo **B** del túnel, luego completamos la proyección de este punto en sus planos principales.
3. Desde el punto **A** en el plano horizontal trazamos la orientación **S66°E** del túnel **AC**.
4. Desde la proyección horizontal del punto **B** trazamos el tercer túnel de perfil y donde corte a la dirección del túnel **AC**, se determina la proyección horizontal del extremo **C**.
5. Paralelo a la orientación **S66°E**, trazamos el plano de elevación **"2"**, y perpendicular al plano de proyección trazamos las líneas de referencia de los extremos **A** y **C**; luego determinamos la posición de A trasladando su cota del plano frontal, y a partir de este punto graficamos la pendiente descendente de **15°** y la prolongamos hasta cortar a la línea de referencia del punto **C**, ubicándose la proyección de elevación del extremo **C**; luego determinamos su proyección frontal, trasladando su cota del plano de elevación.
6. La longitud que debe tener el túnel **AC**, la medimos en el plano de elevación **"2"**, siendo esta de **62 metros**.

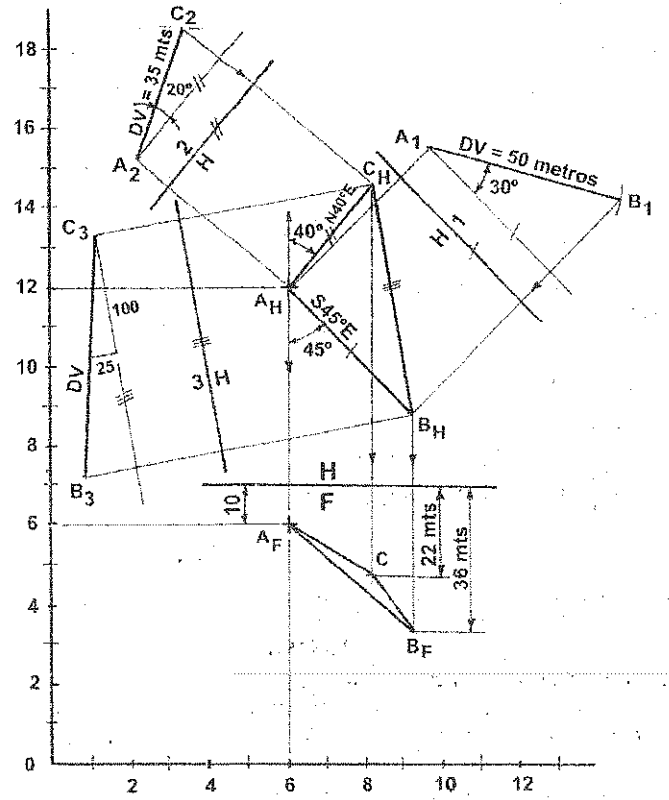
PROBLEMA 3.5: Dos túneles mineros comienzan en un punto común A, situado a una profundidad de 10 **metros** del terreno supuesto horizontal. El túnel AB tiene una longitud de 50 **metros** y una dirección S45°E, con pendiente descendente de 30°. El túnel AC sigue la dirección N40°E y tiene 35 **metros** de longitud y con pendiente descendente de 20°. Si un nuevo túnel ha de conectarse entre los puntos C y B. Hallar cual sería su longitud, dirección y pendiente en porcentaje; así como también cuales serían las profundidades de sus extremos B y C con respecto al terreno supuesto horizontal. ESCALA: 1:1250. A(6,6,12)



PROBLEMA 3.6: Utilizando una bomba centrífuga de gran potencia instalada en **A**, se va ha transportar agua a través de dos tuberías de **40cm** de diámetro, hacia dos ciudades diferentes B y C. La tubería AB sigue la dirección **N35°E**, tiene una longitud de **70km**, estando la ciudad B, **25km** por debajo de A. La tubería **AC** sigue la dirección **N45°O**, con pendiente de **35°**, estando la ciudad **C, 30km** por debajo de **A**. Por razones de mejorar el servicio de abastecimiento de agua potable hacia estas dos ciudades, se desea transportar agua desde D hacia las ciudades **B** y **C**; la tubería DB sigue la dirección **Este** y con pendiente ascendente de **15°** y la tubería DC es horizontal; se desea determinar a) la orientación y longitud de la tubería DC. Resolver utilizando Vistas Auxiliares. **ESCALA: 1:2´000,000. A(7,4,10)**



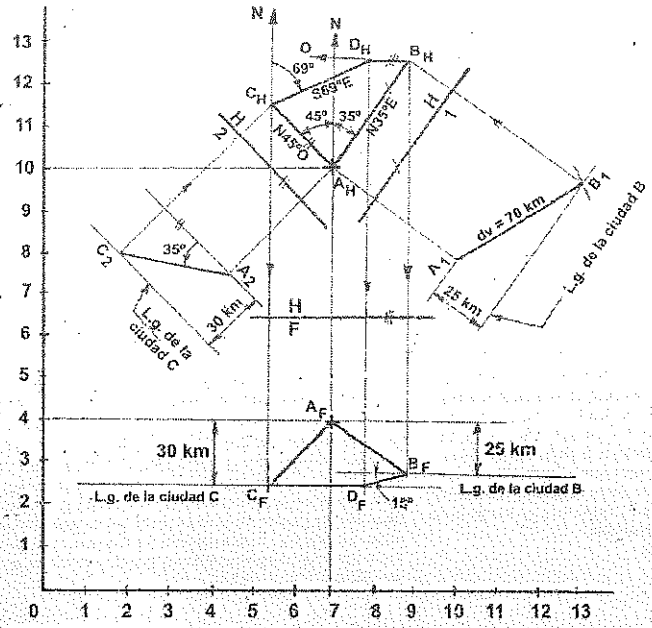
SOLUCIÓN 3.5:



PROCEDIMIENTO:

1. Graficar las coordenadas del punto F en sus vistas principales.
2. Trazar la línea de pliegue H/F asumiendo su posición y perpendicular a la línea de referencia del punto A; por debajo de ella medimos los 10m, hallándose A_F.
3. Desde el punto A en el plano horizontal trazamos la orientación S45°E; y paralelo a él, trazamos el plano de elevación "1", en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente de 30° y la longitud de 50m de la recta AB, hallándose el extremo B del túnel, luego completamos la proyección de este punto en sus planos principales.
4. Desde la proyección horizontal del punto A, trazamos la orientación N40°E y paralelo a él, trazamos el plano de elevación "2", en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente de 20° y la longitud de 35m de la recta AC, hallándose el extremo C del túnel, luego completamos la proyección de este punto en sus planos principales.
5. Unir los puntos B_H y C_H en sus planos principales, hallándose el nuevo túnel BC, paralelo a él trazamos el plano de elevación "3", en este plano de proyección medimos la pendiente descendente en porcentaje del 25% y su dimensión verdadera en la escala 1:1250, siendo esta de 58m.
6. Las profundidades de los extremos B y C la medimos en el plano frontal, en la escala indicada, siendo esta de **36 y 22 metros** respectivamente.

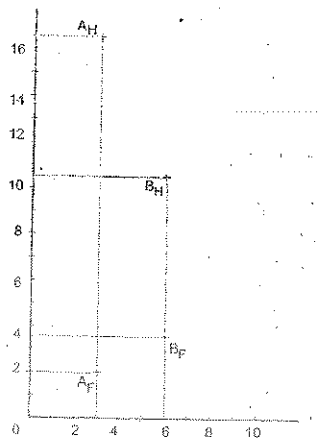
SOLUCIÓN 3.6:



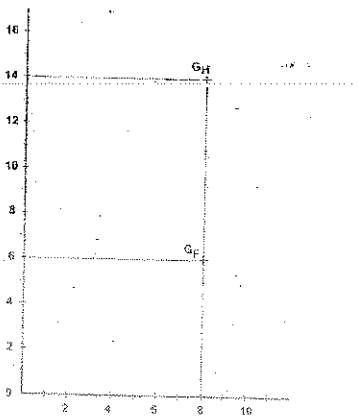
PROCEDIMIENTO:

1. Graficar el punto **A** según sus coordenadas dadas.
2. Desde el punto **A** en la vista horizontal, trazar la orientación **N35°E** de la tubería **AB**, en el plano frontal y por debajo de **A** trazamos los **25km**, que determina el lugar geométrico de la ciudad **B**.
3. Paralelo a la orientación **N35°E** trazar el plano de elevación **"1"**, en este plano de proyección medir las cotas de **A** y del lugar geométrico de la ciudad **B**, ambas obtenidas en el plano frontal. En el plano de elevación **"1"** y a partir de **A** trazar un arco de radio igual a **70km** y donde corte al lugar geométrico, se determina la ciudad **B**, la que proyectamos a sus planos principales.
4. En el plano horizontal y desde el punto **A** trazar la orientación **N45°O**, en el plano frontal y por debajo de **A** medir los **30km**, que determina el lugar geométrico de la ciudad **C**.
5. Paralelo a la orientación **N45°O** trazar el plano de elevación **"2"**, en este plano de proyección medir las cotas de **A** y del lugar geométrico de la ciudad **C**, ambas obtenidas en el plano frontal. En el plano de elevación **"2"** y a partir de **A** trazar la pendiente descendente de **35°** y la prolongamos hasta cortar al lugar geométrico, ubicándose la ciudad **C**, la que proyectamos a sus planos principales.
6. En el plano horizontal y desde el punto **B** trazar la orientación **Oeste**, la recta **BD** es recta frontal y en el plano frontal y desde **B** medir la pendiente descendente de **15°**. La tubería **CD** es recta horizontal y desde la proyección frontal del punto **C** trazar esta recta hasta cortar a la recta frontal que parte desde **B**; el punto de corte de ambas determina la ciudad **D** en sus dos planos principales.
7. En el plano horizontal la orientación y longitud de la tubería **DC** son **S69°O** y **54km** respectivamente.

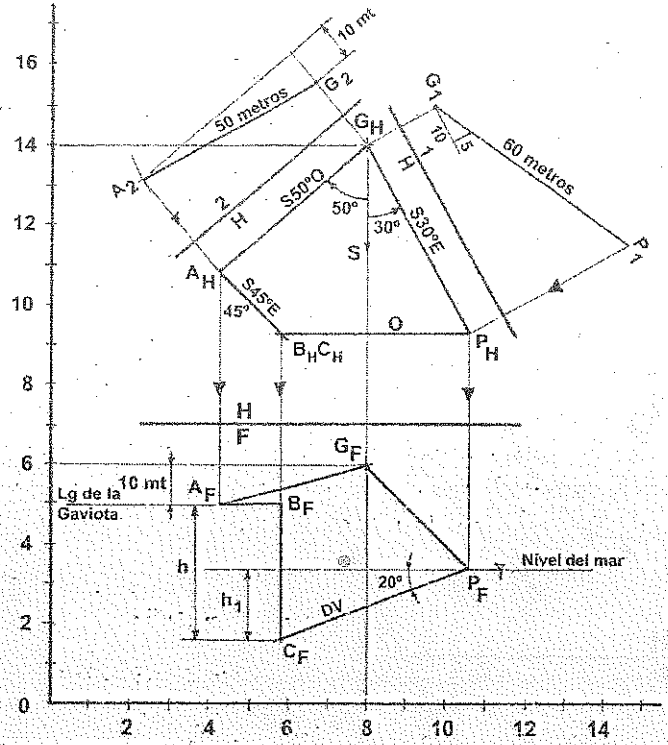
PROBLEMA 3.6: Una Antena Transmisora de Televisión situada en el Morro Solar, requiere ser reparada por un Técnico. Cuando el Técnico empieza a ascender al Morro Solar y desde un punto **A** observa la parte más alta de la antena transmisora según la dirección **S70°E** y con pendiente del **70%**. Después de **10 minutos** el Técnico se encuentra en **B** desde donde observa la parte más baja de la antena transmisora según la dirección **N45°E** y con pendiente del **30%**. Determinar: La altura de la antena transmisora y la dirección, suponiendo que su trayectoria es rectilínea del técnico entre sus dos puntos de observación. **Resolver utilizando Vistas Auxiliares.**
ESCALA:1:1,000 A(3,2,16.5), B(6,3.5,10.5)



PROBLEMA 3.7: Una gaviota que pasa por el punto "G" sigue la dirección **S50°O** con una velocidad de **10 cm/seg**. La gaviota pierde altura a razón de 2 **cm/seg.** Cuando pasa por el punto "G" observa a un pejerrey a nivel del mar según una dirección **S30°E** con pendiente del **50%** y a una distancia de 60 cm. Después de 5 segundos la gaviota, se desplaza horizontalmente en dirección **S45°E**; y en un momento determinado este inicia una caída vertical, logrando atrapar al pejerrey que se desplaza en dirección **Oeste** y con pendiente de **20°**. Determinar: a) La altura de la caída vertical que la gaviota desciende para atrapar al pejerrey. b) La altura sumergida por la gaviota. c) El espacio recorrido por el pejerrey hasta el instante que es atrapada. Resolver con vistas auxiliares. **ESCALA: 1:10 G(8,6,14).**



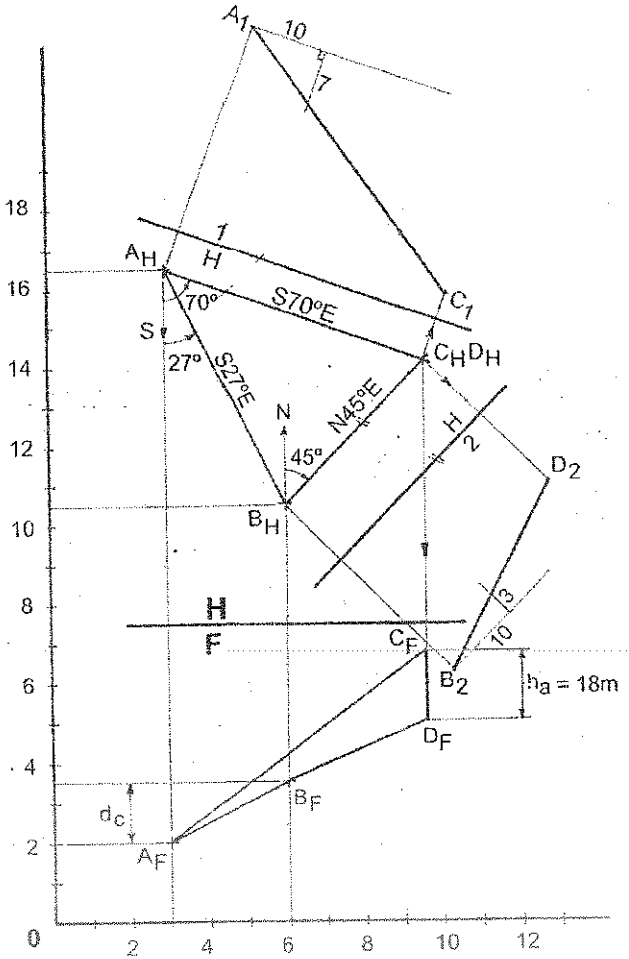
SOLUCIÓN 3.7:



PROCEDIMIENTO:

1. Graficar el punto G según sus coordenadas dadas.
2. Desde el punto G en la vista horizontal, trazar la orientación **S30°E**.
3. Paralelo a la orientación **S30°E** trazar el plano de elevación "1", en ella medimos la cota de G. En el plano de elevación "1" y a partir de G, medir la pendiente del 50% descendente, y con centro en G trazamos un arco de radio igual a **60m** y donde corte a la recta que parte de G, determinamos la posición P del pejerrey; la que proyectamos a los planos principales.
4. En el plano horizontal y desde el punto G trazar la orientación **S50°O**, en el plano frontal y por debajo de G medir la pérdida de altura de **10m** (p_h = 2m/sg x 5sg = 10m), que determina el lugar geométrico de la gaviota.
5. Paralelo a la orientación **S50°O** trazar el plano de elevación "2", en ella medimos las cotas de G y del lugar geométrico del pejerrey, ambas obtenidas en el plano frontal. En el plano de elevación "2" y a partir de G trazar el arco de radio igual a **50m** (e = v x t = 10 x 5 = 50) hasta cortar al lugar geométrico, ubicándose la segunda posición A del pejerrey, la que proyectamos a sus planos principales.
6. En el plano horizontal y desde el punto A trazar el desplazamiento horizontal de la gaviota, cuya orientación es **S45°E**, y desde el punto P trazar la orientación O que corresponde al recorrido frontal que sigue el pejerrey; estas dos orientaciones se cruzan, siendo respectivamente **BC** el punto de cruce.
7. La recta **PC** es recta frontal y en el plano frontal y desde P medir la pendiente descendente de **20°**, prolongamos a esta recta hasta cortar a la línea de referencia del punto de cruce, en el punto **C**.
8. La recta **AB** es recta horizontal y en el plano frontal y desde A trazar una recta paralela a la línea de referencia **H/F** hasta cortar a la línea de referencia del punto de cruce, en el punto **B**.
9. En el plano frontal hallamos la altura de caída **h = 33cm** y la altura sumergida de **h_1 = 18cm.**

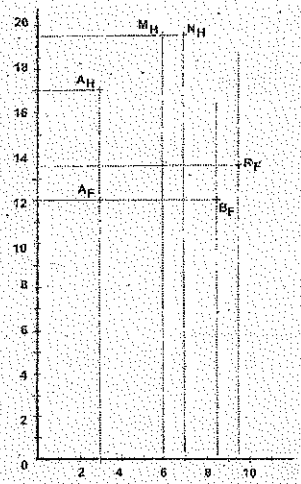
SOLUCIÓN 3.8:



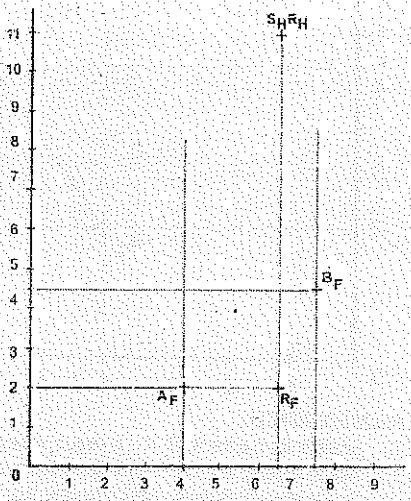
PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos A y B según sus coordenadas dadas.
2. Desde el punto A en la vista horizontal, trazar la orientación **S70°E**, y paralelo a la orientación trazar el plano de elevación "**1**"; y desde A medimos la pendiente ascendente del **70%**.
3. Desde el punto B en la vista horizontal, trazar la orientación **N45°E**, y paralela a ella trazar el plano de elevación "**2**"; y desde B medimos la pendiente ascendente del **30%**.
4. Las orientaciones trazadas desde **A** y **B** se cruzan, siendo el punto de cruce **CD**; **C** la proyectamos al plano de elevación **1** y **D** al plano de elevación **2** hasta cortar a las rectas que parte de **A** y **B** respectivamente. Finalmente completamos la vista frontal de las visuales **AC** y **BD**.
5. El punto de cruce **CD** representa la altura vertical de la antena transmisora, y con el escalímetro y en la escala **1:1000**, medimos esta altura en el plano frontal en donde obtenemos que **ha = 18metros**.
6. En el plano horizontal unimos los puntos **A** y **B**, y desde el punto **A** hacia **B**, medimos la orientación que sigue el técnico; siendo esta **S27°E**.

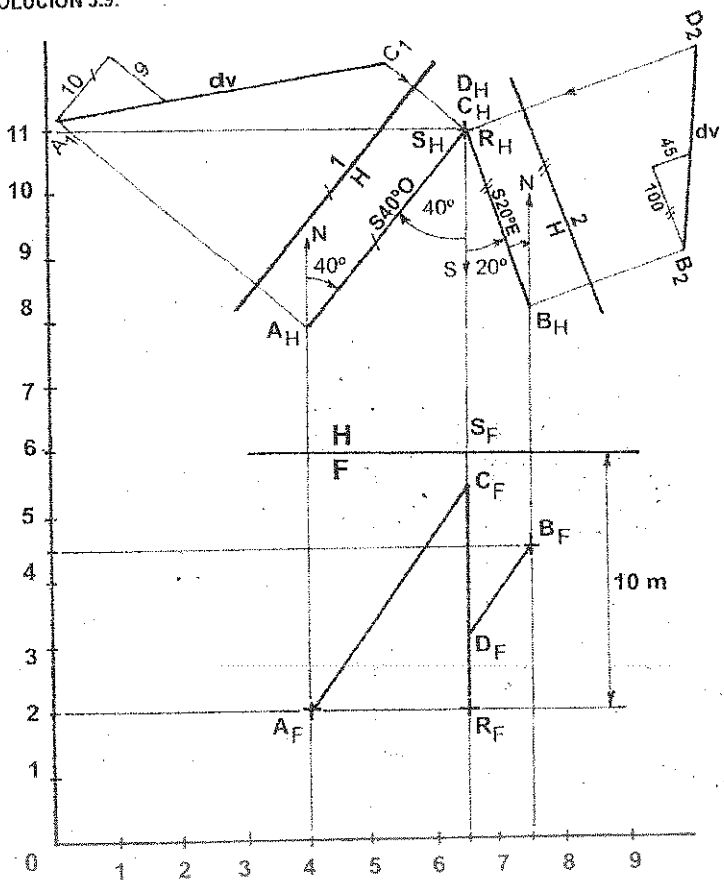
PROBLEMA 3.10: Las direcciones **AM** y **BN** son tramos de carreteras rectilíneas, pasando una de ellas por el pueblo R. Sabiéndose que la distancia vertical libre en el momento de cruce, entre ambas carreteras rectilíneas, es de **10 metros**, se desea saber que pendiente debe tener la carretera rectilínea que pasa por B. Se sabe además que el pueblo B equidista de A y R. **ESCALA: 1:1250. A(3,12,17), M(6,?,19.5); B(8.5,12,?), N(7,?,19.5); R(9.5,13.5,?)**



PROBLEMA 3.9: Desde un túnel vertical **RS** de **10 metros** de longitud, parten dos socavones; uno hacia A y el otro hacia B. El que parte desde A tiene una orientación **N40°E**, y una pendiente ascendente del **90%**. El que parte desde B tiene una orientación **N20°O** y una pendiente descendente del **45%**. Completar las proyecciones de los socavones y determine sus longitudes. **ESCALA: 1:250. A(6,2,?), R(8.5,2,?), S(8.5,?,11), B(9.5,4.5,?)**



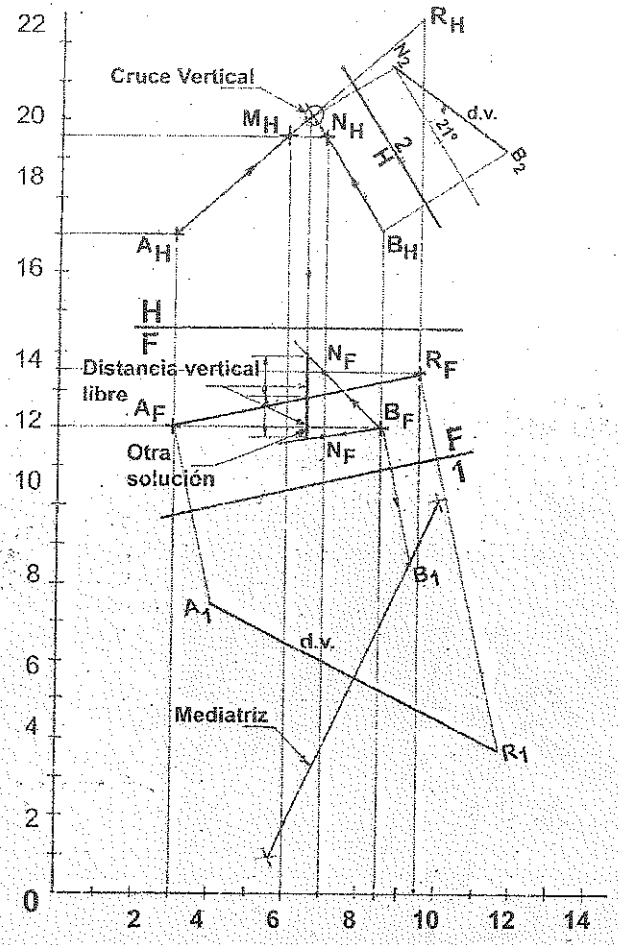
SOLUCIÓN 3.9:



PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos **A, B, R** y **S** según sus coordenadas dadas.
2. Desde el punto **A** en la vista horizontal, trazar la orientación **N40°E**.
3. Desde el punto **B** en la vista horizontal, trazar la orientación **N20°O**.
4. Desde la proyección frontal del punto **R** medimos hacia arriba de él los **10mts** en la escala 1:250, hallándose la proyección frontal del punto **S**.
5. En la vista horizontal la recta vertical **CD** se proyecta de punta, hallándose la proyección horizontal del punto **R**. Desde este punto trazar las orientaciones **S40°O** y **S20°E**, hallándose los puntos **A** y **B** respectivamente.
6. Trazar el plano de elevación "1" paralelo a la orientación **S40°O**, ubicamos el punto **A** trasladando su cota, y a partir de este punto medimos la pendiente ascendente del **90%**, prolongamos a esta recta hasta cortar a la linea de referencia **C**; luego hallamos la proyección frontal de este punto.
7. Trazar el plano de elevación **"2"** paralelo a la orientación **S20°E**, ubicamos el punto **B** trasladando su cota, y a partir de este punto medimos la pendiente descendente del **45%**, prolongamos a esta recta hasta cortar a la linea de referencia **D**; luego hallamos la proyección frontal de este punto.
8. Las longitudes de los túneles **AC** Y **BD** la medimos en los planos de elevación **1** y **2** respectivamente y en la escala 1:250.

SOLUCIÓN 3.10:



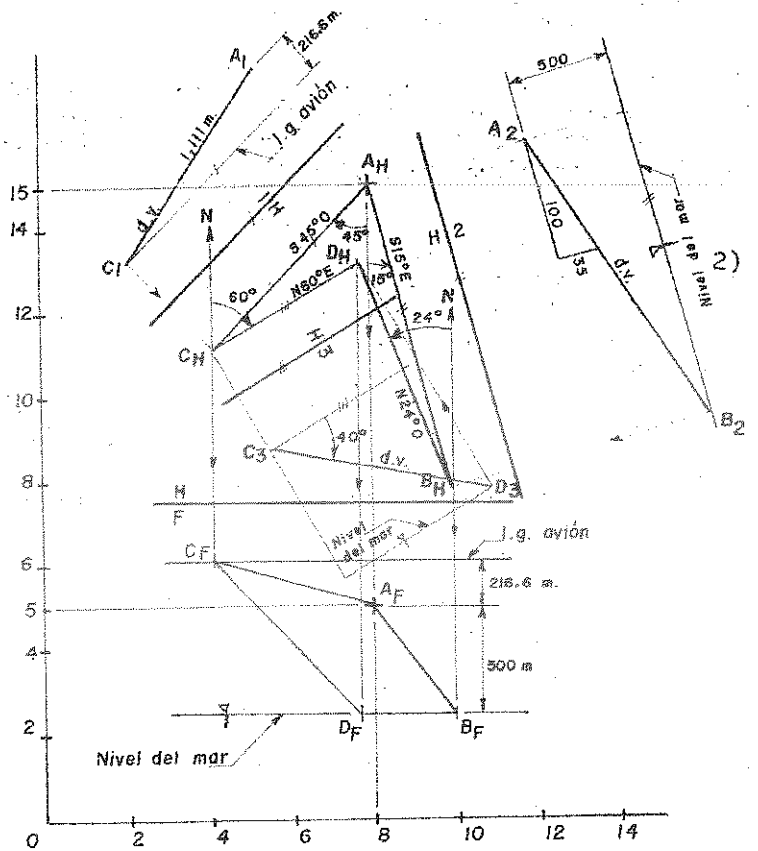
PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos A, M, B, N y R según sus coordenadas dadas.
2. Unir los puntos A y M, prolongamos esta recta hasta cortar a la línea de referencia del punto R, hallándose su proyección horizontal.
3. Trazar el plano de inclinación "1" paralela a la recta AR; perpendicular a ella trazamos las líneas de referencia de A y R. Luego trasladamos al plano de inclinación sus alejamientos de estos puntos.
4. En el plano de inclinación "1" trazamos la mediatriz de la recta AR, y donde corte a la línea de referencia del punto B, hallamos su proyección en este plano de proyección; luego completamos la proyección horizontal B, trasladando su alejamiento. En este plano de proyección se observa que el punto B equidista de los puntos A y R.

5. En el plano horizontal trazamos la dirección **BN** y la prolongamos hasta que se cruce con la dirección **AM**; siendo este punto de cruce la distancia vertical libre de **10mts**, observándose en dimensión verdadera en el plano frontal. En el plano frontal podemos apreciar que hay la posibilidad de dos soluciones.
6. Paralelo a la dirección **BN** trazamos el plano de elevación "2", y perpendicular a ella sus líneas de referencia, trasladamos sus cotas y hallamos la proyección de **BN** en el plano de elevación.
7. En el plano de elevación "2" medimos la pendiente de la recta **BN**, siendo esta de **21°** descendente.

PROBLEMA 3.11: Un avión situado en **A**, a una altura **de 500mts** sigue la dirección **S45°O**, y en su velocímetro se lee una velocidad de **200km/hr**. El avión está ganando altura a razón de **650mts/min**. Desde **A** observa un barco según la dirección **S15°E** y un ángulo de depresión del **35%**. Veinte segundos mas tarde el barco es observado según la dirección **N60°E** y un ángulo de depresión de **40°**. Suponiendo que el curso del barco es constante, determinar el rumbo seguido por este y su velocidad en km/hr. **A(10,5,15). ESCALA: 1:20,000**

SOLUCIÓN 3.11:



PROCEDIMIENTO:

1. Graficar el punto A según las coordenadas dadas, y por debajo de su proyección frontal trazar los **500mts**; que determina el nivel del mar.
2. Desde el punto A y en la vista horizontal, trazar la orientación del avión **S45°O**, luego trazamos el plano de elevación "1" paralelo a la orientación trazada. En este plano de proyección "1" graficamos la ganancia de altura del avión y la distancia que recorre en **20seg**; el corte de ambas líneas determina la segunda posición del avión, la que proyectamos a sus planos principales.

$$e = vxt = 200\frac{km}{hr}\,x20seg\,x\frac{1000m}{1km}\,x\frac{1hr}{3600seg} = 1,111mts$$

3. Desde el punto A trazar la dirección **S15°E** y paralela a la orientación el plano de elevación "2"; en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente del **35%** y el l.g. del nivel del mar, el corte de ambas rectas determina la posición del barco, la que proyectamos a sus planos principales.
4. Desde el punto C en el plano horizontal trazamos la orientación **N60°E**, y paralela a esta orientación trazamos el plano de elevación "3"; en este plano de proyección graficamos la pendiente de 40° descendente y el nivel del mar, el corte de estas rectas determina la segunda posición "D" del barco, la que proyectamos a sus planos principales.
5. Los puntos B y D determina la orientación seguida por el barco, **N24°O**.

$$v = \frac{e}{t} = \frac{BD}{20seg} = \frac{1160mtsx1kmx3600seg}{20segx1000mtsx1hr} = 208.8km/hr$$

PROBLEMA 3.12: Desde lo alto de un edificio "E" en construcción, de **30** metros de altura, se observa un Jeep "J", con pendiente del **60%**; después de **3** minutos se le vuelve a ver con dirección **S30°E** y con pendiente del **80%**. Hallar la velocidad del Jeep y las coordenadas del punto "J". Resolver sin vistas auxiliares. **E(8,3,8), J(4, - ,-) ESCALA: 1:1,000**

PROCEDIMIENTO 3.12:

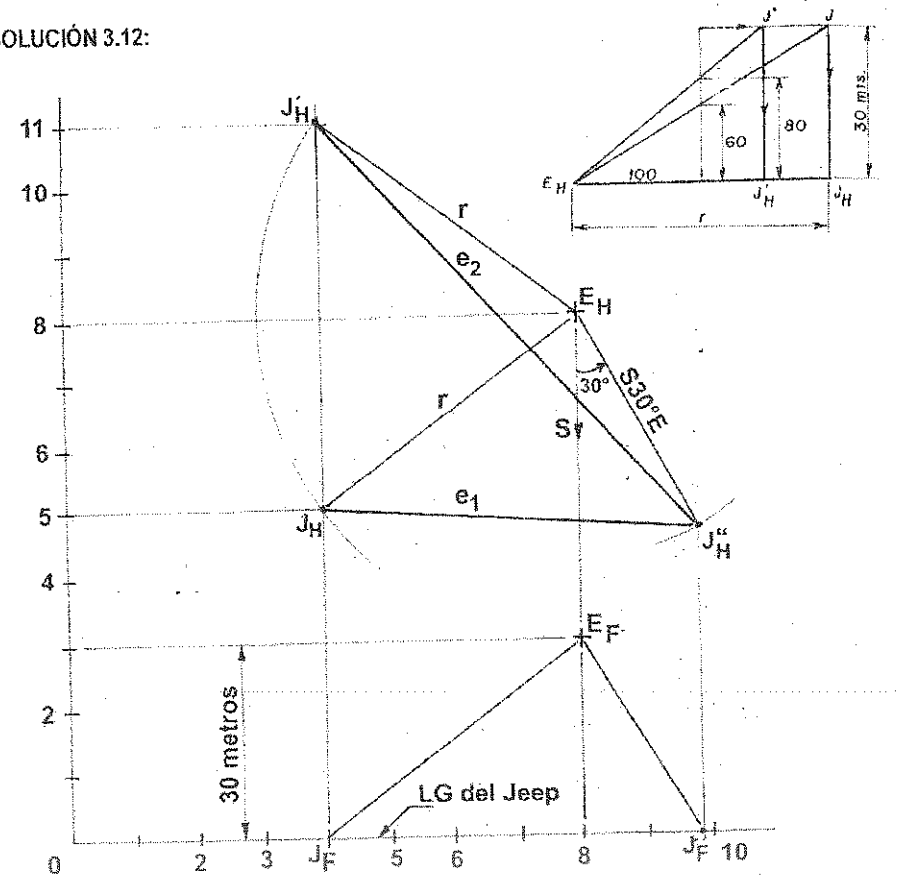
1) Graficar los puntos E y J según las coordenadas dadas.
2) En la vista frontal y desde el punto "E", trazamos la altura de **30** metros del edificio; esta línea representa el lugar geométrico del Jeep..
3) En la vista horizontal y desde el punto "E" trazar la orientación **S30°E**.
4) Con la pendiente descendente del **60%** y la diferencia de cotas de **30** metros entre los puntos E y J, hallamos la proyección horizontal de EJ en dos soluciones; utilizando el método por diferencia de cotas, trasladando el radio r.
5) Con la pendiente descendente del **80%** y la diferencia de cotas de **30** metros, hallamos la proyección horizontal del Jeep después de 3 minutos; utilizando el método por diferencia de cotas.
6) Respuestas:
   a) Velocidad

$$v = \frac{e_1}{3} = \frac{59mts}{3\min} = 19.66mts/\min$$

$$v = \frac{e_2}{3} = \frac{86mts}{3\min} = 28.66mts/\min$$

   b) Coordenadas
   J(4,0,5)
   J(4,0,11)

SOLUCIÓN 3.12:

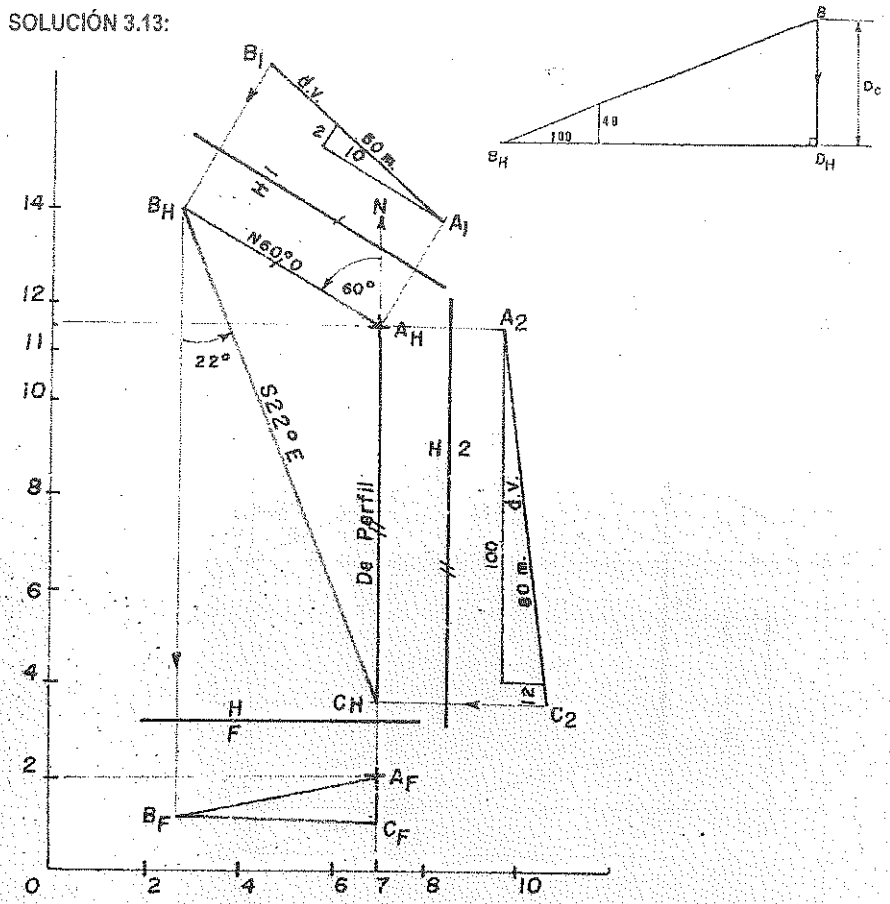


PROBLEM 3.13: Dos líneas de enlace de un colector sanitario, parten de un punto A en una boca de inspección. La línea de alcantarillado AB tiene 50mts de longitud, una caída del 20% y una orientación de N60°O. La línea de alcantarillado AC es de *perfil* y mide 80mts de longitud y tiene una caída del 12%. Determinar la dirección del conducto principal que pasa por los extremos B y C (*se encuentra delante de A*), y que se dirige a un río. A(7,6,14). ESCALA: 1:1,250.

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto A según su coordenada dada.
2) Desde el punto "A" en la vista horizontal, trazamos la orientación N60°O y paralela a la orientación, trazamos el plano de elevación "1"; luego en este plano de proyección y desde el punto "A" graficamos la pendiente descendente del 20% y la longitud de 50 metros de la línea de enlace AB; ubicándose el extremo B, la que proyectamos a sus vistas principales.

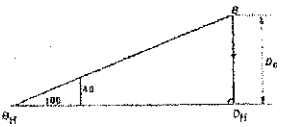
SOLUCIÓN 3.13:



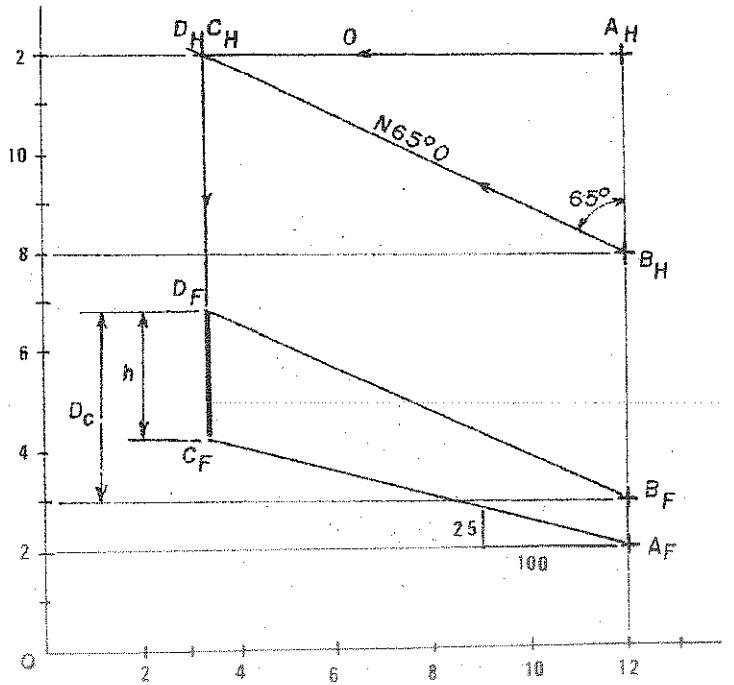
3) Desde el punto "A" en la vista horizontal, trazamos la orientación **N60°O** y paralela a la orientación, trazamos el plano de elevación **"1"**; luego en este plano de proyección y desde el punto **"A"** graficamos la pendiente descendente del **20%** y la longitud de **50** metros de la línea de enlace **AB**; ubicándose el extremo **B**, la que proyectamos a sus vistas principales.
4) Desde el punto **"A"** en el plano horizontal y delante de él, parte la línea de enlace de perfil **AC**, que sigue la dirección **Sur**, y paralela a la línea de Perfil trazamos el plano de elevación **"2"**; luego en este plano de proyección y desde el punto **"A"**, graficamos la pendiente descendente del **12%** y la longitud de **80** metros de la línea de enlace **AC**, en el extremo ubicamos el punto **"C"** de la recta **AC**, la que proyectamos a sus vistas principales.
5) En los planos principales horizontal y frontal, unimos los extremos **B** y **C** del conducto principal que se dirige al río; en el plano horizontal medimos la orientación del conducto **BC**, hallándose la orientación **S22°E**.

PROBLEMA 3.14: Desde dos observatorios situados en **A** y **B** observan un poste de conducción de energía eléctrica. Del observatorio situado en **A** se observa el pie del poste con una orientación **Oeste** y pendiente del **25%**. Del observatorio situado en **B** se observa la punta del poste con una orientación **N65°O** y un ángulo de elevación del **40%**. Hallar las proyecciones horizontal y frontal de las orientaciones y la altura del poste, sin utilizar vistas auxiliares.

ESCALA: 1:1000. A(12,2,12), B(12,3,8)



SOLUCIÓN 3.14:



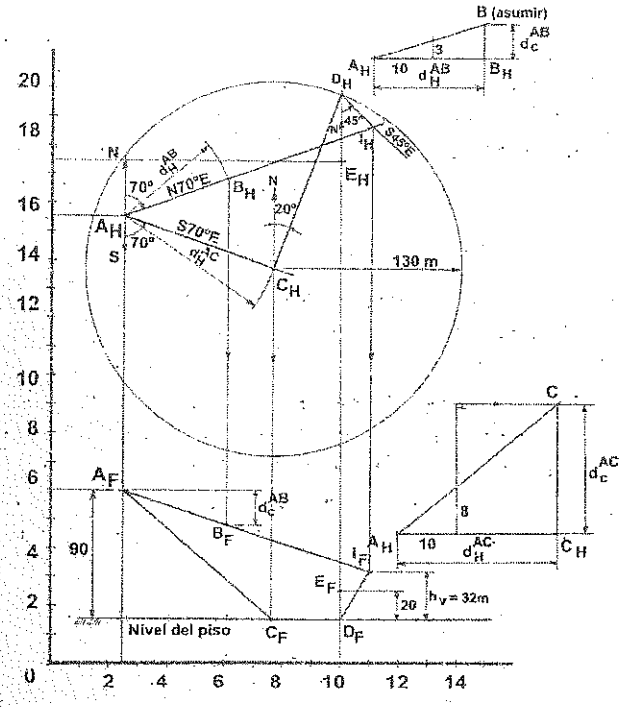
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos **A** y **B** según sus coordenadas dadas.
2) En la vista horizontal y desde el punto **A**, trazar la orientación **Oeste**.
3) En la vista horizontal y desde el punto **B**, trazar la orientación **N65°O**, y la prolongamos hasta que se cruce con la orientación **Oeste**; hallándose la proyección de punta de la altura vertical **CD**.
4) En la vista frontal y desde el punto **A**, trazar la pendiente del **25%** ascendente, hasta que corte a la línea de referencia del punto **C**.
5) Con la proyección horizontal de **BD** y la pendiente ascendente del **40%**, trazamos el diagrama de diferencia de cotas, hallamos la diferencia de cotas entre los puntos **B** y **D**; trasladamos esta diferencia de cotas a la vista frontal para determinar la posición del punto **D**.
6) En el plano frontal y entre los puntos **D** y **C**, medimos la altura del poste **h** de **22.5** metros.

PROBLEMA 3.15: Una paloma se desplaza en dirección N70°E y pasa por el punto A, a una altura de 90 metros sobre el nivel del piso, va descendiendo a razón de 3mts en 10mts. Cuando pasa por el punto A la paloma es observado por un cazador situado en C en la dirección N70°O y con pendiente del 80%. Cuando el cazador se ha desplazado 130metros se encuentra situado al Norte de un monticulo E de 20mts de altura, de donde dispara un proyectil en la dirección S45°E impactando en la paloma. Determinar: a) La altura de caida vertical de la paloma en el instante de ser impactado. b) La dirección que sigue el cazador. Resolver sin vistas auxiliares.

ESCALA: 1:2000 E(10, - ,17.5), A(2.5,6,15.5).

SULUCIÓN 3.15

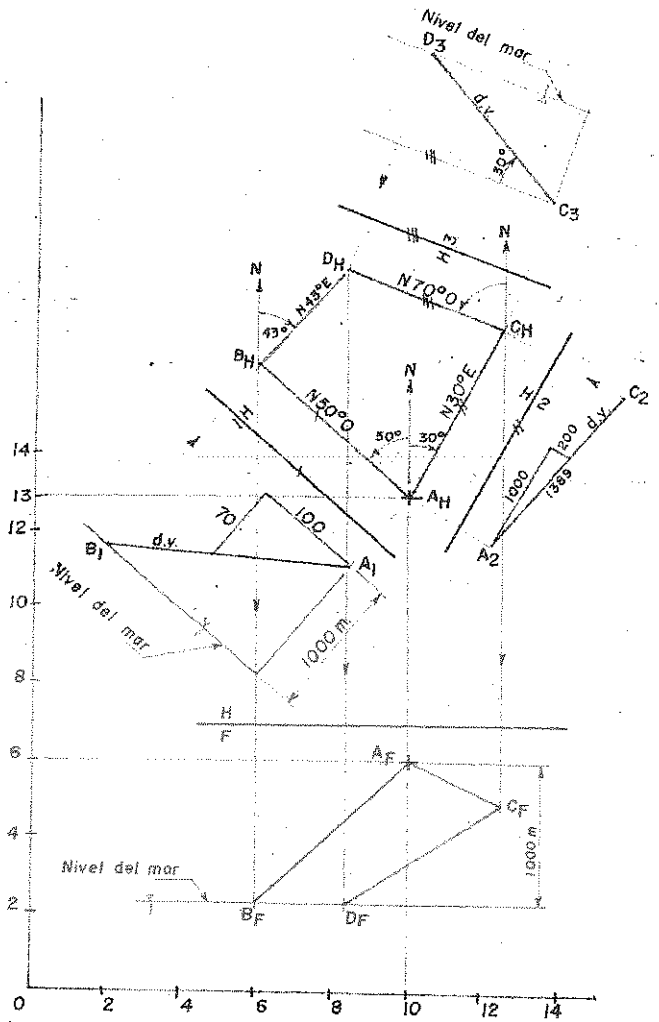


PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos A y E según sus coordenadas dadas.
2. Desde el punto A en la vista horizontal, trazamos la orientación **N70°E**.
3. Desde el punto A en la vista frontal, trazamos hacia debajo de él la altura de **90mts**, por donde trazamos una recta horizontal que representa el nivel del piso.
4. Por el método de diferencia de cotas ubicamos el punto B, utilizando la pendiente del **30%**.
5. Como no se conoce la posición del cazador, desde el punto A trazar la orientación **S70°E**, y utilizando el método por diferencia de cotas graficamos la pendiente del **80%**, obteniéndose la posición del cazador.
6. Con centro en C trazamos una circunferencia de radio **130mts** que representa la distancia que se ha desplazado el cazador, y buscamos al punto D que se encuentra al **Norte** del monticulo E.
7. Desde el punto D en la vista horizontal, trazamos la trayectoria del proyectil con la orientación **S45°E**, y donde se corte con la trayectoria de la paloma encontramos el punto de impacto.
8. En la vista frontal medimos la altura de caída de la paloma al momento de ser impactado.

PROBLEMA 3.16: Un avión de observación pasa por el punto A, a una altura de **1000 metros**, con una velocidad de **250km/hr** y con dirección **N30°E**. El avión está perdiendo altura a razón de **200mts** en **1000mts**. Desde A se observa una lancha rápida en dirección **N50°O**, con un ángulo de declinación del **70%**. ***Veinte*** segundos más tarde, la lancha es observado según la orientación de **N70°O** y con un ángulo de declinación de **30°**. Suponiendo que el curso de la lancha es constante, determinar el rumbo seguido por este y su velocidad en km/hr. **ESCALA: 1:25,000. a(10,6,13)**

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto **A** según su coordenada dada, y en la proyección frontal por debajo de él, trazar los **1000** metros, determinándose el nivel del mar

2) Desde el punto A en el plano horizontal, trazar la orientación N50°O y paralelo al rumbo trazar el plano de elevación 1; en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente del 70% y el lugar geométrico del nivel del mar, estas rectas se cortan y determinan la posición B de la lancha, la que proyectamos a sus vistas principales.

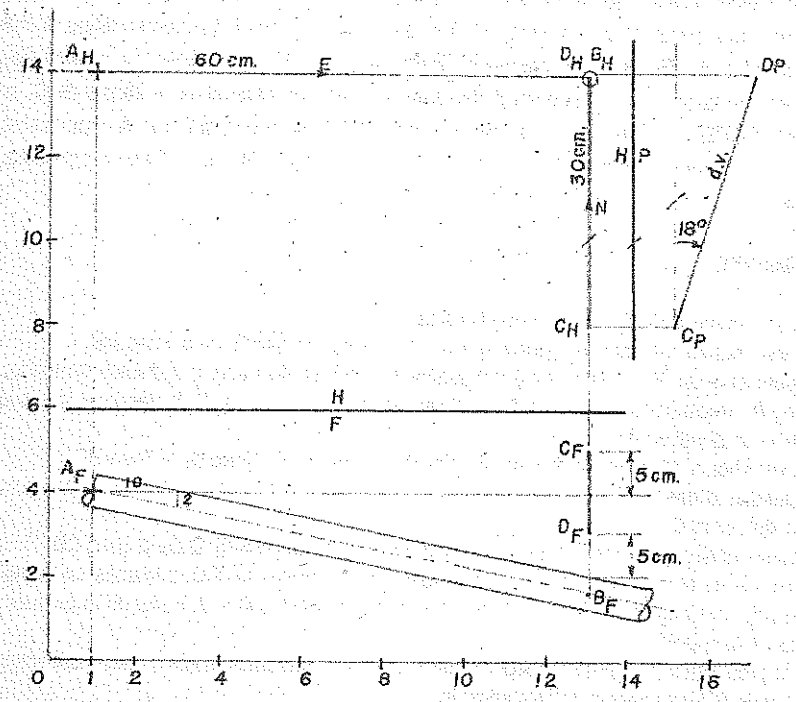
3) Desde el punto A en la vista horizontal trazamos la orientación N30°E y paralelo a este rumbo trazamos el plano de elevación 2; en este plano de proyección graficamos la pérdida de altura del avión de **200/1000** y la distancia que recorre en 20 segundos, estas rectas se cortan y determinan la segunda posición del avión (C), la que proyectamos a sus vistas principales.

4) Desde el punto C en el plano horizontal, medimos la orientación **N70°O** y paralela al rumbo, trazamos el plano de elevación "3", luego en este plano de proyección graficamos la pendiente descendente de **30°** y el l.g. del nivel del mar; el corte de ambas líneas determina la segunda posición de la lancha (D), la que proyectamos a sus planos principales.

$$e = v \times t = 250\frac{km}{hr} \times 20seg \times \frac{1000m}{1km} \times \frac{1hr}{3600seg} = 1389mts$$

PROBLEMA 3.17: A es un punto de partida de una tubería rectilínea en dirección ***Este***, con una pendiente del **20%** en bajada. Otra tubería parte de un punto C situado **60cm** a la derecha, **5cm** encima y **30cm** delante de A en dirección **Norte**. Cual debe ser la pendiente de esta última tubería, para que en el punto de cruce de ambas, exista una distancia vertical libre de **5cm**. Las tuberías tienen **4cm** de diámetro. **ESCALA: 1:5. A(1,4,14)**

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

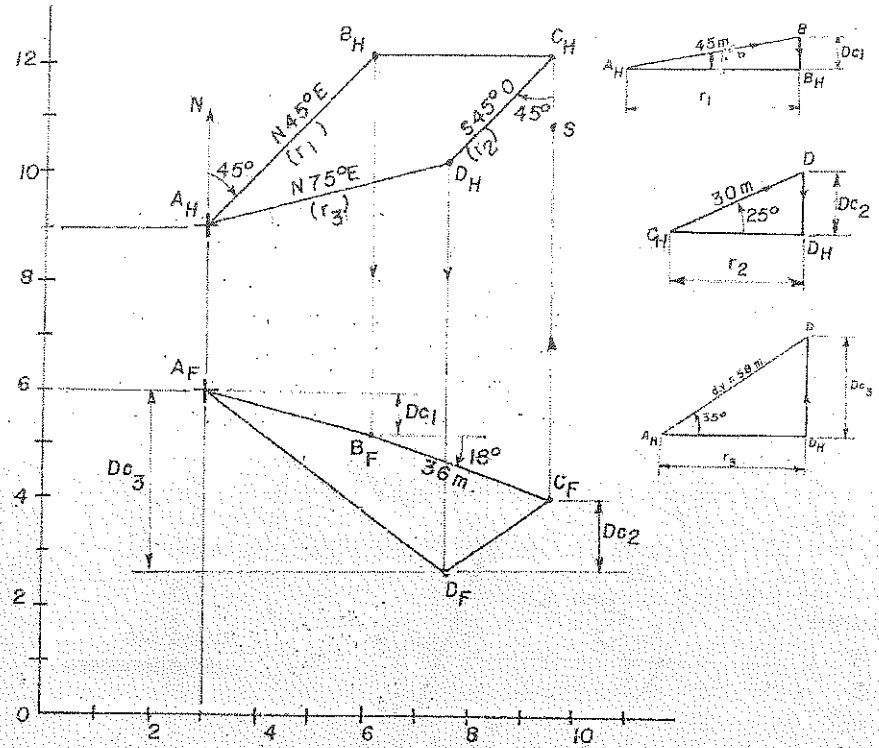
1) Graficar el punto A según su coordenada dada.
2) Desde el punto A en la vista horizontal trazamos la orientación Este del eje de la tubería AB, en el plano frontal graficamos la pendiente descendente del **20%**, por ser una recta frontal.
3) Para ubicar el punto C, y desde el punto A_H y a su derecha trazamos los **60** cm y delante de este punto los **30** cm, desde A_F y encima de él trazamos los **5** cm.
4) Desde el punto C en la vista horizontal trazamos la orientación **Norte** de la tubería CD y la prolongamos hasta que se cruce con la tubería que parte desde A, hallándose los extremos B y D de las tuberías AB y CD respectivamente.
5) En la vista frontal prolongamos la tubería de perfil que parte desde el punto C y en el corte de la tubería que parte desde A, ubicamos el punto B.
6) En la vista frontal y desde el punto B, medimos encima de él la distancia vertical libre de **5** cm, hallándose el extremo D de la tubería de perfil CD.
7) Para determinar la pendiente de la tubería CD, hallamos su dimensión verdadera trazando una vista auxiliar paralela a él: en esta vista auxiliar determinamos la pendiente de **18°**.

PROBLEMA 3.18: Una línea de alcantarillado que une cuatro bocas de inspección se localizan se la siguiente manera: la línea que va de la boca A a la boca B tiene una dirección **N45°E**, una longitud de **45mts** y una pendiente negativa de **10°**. De la boca B a la boca C la línea se dirige al **Este**, tiene una longitud de **36mts** y una pendiente descendente de **18°**. Si la línea de alcantarillado estuviera uniendo la boca A con la boca D directamente, estando esta última a **30mts** de C, con una dirección **S45°E** y con una pendiente descendente de **25°**. Si se uniera D con A directamente; ¿Cuál sería su dirección, pendiente y su longitud? **ESCALA: 1:1000. A(3,6,9).** Resolver sin utilizar vistas auxiliares.

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto A según su coordenada dada.
2) En la vista horizontal y desde el punto A trazar la orientación N45°E de la línea AB.
3) Con pendiente de 10° descendente y la longitud de AB de 45 metros, trazamos un triángulo rectángulo, trasladamos la diferencia de cotas entre los puntos A y B: hallándose la proyección horizontal del punto A.
4) En la vista horizontal y desde el punto B trazamos la orientación Este de la línea BC.
5) Con pendiente descendente de 18° y la longitud de 36 metros de BC, hallamos la proyección frontal del punto C.
6) En la vista horizontal y desde el punto C trazamos la orientación S45°O de la línea CD.
7) Con pendiente descendente de 25° y la longitud de 30 metros de CD, trazamos un triángulo rectángulo; trasladamos la diferencia de cotas entre los puntos C y D, hallando la proyección horizontal del punto D.
8) Con la proyección horizontal de AD y la diferencia de cotas entre estos puntos, hallamos la longitud de AD y su pendiente descendente.
9) Respuestas: Orientación de AD: **N75°E**, AD = **58** metros y **35°** descendente.

SOLUCIÓN



PROBLEMA 3.19: Un helicóptero se desplaza al ***Este*** ganando altura, y su localización en un momento determinado es el punto **E** situado a una altura de **600mts** sobre el nivel de la calle horizontal. Desde **E** se divisa un automóvil **A** en la dirección **N60°E** bajo un ángulo de **30°**. Cuando el automóvil se ha desplazado **1200 metros**, este se encuentra al ***Sur*** de la torre **T** de **600mts** de altura; siendo el cruce vertical libre de las trayectorias del helicóptero y del automóvil de **800mts.** Determinar: a) La trayectoria del helicóptero en sus proyecciones principales, y su ganancia de altura en porcentaje, b) La trayectoria del automóvil en sus proyecciones principales y la dirección de su ruta.

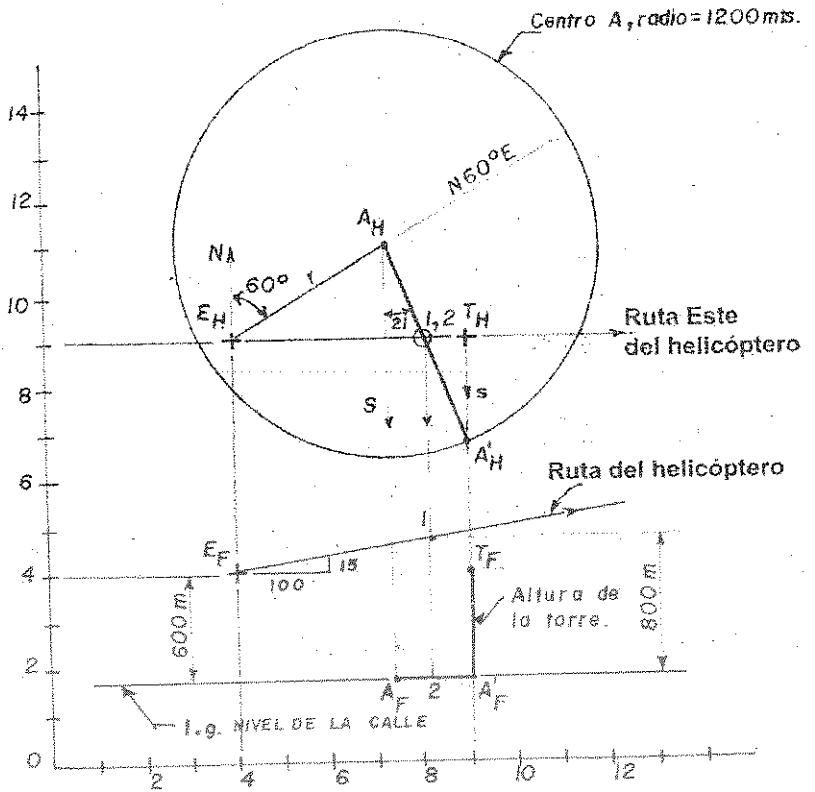
ESCALA: 1:40,000. E(4,4,9), T(9, - ,9)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) En la vista horizontal y desde el punto "E" trazar la orientación **Este** del helicóptero.
3) En la vista frontal y desde el punto **E** medimos hacia debajo de él, la altura de **600 metros**, por donde trazamos una recta horizontal que representa el l.g. del nivel de la calle.
4) En la vista horizontal y desde el punto **E**, trazar la orientación **N60°E**; por el método de diferencia de cotas ubicamos el punto **A**, como se observa en la **fig. a.**
5) Con centro en **A** en la vista horizontal y de radio igual a **1200 metros**, trazamos un círculo que representa el **lg** del desplazamiento del automóvil.

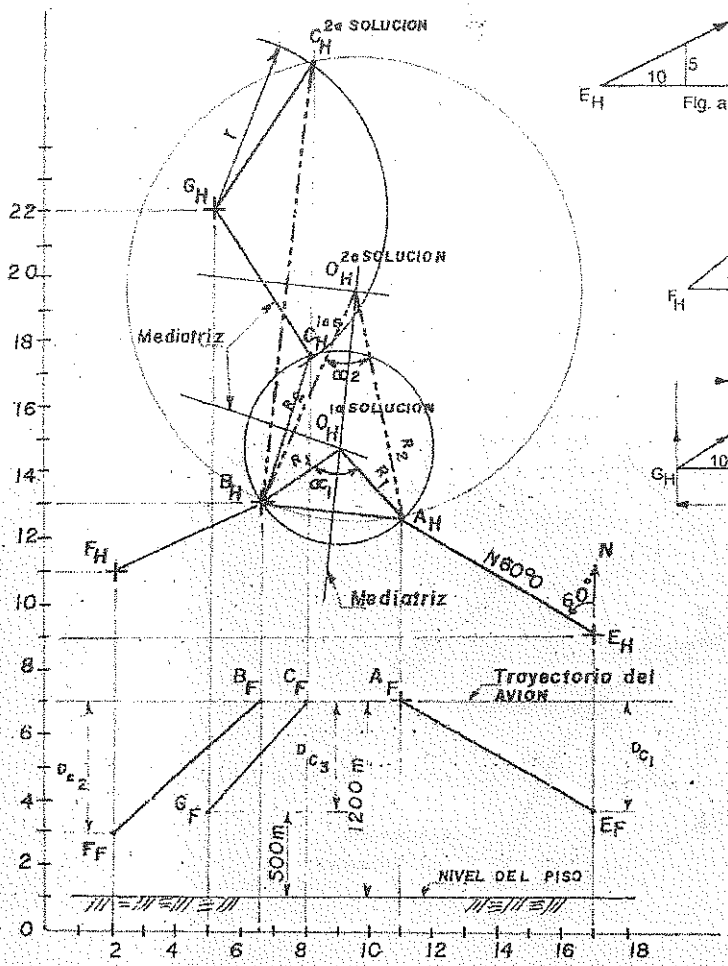
6) Ubicado las proyecciones horizontal y frontal del punto "T", el automóvil se encuentra al **Sur** de la Torre (A').
7) En el cruce de las trayectorias del helicóptero y del automóvil, trazamos una línea de referencia perpendicular al plano frontal, y desde el nivel de la calle medimos en esta línea de referencia y hacia arriba el cruce vertical de **800** metros.
8) En la vista frontal unimos los puntos **E** y **1**, que representa la ruta del helicóptero, siendo su ganancia de altura del **15%**.
9) La dirección de la ruta del automóvil es: **S21°E**.

SOLUCIÓN 3.19:



PROBLEMA 3.20: Un avión enemigo es ubicado volando según su trayectoria circular, sobre una base militar a una altura de **1200mts**. Desde los puntos de observación E, F y G se ubican tres puntos de dicha trayectoria: A, B y C respectivamente. Desde el punto E se ubica al avión según la dirección **N60°O**, con una pendiente del **50%**; desde el punto F se le observa con una pendiente del **80%** y desde el punto G, situado a una altura de **500mts** se ubica al avión con una pendiente del **60%**. Determinar la velocidad del avión, sabiendo que el tiempo transcurrido desde el punto de observación B con respecto al punto A es de ***2 minutos***. Resolver sin utilizar vistas auxiliares.
ESCALA 1:20,000. A(11,7, -), B(6.5, - ,13), C(8, - , -), E(17, - ,9), F(2, - ,11), G(5, - ,22)

SOLUCIÓN 3.20:



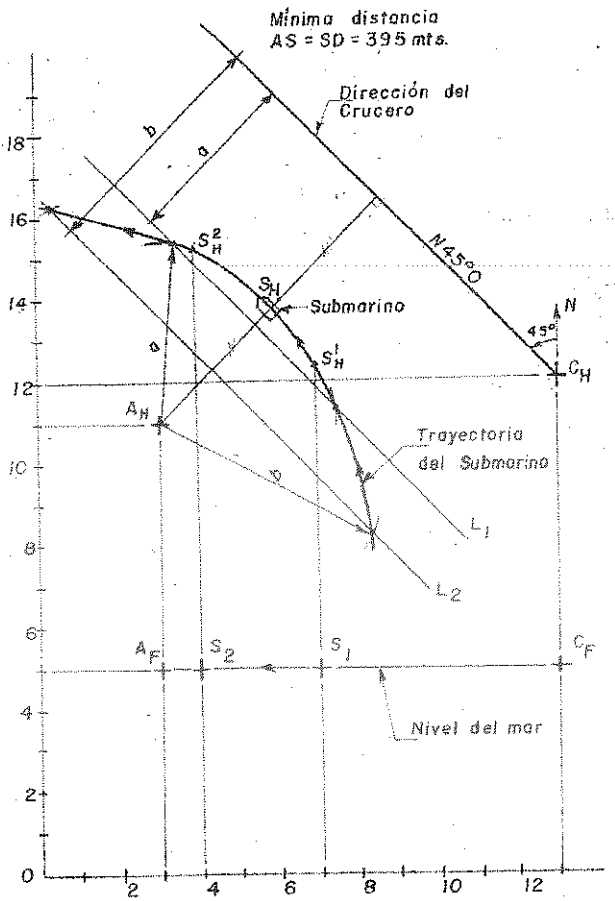
PROCEDIMIENTO:

1. Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2. En la vista frontal trazamos una recta horizontal que pase por el punto **A** y representa el lg de la trayectoria del avión; este lg corta a las líneas de referencia de **B** y **C**, hallándose la proyección frontal de estos puntos.
3. En la vista horizontal y desde el punto **E**, trazamos la orientación **N60°O** que ubica el avión en **A**; por el método de diferencia de cota encontramos la proyección frontal del punto **E** (fig. a).
4. En la vista horizontal unir los puntos **F** y **B**, y por el método de diferencia de cota, hallamos la proyección frontal del punto **F** (fig. b).
5. En la vista frontal y desde el nivel del piso medimos los **500** metros, hallándose el punto **G**; luego unimos este punto con **C** y según la figura **c** hallamos su proyección horizontal.

6. En la vista horizontal unir los puntos A, B y C, trazamos las mediatrices de las rectas AB y BC que se cortan en O, luego con centro en este punto y radios R_1 y R_2 trazar dos circunferencias que pasan por los puntos A, B y C de la trayectoria del avión.

PROBLEMA 3.21: Un crucero de desplaza en alta mar en dirección **N45°O**, y su localización en un momento determinado es C; de donde se observa un submarino enemigo, imposibilitado de sumergirse y que trata de escaparse de un posible ataque del hidroavión y del crucero, siguiendo una curva equidistante a ellos. El hidroavión por falta de combustible se encuentra situado en un punto A en alta mar. Determinar: a) La trayectoria del submarino en sus vistas principales, que en todo momento se conserva equidistante al hidroavión y al submarino; y que pasa por los puntos S_1 y S_2, b) La distancia mínima de los proyectiles disparados del hidroavión y del crucero, para que impacte en el submarino. **ESCALA: 1: 100,000. A(3,5,11), C(13,5,12); S_1(7, - , -), S_2(4, - , -)**

SOLUCIÓN 3.21:

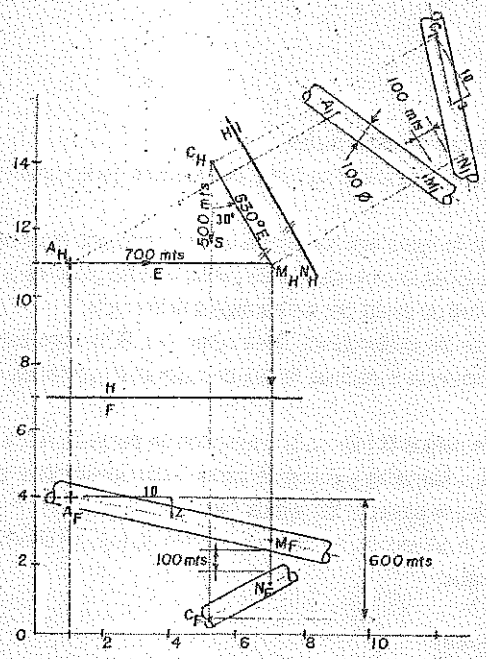


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Desde A trazar una perpendicular a la dirección del crucero, tal como AD; la que dividimos en dos partes iguales, AS = SD.
3) Paralela a la dirección del crucero trazamos las rectas L_1, L_2,...,etc., y a una distancia mayor que SD.
4) Paralela a la perpendicular AD trazamos las distancias a, b,.....,etc., de la dirección del crucero a las rectas L_1, L_2 respectivamente.
5) Con centro en A y de radios a y b, trazamos dos arcos que cortan a las rectas L_1 y L_2; las que nos darán los puntos que pertenecen a la curva (arco parabólico) equidistantes del hidroavión y del crucero.
6) Unir los puntos hallados en las vistas principales, determinándose la trayectoria del submarino.
7) La mínima distancia de los proyectiles disparados, se determina en la perpendicular trazada AD, siendo AS = SD = **mínima distancia = 395mts.**

PROBLEMA 3.22: Una carretera subterránea parte desde A y se dirige al ***Este***, con una pendiente descendente del **20%.** Una línea férrea subterránea parte desde C, distante **700mts** a la derecha, **500mts** detrás **y 600mts** debajo de A., en la dirección **S30°E.** Que pendiente debe tener la línea férrea subterránea para que el cruce vertical libre sea de **100mts** con respecto a la carretera subterránea. La pendiente ascendente debe darse en porcentaje. Considerar que los túneles subterráneos son de sección circular y que su diámetro de sección es de **100mts.** La línea de Pliegue H/F pasa por **y=11. A(1,7,18). ESCALA: 1:20,000.**

SOLUCIÓN 3.22:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto A según su coordenada dada.
2) Trazar la orientación ***Este*** desde el punto A, y en el plano frontal medir la pendiente descendente del **20%**; por ser una recta frontal.
3) Ubicar la posición del punto C de la línea férrea, luego desde este punto trazar la orientación **S30°E**; y la prolongamos hasta que se cruce con la recta con orientación **Este** y que parte desde el punto A.
4) Trazar el plano de elevación **"1"** paralela a la orientación S30°E; luego trasladar las cotas de los puntos **A** y **C**.
5) En el cruce de las orientaciones, encontramos **MN** (recta vertical), estando **M** en la recta con pendiente descendente del **20%**, cuya cota trasladamos al plano de elevación; en este plano de proyección graficamos la sección del túnel de **100mts** y el cruce vertical libre de **100 metros**.
6) Finalmente trazamos la inclinación de la línea férrea, al ubicar el punto **N**; luego medimos la pendiente del **30%** ascendente (respuesta).
7) Completamos la proyección frontal de la línea férrea **CN**, trasladamos la cota de **N** obtenida del plano de elevación **"1"**.

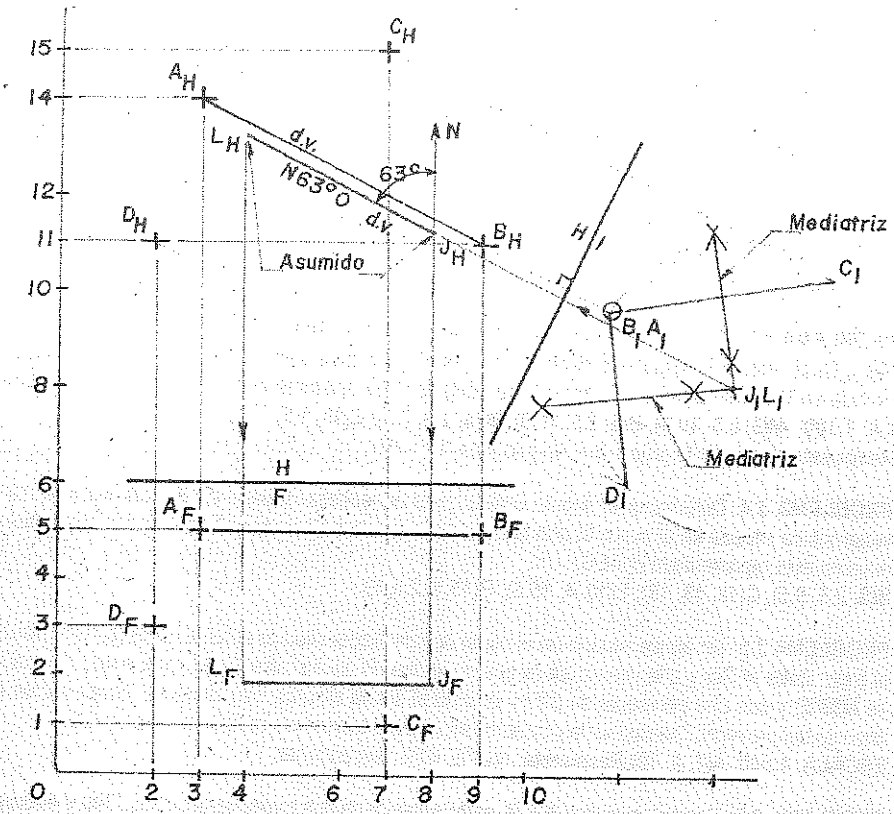
PROBLEMA 3.23: Hallar la dirección y pendiente que debe tener una recta **JL**, para que equidiste de los puntos **A, B, C y D.**
A(3,5,14), B(9,5,11), C(7,1,15), D(2,3,11)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos **A, B, C y D** según sus coordenadas dadas.
2) En la figura adjunta se observa que el eje de un cilindro equidista del contorno de la superficie que contiene a los puntos A, B, C y D.
3) De los cuatro puntos dados y observando la figura adjunta, vemos que es necesario tener una recta en la superficie del cilindro, que después la proyectamos de punta; en este plano de proyección el eje del cilindro (JL) se proyectará de punta, por ser paralela a dicha recta.
4) De los puntos dados escogemos dos puntos cualesquiera, tales como: A y B, unimos estos puntos y observamos que se trata de una recta horizontal; la que después la proyectamos de punta en el plano de elevación "1".
5) En el plano de elevación "1", unimos los puntos D y C con la proyección de punta de AB, luego trazamos las mediatrices de las rectas formadas y donde se corten estas mediatrices, determinamos el centro de la circunferencia que pasa por los puntos dados.
6) El centro de la circunferencia hallada es la proyección de punta de la recta JL (eje del cilindro), la que proyectamos a sus planos principales.

RESPUESTA: Rumbo: N62°O
Pendiente: 0° (recta horizontal)

SOLUCIÓN 3.23:



PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 3.1: Completar las proyecciones de las rectas AB y BC, sabiendo que AB tiene 45% de pendiente; determinar además la orientación y pendiente de BC. Tomar B delante de A.
A(3, 4, 10), B(6.5, 5.5, ?), C(9.5, 7.5, 10.5).
Respuestas: Pendiente de BC = 27° Orientación: N47°E.

PROBLEMA 3.2: Determinar el rumbo, longitud y pendiente del respiradero que se abrirá a partir del punto O para que se una al túnel GJ en un punto a **30mts** de J. **ESCALA: 1:1,000.**
G(2.5, 1.5, 7), J(11.5, 4, 9.5); O(18, 4, 7.5).

PROBLEMA 3.3: Si el brazo de una grúa está ajustado a un ángulo de 60° con el mástil vertical MB; ¿Cuál será la longitud que deberá tener este brazo para levantar verticalmente una carga situada en W?. Con la misma longitud a que ángulo debe ajustarse para descargar en C. **ESCALA: 1:100.** M(9, 6.5. 10.5), B(9, 2.5, 10.5); W(4, 2.5, 7.5); C(13, 1.5, 7.5).
Respuesta: Brazo de la grúa = 6m; Angulo para "C" = 54°.

PROBLEMA 3.4: Determinar el ángulo vertical para un teodolito situado en B, para ver una mira taquimètrica situada en el punto C, con la línea visual apenas librando una obstrucción cuya altura máxima está representada por EG.
B(5, 2.5, 9.5), C(18, 18, 18); E(10, 4, 15.5), G(15.5, 2.5, 9).

PROBLEMA 3.5: Un águila situada en el punto A y un tirador situado en el punto B (B está **10mts** al Este, **2mts** al Sur y a la misma altura que el águila). El águila alza vuelo y sigue una dirección de **N30°E**, y con una pendiente de **30°**; y cuando el águila alcanza una altura de **20mts** recibe el impacto del proyectil. Determinar las caracteristicas de la trayectoria rectilinea del proyectil.
ESCALA: 1:500. A(7, 4, 10) Respuesta: N13°E, 61% descendente.

PROBLEMA 3.6: Desde los puntos A y B, parte superior de dos torres verticales de **300** y **400mts** sobre el nivel del piso respectivamente, se observa un cohete que ascenderá verticalmente. Desde A se observa la punta del cohete antes de iniciar vuelo con una orientación de **S60°E** y bajo un ángulo de **30°**. El cohete inicia su vuelo y al cabo de dos décimas de segundo, es observado desde B a la parte inferior del cohete, con una orientación de **S30°O** y una pendiente ascendente del 50%. Determinar la velocidad (uniforme) del cohete e indicar claramente en su depurado el espacio recorrido en 2 décimas de segundo. **ESCALA: 1:10,000. A(4, 5.5, 15.5), B(13, 6, 17.5).**
Respuestas: Espacio recorrido = 550mts.; velocidad = 2,800 mts/seg.

PROBLEMA 3.7: Un observador situado en O observa un conejo en C, el cual sale en línea recta con dirección **S70°E** y cuando el conejo estaba **25mts.** más alto de donde partió. Hallar las pendientes y las distancias recorridas por el conejo y el proyectil. **ESCALA: 1:2,000. C(6, 5, 15), O(9, 9, 12). Resp.:** Conejo: 88mts., 12.5°; Proyectil: 57mts., 34°.

PROBLEMA 3.8: Donde la cima de una montaña **"A"** que tiene una elevación de **4,000 msnm**, se observa el pico X según una recta cuya orientación es **N45°E**, con una inclinación de **20°**. Desde la cima **"B"** se observa el pico según una orientación **N60°C**, con una pendiente descendente de **15°**. La cima "B" está **10,000mts** al Este y **2,500mts.** al Norte de A. Encontrar la elevación del pico X y de la cima sobre el nivel del mar. **ESCALA: 1:100,000, A(7, 5, 10).**

PROBLEMA 3.9: S es la posición de un submarino justo antes de sumergirse y T es la parte superior de una torre vertical de 25mts sobre el nivel del mar. Desde el punto T se ve el submarino antes de sumergirse en la dirección S55°O. Una vez sumergido el submarino, sigue la dirección S65°E con una pendiente descendente de 25%. Desde el punto T se ve a la parte superior del periscopio vertical de **10mts** de longitud con una visual de orientación de S30°E. Determinar la distancia que existe desde el punto T hasta la segunda posición del submarino (parte inferior del periscopio). ESCALA: 1:1,000, S(7, ?, 12), T(12, 7, ?). **Respuesta:** 58 mts.

PROBLEMA 3.10: Un helicóptero vuela horizontalmente a una altura de **1,000mts** desde un punto de observación "A" en la tierra se le ubica en la dirección N20°O y bajo un ángulo de **50%**; dos minutos más tarde se le observa en la dirección N30°E y bajo un ángulo del **60%**: Determinar la trayectoria (supuesta rectilínea), la distancia recorrida y la velocidad del helicóptero (supuesta uniforme). ESCALA: 1:20,000, N(8, 3, 11).

PROBLEMA 3.11: Un halcón parte al volar desde un punto "A", según una dirección de **N40°E** y una pendiente ascendente del **50%** con una velocidad de **25km/hr.**, al mismo tiempo un cazador situado en "C", dispara con una orientación de **N75°O** y hace impacto en el halcón. Determinar el recorrido del halcón y su altura con respecto al cazador, velocidad de la bala y su pendiente en porcentaje. **ESCALA: 1:100,000. A(4, 8, 17), C(14.5, 5, 16)**
Respuesta: Velocidad = 65km/hr; pendiente: 40%

PROBLEMA 3.12: El eje del túnel AB tiene una orientación **N45°O**, y una pendiente descendente de **30°** y una longitud de **80mts**. El eje del túnel AC tiene una orientación de **N60°E**, un ángulo de presión de **15°** y una longitud de **95mts** si un nuevo túnel a de conectarse entre los puntos B y C. ¿Cuál sería su longitud, dirección y pendiente en porcentaje; así como también cuales serían las profundidades de sus extremos B y C con respecto al nivel del punto "A", tomado como referencia. **ESCALA: 1:2,000. A(9, 6, 14).**

PROBLEMA 3.13: Desde un punto A parte una carretera en la dirección **S40°O**, con pendiente ascendente del **12%**. Desde otro punto C que está a **130 mts** de "A"y en la dirección **S75°O** y más alto que A en **40mts** parte una línea férrea en la dirección **S24°E** y con una pendiente descendente del **5%**. ¿Cuál será la distancia libre vertical entre las dos vías en el punto de cruce?.
ESCALA: 1:2,000. A(9, 3, 14). Respuesta: 24 mts.

PROBLEMA 3.14: Un cazador situado en la cima de una montaña "A" a una altura de **600mts** sobre el nivel del piso; observa un cóndor en tierra según una dirección **S35°E**, con una pendiente descendente del **50%**. El cazador desciende desde la montaña una altura de **300mts.** a razón de **30mts** por cada **100mts**, según una dirección **S60°O**; de donde dispara un proyectil en dirección **S45°E**, que hace impacto en el cóndor que había iniciado vuelo desde tierra según una dirección **S65°O**, con una pendiente ascendente del **70%** y una velocidad de **50km/hr.** Determinar: (a) La distancia recorrida, velocidad y pendiente del proyectil. (b) La distancia recorrida del cóndor y su altura respecto al cazador (segunda posición. **ESCALA: 1:25,000, A(9, 4, 14). Respuesta:** Proyectil: 1,180mts, 54.6 km/hr.; 15° ascendente, Cóndor: 1,080mts, h = 320mts.

PROBLEMA 3.15: Completar la proyección frontal del punto B, sabiendo que la pendiente de AB es el doble de la de BC. **A(4, 3, 12), B(7,?, 10), C(14, 7, 15).**

PROBLEMA 3.16: Algunas partes de un árbol vertical inaccesible puede verse desde "A" y "D", ambos en la orilla de un lago. Un topógrafo centra el teodolito en "A" y mira hacia arriba **20°** en la dirección **"AB"** hacia el pie del árbol. En **"D"** mira hacia arriba **47°** en la dirección **"DE"**, hacia la punta del árbol. Localizar el árbol en los planos horizontal y frontal y encontrar su altura.
ESCALA: 1:250, A(2, 5, 2.5, 15), B(7, ?, 13.5); D(13, 2.5, 18), E(9, ?, 14).

PROBLEMA 3.17: En un concurso de tiro al platillo, el mecanismo que lanza el platillo está en el punto **"A"** y el tirador en el punto **"B"**, situado **10 mts** al Este, **2mts** al Sur y **1 m** por debajo de **"A"**. el platillo es lanzado en la dirección **N35°E**, con una pendiente de **30°**. En el momento que el platillo alcanza la altura de **25mts**, recibe el impacto del disparo. Suponiendo que no influye la gravedad ni la resistencia del aire, determinar su longitud recorrida, dirección y pendiente de la trayectoria del proyectil. **ESCALA 1:500, A(8, 5, 13). Respuesta:** Proyectil: 41mts., N20°E, 40°.

PROBLEMA 3.18: La dirección de vuelo de un Jet que parte del punto "A" es **N45°E** y gana altura a razón de **350m/km**. Determinar la diferencia de altura entre el obstáculo **XY** y el avión en el instante que cruza dicho obstáculo.
ESCALA: 1:1'000,000. A(5, 6, 11); X(7.5, 4, 14), Y(14, 8, 13).

PROBLEMA 3.19: Desde el punto de observación **"A"** se observa un avión en la dirección **N50°O**, con un ángulo de elevación de **36°** y **400mts** por encima del punto **A**. desde otro punto de observación **"B"** situado **300mts** al Este, **50mts** al Norte y **100mts** más alto que **A**; se observa dos segundos más tarde el mismo avión en la dirección **N60°E**, con un ángulo de elevación de **35°** y **200mts** por encima de dicho punto. Hallar la velocidad de dicho avión supuesta uniformemente y la pendiente de su trayectoria supuesta rectilínea.
ESCALA: 1:10,000. A(8, 4, 10.5). Respuesta: Avión: v = 500m/seg, 8°.

PROBLEMA 3.20: Se dan los ejes de las tuberías **AB, CD** y **PQ**, de sección circular y que sus diámetros de sección son de **100mts**. Determinar la visibilidad de dichas tuberías en los planos principales. **ESCALA: 1:20,000.**
A(1, 5, 19), B(7, 10.5, 14.5), C(2, 8.5, 13.5), D(8, 4.5, 18.5); P(6, 13, 21.5), Q(6, 4, 13.5).

PROBLEMA 3.21: Desde una torre de observación situada en **"A"**, a una altura de **125msnm**, se observa un barco en la dirección **S60°E** y con un ángulo de depresión de **18°**. Tres minutos más tarde se observa el mismo barco en la dirección de **50°** y con un ángulo depresión de **12°**. Suponiendo que el barco mantenga el mismo rumbo y velocidad, ¿Cuál sería su velocidad en km/hr y el rumbo tomado? **ESCALA: 1:10,000. A(9, 6, 14). Respuesta:** S75°O, 16km/hr.

PROBLEMA 3.22: Una lancha patrullera situada en **P** sigue una dirección de **N60°E**, con una velocidad de **45mts/min**. Desde **"P"** se observa un submarino **700mts** al Norte, **700mts** al Este y **500mts** debajo del nivel del mar. El submarino asciende con una orientación **S45°O** y una pendiente del **25%**. Determinar la distancia vertical libre en el momento de cruce entre ambas direcciones. ¿Cuál es la distancia recorrida por la lancha patrullera y el submarino; y cuál es su velocidad de este en mts/min. **ESCALA: 1:10,000. P(5, 7, 10).**

PROBLEMA 3.23: La base de una antena de frecuencia modulada (transmisora) de **35mts** de altura, se encuentra situado en el punto **"A"** y la base de la receptora en **"B"**. La máxima altura de obstrucción es **CD**. ¿Cuál será la altura máxima de la antena receptora para recibir una señal en línea recta desde la trasmisora estando **B** debajo de **A**, a **9mts**?
ESCALA: 1:750. A(1, 3, 12), B(17, ?, 9), C(4, 4, 8), D(11, 8, 12).

PROBLEMA 3.24: Dos líneas de enlace de un colector sanitario parten de un punto común "A", en una hora de inspección. La línea de alcantarillado AB tiene **50mts.** de longitud, una caída del **20%** y una dirección de **N60°O**. La línea de alcantarillado AC tiene **35mts** de longitud, una caída de **15°** y un conducto principal, el cual se dirige a un río. Si una nueva línea de alcantarillado a de conectarse entre los puntos B y C, ¿Cuál será su longitud, dirección y pendiente?
ESCALA: 1:1,250. A(9, 6, 14).

PROBLEMA 3.25: Un aeroplano situado en "A" vuela a una altura de **300mts** con respecto al campo de aterrizaje; en un instante dado comienza a descender siguiendo una orientación **S75°O** sabiendo que el recorrido desde A hasta tocar tierra es de **1 km.**, determinar la pendiente de esa trayectoria. **ESCALA: 1:10,000. A(15, 6, 12). Respuesta: 17°.**

PROBLEMA 3.26: Desde un faro situado en el punto "A", a una altura de **75mts** sobre el nivel del mar, se observa un submarino en dirección **N45°O** con un ángulo de presión de **20°**. Cinco minutos más tarde el submarino es observado desde el faro en una dirección **N12°E** con un ángulo de presión de **15°**. ¿A qué distancia del faro está el submarino en cada una de las dos veces en que fue observada, Que distancia recorrió el submarino en los cinco minutos, Cuál fue el rumbo seguido por este y cuál fue su velocidad? **ESCALA: 1:5,000. A(9,6,12).**
Respuesta: 216mts., 285mts., 236mts, N56°E, v = 2780 mts/hr.

PROBLEMA 3.27: En un instante dado un avión y un barco se cruzan sobre una misma vertical AB y a una distancia de **2500mts** sus trayectorias son perpendiculares entre sí; y el avión sigue la dirección **N45°O** con una velocidad de **400km/hr** y con un ángulo de descenso de **20°**. El barco navega a la velocidad de **40km/hr**. Hallar la distancia entre el avión y el barco **3** minutos después del cruce. **ESCALA: 1:100,000, A(9, 6, 11), B(9, ?, 11).**

PROBLEMA 3.28: Un avión es observado en el punto "A" volando a una altura de **60km.** sobre el nivel del mar, con una orientación **N45°E.** Después de **15** minutos se encuentra en **"B"** a **15km** de A y **25km** por debajo de dicho punto. Cuando el avión estaba en A observó un submarino, en **"C"** antes de sumergirse en la dirección N60°O con un ángulo de presión de **30°**. Desde el punto C empieza a sumergirse el submarino con una velocidad de **1200mts/seg**. Siguiendo la dirección **N30°E**, con una pendiente descendente del **25%**, cuando es observado por el avión situado en B de donde se dispara un cohete, bajo un ángulo de presión de **25°** y en dirección **N60°O**, para que haga impacto con el submarino. Se desea saber: distancia recorrida y su velocidad del cohete disparado desde el avión. Distancia recorrida al sumergirse el submarino y en altura respecto al avión en la segunda posición. **ESCALA: 1:2'500,000. A(9, 5, 12).**
Respuesta: Cohete: 160km, 1314m/seg. Submarino: 145km, 70km.

PROBLEMA 3.29: Un **OVNI** que trae la dirección **Norte** y a una altura de **6000 msnm**, observa en el archipiélago de las marinas y en el preciso momento que se lleva a cabo la experiencia científica con el batiscafo Trieste; según una visual de observación de **N30°E** y con un ángulo de presión de **55°**. En ese mismo instante el batiscafo detecta al **OVNI** y empieza a sumergirse en la dirección **Oeste** con una pendiente de **30°** y a una profundidad de **5,000mts** por debajo del nivel del mar. Determinar el recorrido máximo del batiscafo. **ESCALA: 1:200,000. O(7, 6, 15).**

PROBLEMA 3.30: AB mide **3 metros** y va hacia abajo, AC mide **2mts** y va hacia atrás. Dibujar las vistas frontal y horizontal de AB y AC.
ESCALA: 1:100. A(10, 7.5, 13), B(13,?, 18), C(6, 5, ?).

PROBLEMA 3.31: Se desea tender un puente aéreo de una ciudad "A" a otra situada en "D" afectada por un sismo, por medio de un avión Hércules, pero a cauda de obstáculos que existen entre ambas, es necesario hacer escala en tres ciudades. La primera ciudad "B" se encuentra a **60km** de "A" en una dirección **S70°O** con un descenso gradual del **25%**. La segunda ciudad "C" se encuentra a **90km** de "B" en una dirección **S75°E** con una **S75°E** con una pendiente ascendente del **40%**. La tercera ciudad "D" se encuentra a **70km** de "C" en una dirección **N60°E**, con una pendiente decreciente de **15°**. ¿Cuál es la distancia, dirección y pendiente entre las ciudades A y D? **ESCALA: 1:2'000,000. A(7, 6, 15). Respuesta:** 99km, S85°E, O°.

PROBLEMA 3.32: Un OVNI que desciende verticalmente es observado desde "A" en dirección **N60°E** con pendiente ascendente del **100%**; y desde "B" en dirección **N45°O** con pendiente ascendente de **55°**. Determinar las distancias entre los puntos de observación y el OVNI, y el descenso vertical de éste. **ESCALA: 1:1,000. A(4, 3, 12), B(12, 5, 14).**

PROBLEMA 3.33: Un mecanismo situado en "A" lanza un platillo en dirección **N30°E**, con una pendiente ascendente del **100%**. En el momento que el platillo alcanza la altura de dos metros, recibe el impacto de un disparo efectuado por un tirador que se encuentra **3 mts** al Oeste, **1/2 mt** al Norte y a la misma altura que el mecanismo. Determinar ¿Cuál sería su dirección, longitud y pendiente de la trayectoria del proyectil.
ESCALA: 1:100. A(8, 6, 14). Respuesta: N72°E, 4.6mts, 25°.

PROBLEMA 3.34: Desde un avión ubicado en el punto **"A"** y que vuela a una altura de **1.5km** sobre el nivel del mar, se informa a un barco situado en **"B"**, haberse detectado la presencia de un OVNI, estacionario en la dirección **N60°O**, con un ángulo de elevación de **45%** y a una distancia de **5km**. Se desea saber: a) Distancia del **OVNI** al barco. (b) Características de la trayectoria supuesta rectilínea de un cohete disparado desde el barco para que haga impacto en el OVNI.
ESCALA: 1:100,000. A(11, ? , 15); B(15, ?, 19).

PROBLEMA 3.35: El sistema de transporte de una línea de montaje está proyectado de la siguiente manera: La sección **"AB"** tiene una longitud de **40mts** y una dirección **N45°O** con pendiente descendente de **20°**, la sección **"BC"** a nivel tiene una longitud de **30mts** y en dirección Oeste; y la sección **"CD"** tiene una longitud de **45mts** y en dirección **S25°O**, con una pendiente descendente de 25°. Una revisión en los métodos de producción exige la eliminación del sistema de transporte actual y la instalación de un nuevo transporte que vaya directamente de "A" a "D". ¿Cuál sería la longitud verdadera, la pendiente en grados y el rumbo del nuevo transportador?
ESCALA: 1:1,000. **A(14, 5, 14). Respuesta:** AB = 73mts, 17°, S82°O.

PROBLEMA 3.36: Desde el punto "A" de una tubería de alcantarillado que lleva una dirección **N45°E** con una pendiente descendente del **10%** desde el punto "C" que está a **15mts** al Este del punto "A", **7mts** al Norte y **2mts** más bajo que el punto "A"; se proyectó trazar una nueva tubería de alcantarillado en la dirección **N55°O**, con una pendiente decreciente del **18%**. Ambas tuberías tienen un diámetro de **12cm**. ¿Pasará la nueva tubería por encima o por debajo de la antigua y cuál será la nueva tubería por encima o por debajo de la antigua y cuál será la distancia libre vertical entre ellas en el punto de cruce? **ESCALA: 1:100. A(8, 5, 14).**

PROBLEMA 3.37: Completar la proyección frontal de la recta **"XY"** sabiendo que mide **9 cm** de longitud, se corta con **"AB"** y baja de **"X"** a **"Y"**.
ESCALA: 1:1.25. X(2, ? , 14), Y(6, ?, 11); A(4, 7, 10), B(4, 2, 14).

PROBLEMA 3.38: A, B y C son puntos de la superficie del suelo. Un topógrafo centra el teodolito en A y mira hacia abajo, a B y C. los ángulos verticales (ángulos con la horizontal) de 35º para AB y de 18º para AC. Determinar las distancias en línea recta de "A" a "B" y de "A" a "C". Encontrar la diferencia de altura entre B y C, y la longitud verdadera de BC.
ESCALA: 1:1,250. A(10, 7.5, 15), B(15, ? , 12), B(2.5, ?, 11.5).
Respuesta: AB = 70mts, AC = 87mts, 14mts, BC = 125mts.

PROBLEMA 3.39: A es la parte superior de un asta vertical de 30mts de altura; KR, KS y KT son cables del poste al piso. KR mide 15mts. KS mide 18mts., y KT mide 16mts; dibujar la vista frontal de los cables y medir el ángulo que cada uno hace con el poste. ESCALA: 1:1,000.
A(10, 10, 15); K(10, 7.5, 15), R(7, ?, 16.5), S(13, ?, 18), T(11, ?, 13).

PROBLEMA 3.40: Un trasbordador aéreo está planeado para unir dos puntos "A" y "D", pero a causa de obstáculos que existen entre esos dos puntos es necesario establecer una triangulación de tres líneas. Desde "A" a "B" se establece la primera línea con la dirección de N55°E de 41mts de longitud y con una inclinación creciente de 15º. Desde "B" a "C" va la segunda línea con la dirección de N35°O, de 35mts de longitud y una inclinación de 22º ascendente. Desde "C" a "D" va la tercera línea con dirección S75°O, con una longitud de 45mts y una pendiente creciente de 9º. ¿Cuál es la longitud, dirección y pendiente que tiene la línea AD?
ESCALA: 1:1,000. A(9, 6, 15). Respuesta: 57mts., N35°O, 33º.

PROBLEMA 3.41: Un avión de la compañía Lam despega de A en dirección AB, con orientación N45°E; en ese mismo instante desde la torre de control se comunica a un avión de la compañía Faucett localizado en "C", seguir la dirección S40°E, tal que la distancia vertical libre originado por el cruce de las trayectorias, sea de 50mts. Se desea determinar la pendiente de la trayectoria del avión de Faucett. ESCALA: 1:2,500. A(7, 3, 11), B(9, 4, ?), C(6, 7, 15).

PROBLEMA 3.42: Una línea de alcantarillado que une cuatro bocas de inspección se localiza así: la línea que va de la boca "A" a la boca "B", tiene una orientación N45°E, una longitud de 300mts y una pendiente descendente de 10º. De la boca "B" a la boca "C", la línea tiene una orientación hacia el Este, una longitud 250mts y una pendiente descendente de 15º. De la boca "C" a la boca "D", la línea tiene una orientación S30°E, una longitud de 350mts y una pendiente descendente de 18°. Si la línea de alcantarillado estuviera uniendo la boca "A" con la boca "D" directamente, ¿cuál sería su longitud, su pendiente y su orientación?
ESCALA: 1:10,000. A(6, 6, 15). Resp. 80mts., -20º, S82ºE.

PROBLEMA 3.43: Se da la recta AB y el punto M; a partir del punto "M" dado, se desea trazar los segmentos MN, MR y MS, siendo MN de 4cm de longitud y hacia arriba, MR también de 4cm de longitud, perpendicular a AB y formando 60º con el plano frontal de proyección; hacia arriba y hacia atrás, y finalmente MS que tenga una orientación S60°E estando su extremo "S" sobre la recta AB. ESCALA: 1:1. A(6, 9, 13), B(8, 7.5, 13); M(11, 6.5, 15.5).

PROBLEMA 3.44: "M" pertenece al segmento AB de 6cm de longitud. El extremo A esta contenido en el plano horizontal de proyección y el extremo "B" en el plano frontal de proyección. Completar sus proyecciones de (AB), sabiendo que se cumple MA/MB = 3/2. Tomar "B" a la derecha de "M". ESCALA: 1:1. M(3, 5, 9).

PROBLEMA 3.45: Una tubería parte de un punto "A" en dirección al Este, con una pendiente del **20%** en bajada. Otra tubería parte de un punto "C", situado **600mts** a la derecha, **50mts** encima y **300mts** delante de "A", en dirección al Norte. ¿Cuál debe ser la pendiente de esta última, para que en el punto de cruce entre ambas exista una distancia vertical libre de **50mts**. las tuberías tienen **40mts**. de diámetro. **ESCALA: 1:5,000. A(7,4,9)**

PROBLEMA 3.46: Dos túneles de una mina parten de un punto común "A". el túnel **AB** tiene una longitud de **300mts** con una dirección de **S55°E** y una pendiente descendente de **19°**. El túnel **AC** tiene una longitud de **250mts** con dirección **N60°E** y una pendiente descendente de **15°**, ¿Cuál será la longitud, dirección y tanto por ciento de pendiente de un nuevo túnel que una a los puntos "B" y "C"?. **ESCALA: 1:10,000. A(8,6,15).**

PROBLEMA 3.47: Dos líneas de enlace de un colector sanitario parten de un punto común "A" en una boca de inspección. La línea de alcantarillado **AB** tiene **50mts** de longitud, una caída del **20%** y una orientación de **N60°O**. la línea de alcantarillado **AC** se dirige al Norte y mide **80mts** de longitud y tiene una caída del **12%**. Determinar la dirección del conducto principal que pasa por los extremos **B** y **C**, y que se dirige a un río.
ESCALA: 1:250. A(7,2,6.5). Respuesta: N38°E.

PROBLEMA 3.48: Un topógrafo situado en "T" ubica el punto "A" de un túnel **AB** en la dirección **N45°O**, con pendiente descendente de **35°** y distante **100mts**. El punto "B" se le ubica en la dirección **N55°E**, con pendiente descendente de **18°** y distante **120mts**. la altura del instrumento (eje del anteojo) es de **180msnm**; se desea conocer el rumbo, inclinación del túnel en porcentaje y su longitud. **ESCALA: 1:2,000. T(9,?,16)**

PROBLEMA 3.49: **JA**, **JB** y **JC** son cables amarrados a un poste en J. "**JA**" mide **25mts** y va hacia abajo, "**JC**" va hacia delante y hace un ángulo de **15°** con un plano frontal que pasa por "J". Dibujar los tres cables en los planos horizontal y frontal, y encontrar la longitud de **JC**.
ESCALA: 1:1,250. J(10,9,15), A(9, ?,18), B(6,1.5, ?), C(13,2.5, ?)

PROBLEMA 3.50: Hallar la dirección y pendiente que debe tener una recta XY, para que equidiste de las rectas AB, CD y EF; siendo además paralela y de igual longitud a la recta CD.
A(4,5.5,9), B(7,2.5,12.5), C(8,5,11), D(11,2.5,13), E(13,3,10), F(15.5, 4.5,8) F(6, ?, ?).

PROBLEMA 3.51: Hallar la dirección y pendiente que debe tener una recta XY, para que equidiste de las rectas AB, CD y EF; siendo además paralela y de igual longitud a la recta EF.
A(3,5,11), B(6,1,7) C(7,5,9), D(10.5,1,13), E(9.5,4.5,9.5)
F(12.5,2.5,12), G(11,5,8), N(15,1,9.5) Y(7, ?, ?).

PROBLEMA 3.52: Hallar la dirección y pendiente que debe tener una recta JL, para que equidiste de los puntos A, B, C y D. A(6,5,16), B(12,2,13), C(10,1,17), D(5,3,13).

PROBLEMA 3.53: Hallar la dirección y pendiente que debe tener una recta **JB** para que equidiste de las rectas **AB**, **CD** y **EF**, siendo además paralela y de igual longitud a la recta **GH**.
A(1,10,16), B(4,6,12), C(5,10,14), D(8.5,6,18), E(9,10,13)
F(13,6,14.5), G(7.5,9.5,14.5), H(10.5,7.5,14.5), J(4, ?, ?)

PROBLEMA 3.54: Hallar la dirección y pendiente que debe tener una recta JL para que equidiste de los puntos A, B, C y D. A(4,5.5,9), B(7,2.5,12.5), C(8,5,11), D(11,2.5,13)

PROBLEMA 3.55: Completar las proyecciones de las rectas AB, CD y EF, sabiendo que éstas rectas son iguales en longitud y miden 5mts La recta AB es horizontal y está apoyada en los planos F y P, la recta CD es de perfil y está apoyada en los planos H y F; y la recta EF es frontal y está apoyada en los planos H y P. ESCALA: 1:100 A(7,3, ?), C(5, ?,9), E(6, ?,10).

PROBLEMA 3.56: KA, KB y KC representan miembros de acero de una estructura que soporta un malacate de cadena, y están ajustadas al piso en A, a una pared frontal en D; y a una pared de perfil en C, respectivamente. Encontrar la longitud de cada miembro y el ángulo que debe tener el esquinero para ajustarlo a la superficie que va pegado. ESCALA: 1:125.
K(6,7.5,14), A(4,2.5,16), B(5,10,16.5), C(2.5,10,13).

PROBLEMA 3.57: Se dan las rectas JA, JB, JC y JD. (1) Medir el ángulo que JA hace con los planos frontales, (2) Medir el ángulo que JB hace con el plano de perfil, (3) JC hace un ángulo de 25° con la horizontal y se extiende hacia arriba, dibujar su vista frontal y (4) JD mide 2 mts y se extiende hacia atrás, dibujar su vista horizontal. ESCALA: 1:100.
J(7.5,7.5,15), A(7.5,6,13), B(6,2.5,11.5), C(5, ?,19), D(10,5, ?).

PROBLEMA 3.58: Hallar la dirección y pendiente que debe tener una recta JD equidistante de las rectas AB, CD y EF; siendo además paralela y de igual longitud a la recta CD.
A(1,10,14), B(4,7,17), C(5,9.5,15.5), D(8,7,15.5, E(10,7.5,14.5), F(12.5,9,12.5); J(2.5, ?, ?).

PROBLEMA 3.59: Encontrar las dimensiones verdaderas de las rectas JH, JF y JP, y medir el ángulo que JH hace con el plano horizontal, el ángulo que JF hace con el plano frontal, y el ángulo que JP hace con el plano de perfil. J(10,7.5,15), H(5,4,18), F(11.5,10,11.5), P(11.5,2.5,16.5).

PROBLEMA 3.60: Se dan las rectas LS, LM y LK, siendo la longitud de la recta LM de 3cm y de la recta LK de 3.5cm de longitud. Dibujar las proyecciones horizontal y frontal de las rectas mencionadas, y medir el ángulo que LS hace con la horizontal; sabiendo además que LK se extiende hacia delante y LK se extiende hacia abajo.
ESCALA: 1:1 L(10,7.5,15), S(10,4,18), M(13,2.5, ?), K(7.5, ?,11.5).

PROBLEMA 3.61: Hallar la orientación y pendiente de los segmentos PQ y PR, ambos de 4cm de longitud, que tienen los puntos Q y R sobre la frontal AB y la horizontal CD respectivamente. RSVA. ESCALA: 1:1. A(2,5,10), B(7,2,19), C(10,2,11), D(15,2,8); P(8.5,4.5,7.5).

PROBLEMA 3.62: El segmento AB tiene orientación Norte y pendiente ascendente de 45%, estando B 2cm más alto que A. El segmento CD tiene orientación S30°O y D pertenece a AB, El segmento EF tiene orientación S75°E y F pertenece a AB. Hallar las proyecciones horizontal y frontal de AB, CD y EF; y la pendiente en porcentaje de estos dos últimos segmentos y la longitud de DF. Resolver por el método de diferencia de cotas. ESCALA: 1:1. E(9,2,12), A(13,1,5.5), C(15,4,10.5).

PROBLEMA 3.63: Desde A, B y C se observa el extremo superior P de un obelisco de 4mts de altura. Las visuales de A y B tienen ángulos de elevación de 45°. Completar las proyecciones horizontal y frontal de las visuales AP, BP y CP; determinando de las dos primeras su orientación, y de la última su orientación y ángulo de inclinación. Resolver sin vistas auxiliares.
ESCALA: 1:100. A(16,3,12.5), B(10,3,13.5), C(4,5,11).

CAPITULO 4:

EL PLANO

4.1 SU DETERMINACION.

El plano es una superficie en la que una recta que conecta dos puntos cualesquiera descansa por completo sobre ella. Dos líneas cualesquiera trazadas en un plano deben intersecarse o ser paralelas entre si. La figura **4.1** muestra cuatro formas de representar un plano oblicuo o inclinado, ya sea mediante dos rectas concurrentes (figura 4.1 **(a)**) o bien utilizando dos rectas paralelas, tres puntos no colineales o un punto y una recta, como se indica en la figura **4.1 (b), (c)** y **(d)** respectivamente.

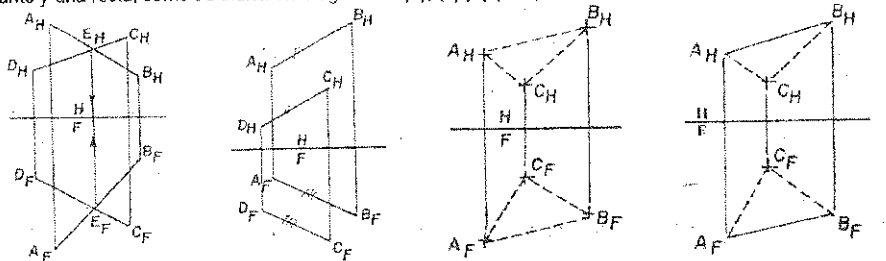


Fig. 4.1 Determinación de planos.

4.2 POSICIONES PARTICULARES DE UN PLANO EN EL ESPACIO.

Es la posición que adopta un plano de ser paralelo o perpendicular a los planos principales. Para ambas posiciones el plano se proyecta de canto en uno de los planos principales.

4.2.1 CON RESPECTO AL PARALELISMO.

Un plano al ser paralelo a un plano de proyección, se proyecta sobre él en dimensión verdadera. Como son tres los planos principales, se presentan tres casos: Plano Horizontal (Plano de Nivel), Plano Frontal y Plano de Perfil.

1. PLANO HORIZONTAL.

Es aquel plano que aparece de canto y paralelo al plano principal horizontal, proyectándose sobre él en dimensión verdadera; tal como se muestra en la figura 4.2.

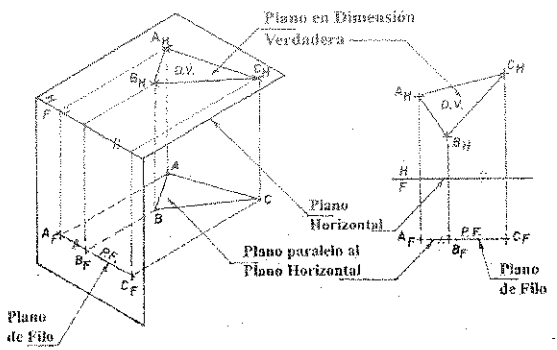


Fig. 4.2 Plano Horizontal.

2. PLANO FRONTAL.

Es aquel plano que aparece de canto y paralelo al plano principal frontal, proyectándose sobre él en dimensión verdadera; tal como se muestra en la figura 4.3.

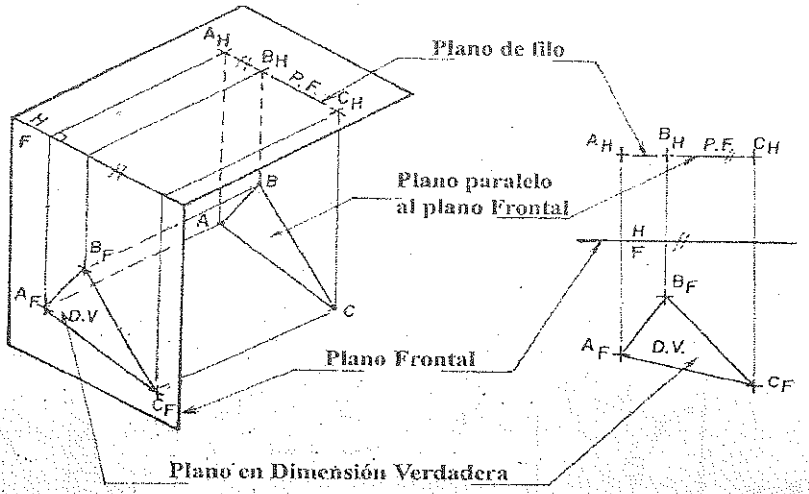


Fig. 4.3 Plano Frontal.

3. PLANO DE PERFIL.

Es aquel plano que aparece de canto y paralelo al plano principal de perfil, proyectándose sobre él en dimensión verdadera, tal como se muestra en la figura 4.4.

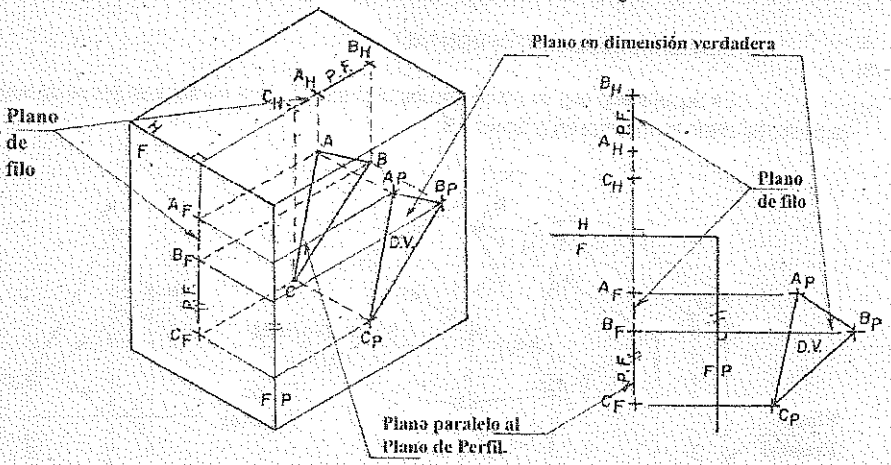


Fig. 4.4 Plano de Perfil.

4.2.2 CON RESPECTO A LA PERPENDICULARIDAD.

Un plano al ser perpendicular a un plano de proyección, se proyecta sobre él de canto. Como son tres los planos principales, se presentan tres casos: Plano Vertical, Plano Normal (Ortofrontal) y Plano Horizontal – Frontal (Ortoperfil).

1. PLANO VERTICAL.

Es aquel plano que es perpendicular al plano principal horizontal y se proyecta sobre él de canto, tal como se muestra en la figura 4.5.

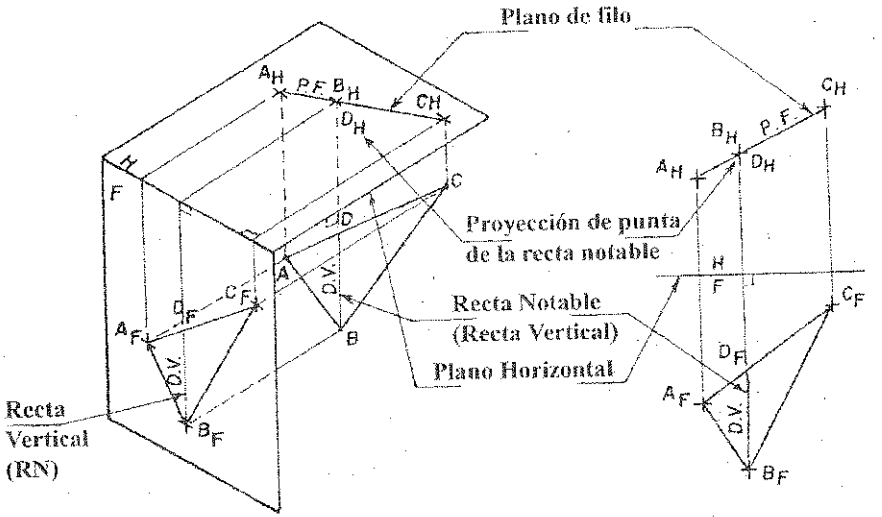


Fig. 4.5 Plano Vertical.

2. PLANO NORMAL (ORTOFRONTAL).

Es aquel plano que es perpendicular al plano principal frontal y se proyecta sobre él de canto, tal como se muestra en la figura 4.6.

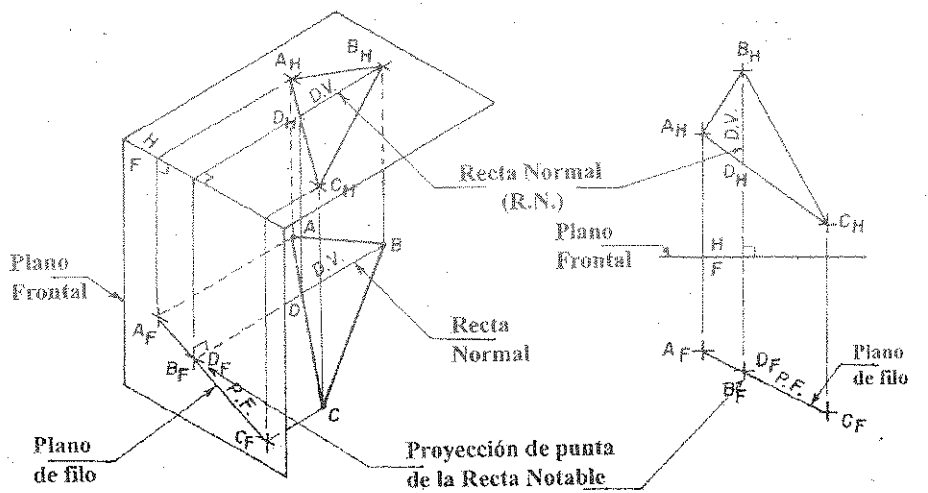


Fig. 4.6 Plano Normal.

3. PLANO HORIZONTAL – FRONTAL (ORTOPERFIL).

Es aquel plano que es perpendicular al plano principal de perfil y se proyecta sobre él de canto, tal como se muestra en la figura 4.7.

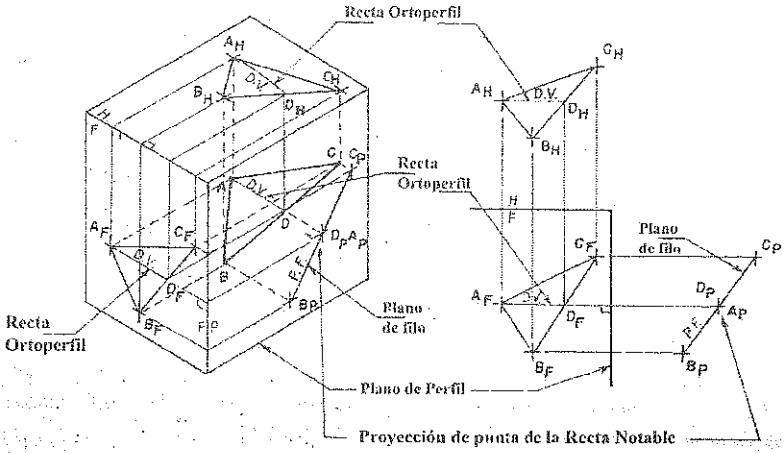


Fig. 4.7 Plano Orto perfil.

4.3 RECTA CONTENIDA EN UN PLANO.

Si una recta corta a dos rectas de un plano, en puntos no coincidentes, entonces se dice que está contenida en el plano. En la figura 4.8 se dan las proyecciones principales horizontal y frontal del plano ABC, y la proyección horizontal de la recta RS; se desea determinar la proyección frontal de dicha recta.

PROCEDIMIENTO:

1. La recta RS corta a las aristas AB y AC del plano ABC, en los puntos 1 y 2 respectivamente.
2. Proyectamos los puntos 1 y 2 al plano frontal, luego unimos estos puntos y la prolongamos hasta que corte a las líneas de referencia de R y S respectivamente; determinándose de esta manera la proyección frontal de la recta dada; tal como se observa en la figura 4.8.

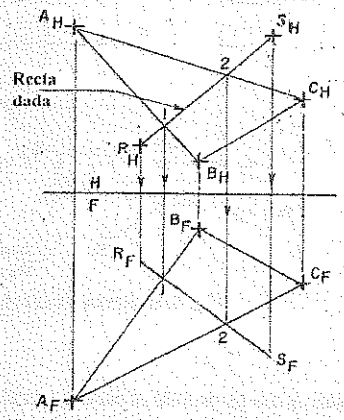


Fig. 4.8 Recta contenida en un plano.

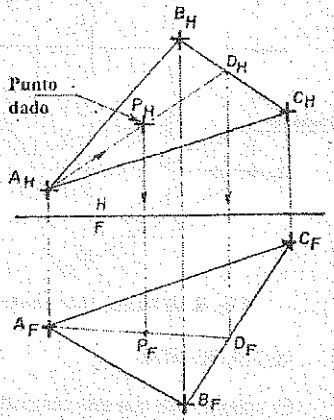


Fig. 4.9 Punto contenido en un plano.

4.4 PUNTO CONTENIDO EN UN PLANO.

Si un punto está dentro del contorno de la proyección de un plano, entonces se dice que esta recta está contenida en una recta del plano. En la figura 4.9 se dan las proyecciones principales horizontal y frontal del plano **ABC** y la proyección horizontal del punto **P**; se desea determinar la proyección frontal del punto **P**.

PROCEDIMIENTO:

1. En el plano horizontal trazamos la recta **AD** que pase por el punto dado **P**.
2. Desde la proyección horizontal proyectamos el punto **D** al plano frontal, luego en este plano de proyección unimos los puntos **A** y **D**, y donde corte a la línea de referencia del punto **P**, trazada desde la proyección horizontal, determina la proyección frontal de este punto.

4.5 RECTAS NOTABLES EN EL PLANO.

Las Rectas Notables (**RN**) son aquellas rectas que están contenidas en plano y que permiten proyectar a un plano oblicuo de canto. Se tienen las siguientes rectas notables: Recta Horizontal, Recta Frontal, Recta de Perfil, Recta Vertical, Recta Normal y la Recta Ortoperfil.

4.5.1 RECTA HORIZONTAL.

Es aquella recta paralela al plano principal horizontal y se proyecta sobre el en dimensión verdadera, dicha recta está contenida en un plano; tal como se observa en la figura **4.10**. Una recta horizontal determina la orientación de un plano. Todas las rectas horizontales que están el mismo plano son paralelas, a menos que el plano sea horizontal, en donde todas las rectas de este plano son horizontales pero no necesariamente paralelas.

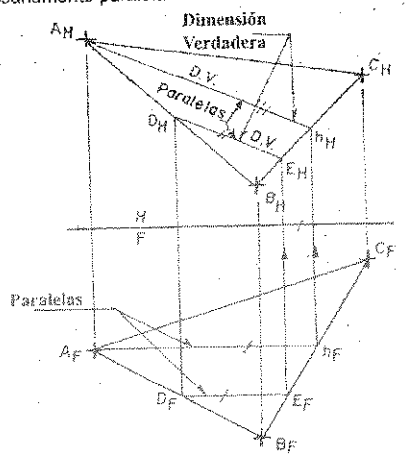


Fig. 4.10 Recta Horizontal.

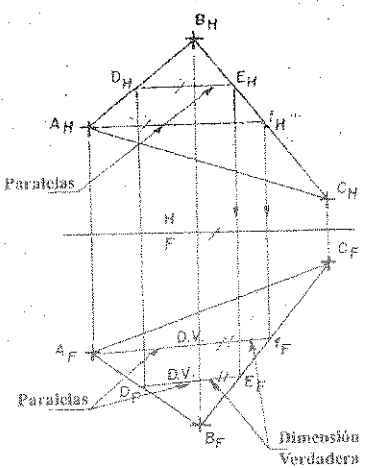


Fig. 4.11 Recta Frontal.

4.5.2 RECTA FRONTAL.

Es aquella recta que esta contenida en un plano y que es paralela al plano principal frontal y se proyecta sobre él en dimensión verdadera, tal como se observa en la figura **4.11**. Todas las rectas frontales que están en el mismo plano, son paralelas a menos que el plano sea frontal, en donde todas las rectas de este plano son frontales, pero no necesariamente paralelas.

4.5.3 RECTA DE PERFIL.

Es aquella recta que esta contenida en un plano y que es paralela al plano principal de perfil y se proyecta sobre él en dimensión verdadera, tal como se observa en la figura 4.12. Todas las rectas de perfil que están dentro del mismo plano, son paralelas, con excepción de las que están dentro de un plano de perfil, que no necesariamente lo son.

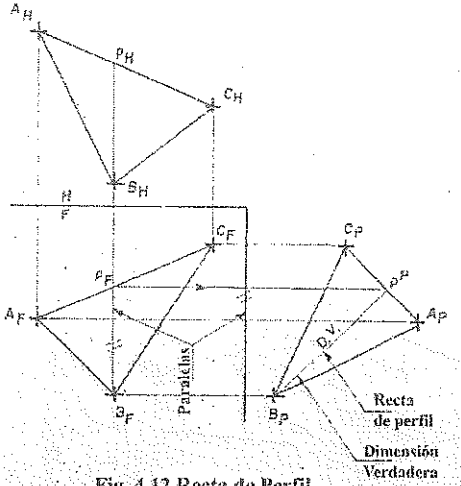


Fig. 4.12 Recta de Perfil.

4.6 ORIENTACION DE UN PLANO.

Es el ángulo comprendido entre una recta horizontal contenida en un plano oblicuo, con respecto al meridiano (linea Norte Sur). Definido de otra manera diremos que es la dirección de una linea horizontal que está en el plano. Este término es empleado por los ingenieros de minas, por los geólogos, para indicar la dirección o rumbo de una linea formada por la intersección de un estrato o vena con un plano horizontal.

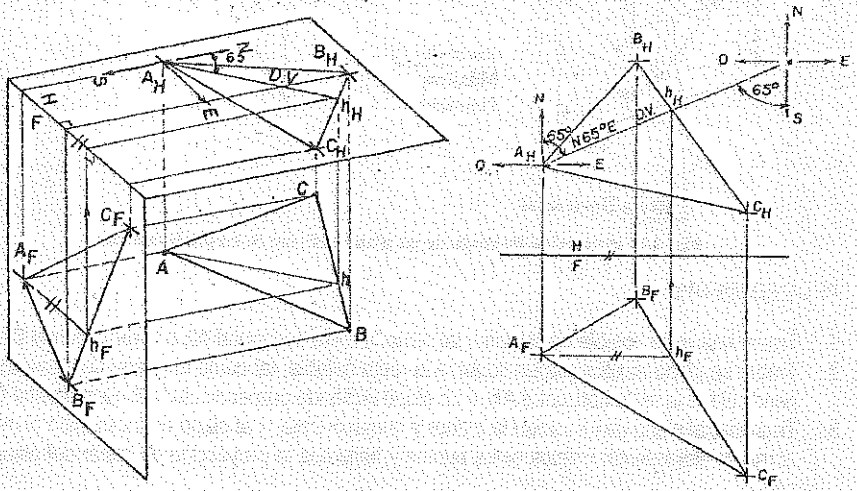


Fig. 4.13 Orientación de un Plano.

Para encontrar la dirección del plano **ABC**, trazamos la recta horizontal **Ah**. La proyección horizontal de esta recta notable es la ***orientación del plano***, cuyo ángulo de dirección de esta recta tanto como del plano es de **N65°E**; aunque todas las recta paralelas a esta, tienen la misma dirección, se toma a esta recta **Ah** por ser la mas larga; tal como se observa en la figura **4.13**.

4.7 PROYECCION DE CANTO O FILO DE UN PLANO OBLICUO.

Un plano oblicuo se proyectará de canto o filo, en cualquier plano de proyección, cuando una recta del plano se proyecte de punta. En la figura **4.14** se muestran las proyecciones principales horizontal y frontal de un plano oblicuo **ABC**; y la proyección de canto de dicho plano en solución isométrica.

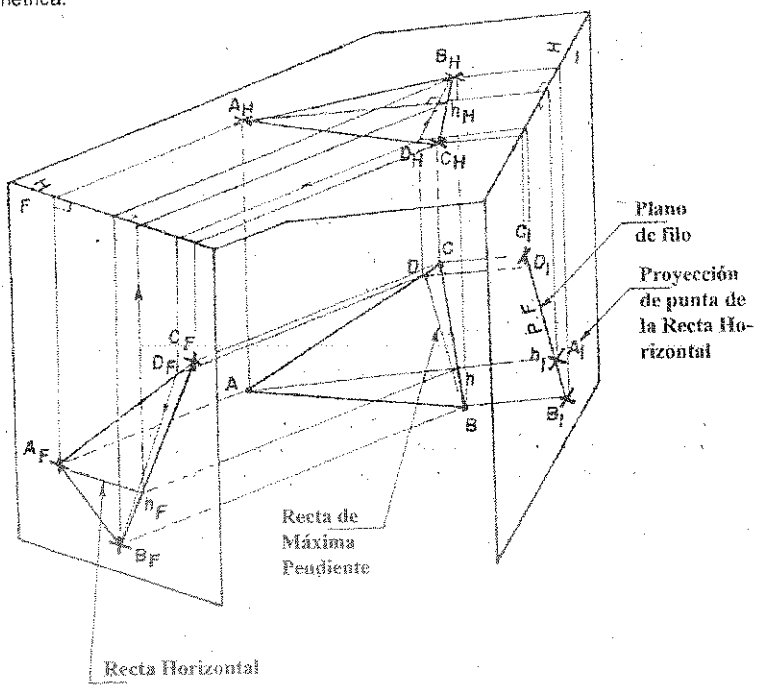


Fig. 4.14 Proyección de canto de un plano oblicuo: Solución isométrica.

PROCEDIMIENTO:

1. Trazar una recta notable en el plano, tal como la recta horizontal Ah o la recta frontal Cf.
2. Trazar un plano auxiliar perpendicular a la recta notable, tal como un plano de elevación perpendicular a la recta horizontal **Ah**, o un plano inclinado perpendicular a la recta frontal **Cf**.
3. Trasladar al plano de elevación la menor y la mayor cota, y al plano de inclinación el menor y el mayor alejamiento; unimos estos puntos y hallamos la proyección de canto del plano oblicuo.
4. Cuando la recta notable del plano oblicuo se proyecta de punta, el plano se proyectará de canto; tal como se observa en la figura **4.15**.

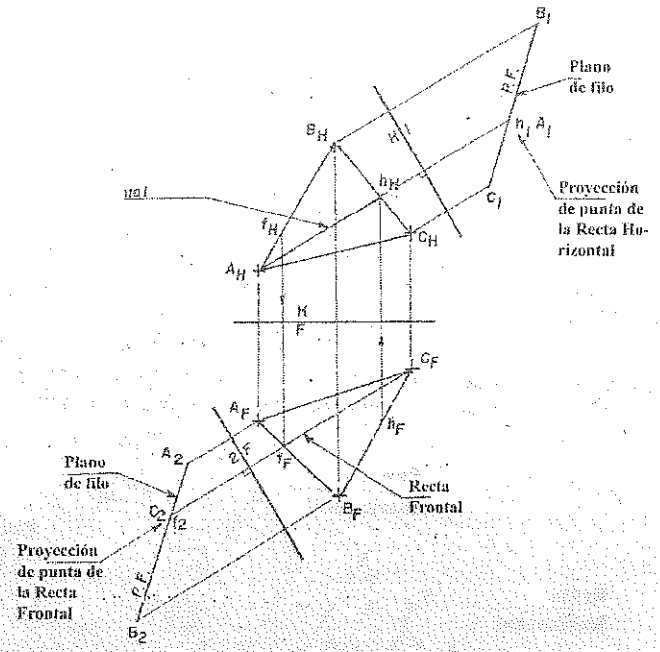


Fig. 4.15 Proyección de canto de un Plano Oblicuo.

4.8 INCLINACIÓN DE UN PLANO.

Es el ángulo comprendido entre un plano oblicuo proyectado de canto con respecto a un plano horizontal. Este ángulo siempre se halla en un plano auxiliar de elevación y se mide en grados, o también e términos de porcentaje de grados, que se calcula por la siguiente expresión:

$$\text{Porcentaje de grado} = \frac{\text{Altura vertical}}{\text{Distancia horizontal}} \text{x} 100$$

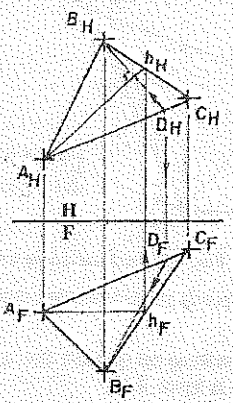


Fig. 4.16 Vistas principales de un plano oblicuo.

En la figura **4.16** se dan las proyecciones horizontal y frontal del plano oblicuo **ABC**, se desea determinar el ángulo de inclinación verdadera del plano dado.

PROCEDIMIENTO:

1. Trazar la recta horizontal **Ah** en el plano oblicuo **ABC**; tal como se observa en la figura **4.17**.
2. Trazar el plano de elevación perpendicular a la recta horizontal **Ah** de este plano.
3. Trasladar al plano de elevación, la menor y la mayor cota del plano oblicuo **ABC**, unimos estos puntos y hallamos la vista de canto de este plano. El punto de mayor cota es el punto más bajo del plano.
4. Trazar por los puntos **A**, **B** y **C** del plano oblicuo, rectas paralelas al plano horizontal; estas rectas son planos horizontales y el ángulo **θ** que forma el plano **ABC**, proyectado de canto en el plano de elevación, con el plano horizontal, representa el ángulo de inclinación verdadera.

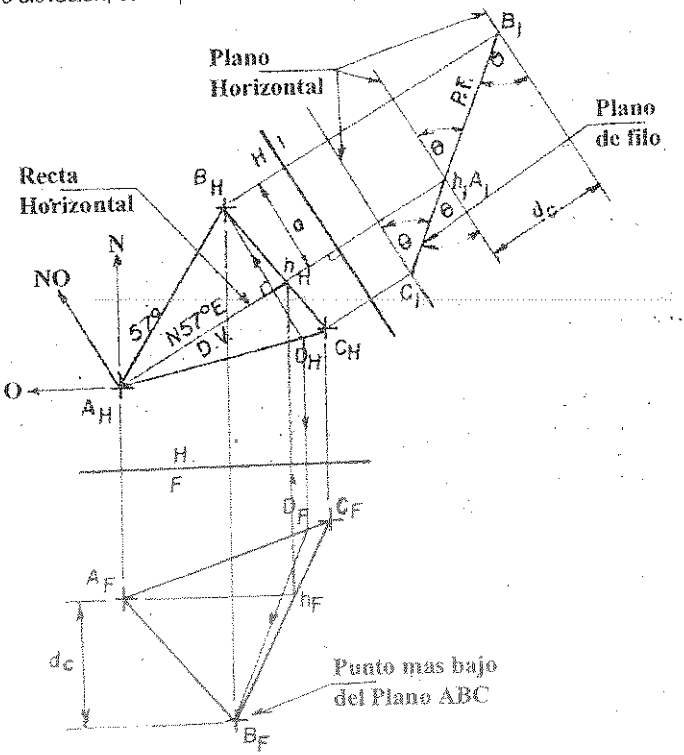


Fig. 4.17 Inclinación de un Plano.

La pendiente de un plano puede ser ascendente o descendente.

1. ASCENDENTE:
   De B_1 hacia C_1, la pendiente del plano se dice que es ascendente; tal como se observa en el plano de elevación "1" de la figura **4.17**.
2. DESCENDENTE: (Depresión o que baja)
   De C_1 hacia B_1, la pendiente del plano se dice que es descendente; tal como se observa en el plano de elevación "1" de la figura **4.17**.

4.9 RECTA DE MAXIMA PENDIENTE.

La Recta de Máxima Pendiente (RMP), es aquella recta que está contenida en un plano oblicuo y que es perpendicular a todas las rectas horizontales del mismo plano; tal como se observa en la figura 4.18. En la figura 4.18 se dan las proyecciones principales horizontal y frontal de un plano oblicuo ABC; se desea trazar en este plano su Recta de Máxima Pendiente.

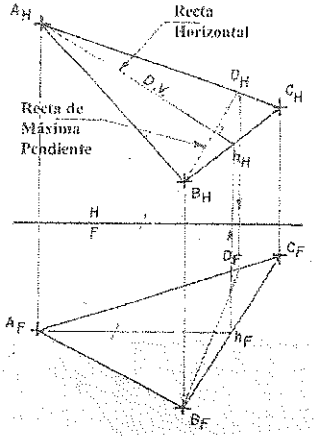


Fig. 4.18 Recta de Máxima Pendiente.

PROCEDIMIENTO:

1. Trazar la recta horizontal Ah en el plano oblicuo ABC, siendo la orientación de esta recta Nβ°E.
2. En el plano horizontal y desde el punto B, trazar la ***Recta de Máxima Pendiente*** perpendicular a la recta horizontal Ah; tal como DB.
3. Trazar el plano de elevación perpendicular a la recta horizontal Ah del plano oblicuo ABC, o paralela a la recta de máxima pendiente. En este plano de proyección la RMP se proyecta en dimensión verdadera, siendo θ la pendiente de esta recta y el ángulo de inclinación del plano ABC proyectada de canto.
4. La dirección de la RMP DB se observa en el plano horizontal, siendo esta NO; que indica la dirección del punto mas bajo del plano o el de mayor cota; tal como se observa en la figura 4.19 (a) y (b).

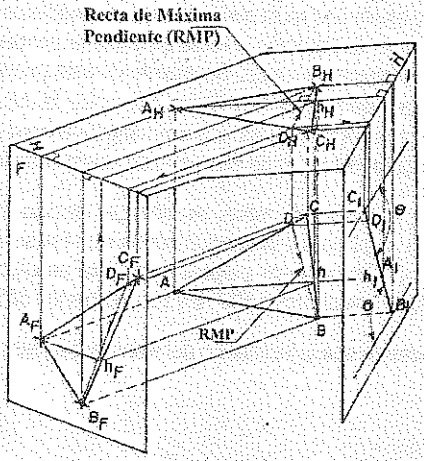


Fig. 4.19 (a) Recta de Máxima Pendiente (isométrico).

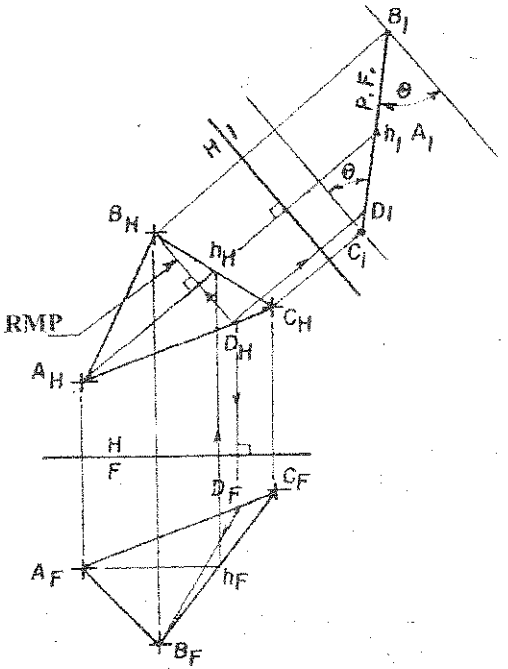


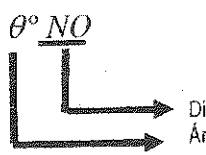
Fig. 4.19 (b) Recta de Máxima Pendiente.

La pendiente de la ***RMP*** es el mismo ángulo de la inclinación de un plano. La recta de máxima pendiente indica el sentido del recorrido que sigue un objeto cuando rueda sobre este plano.

En el plano no existe otra recta que tenga mayor pendiente que la recta de máxima pendiente. Cuando en un plano de elevación la ***recta de máxima pendiente*** aparece en su dimensión verdadera, el plano se proyecta de canto. Generalmente esta pendiente se expresa en términos de buzamiento, como por ejemplo, **θ°NO**, donde **NO** indica la dirección de la recta de máxima pendiente. El ángulo **θ** para esta recta es el mismo ángulo **θ** para el plano. La recta de máxima pendiente indica la dirección del recorrido que sigue un objeto cuando rueda sobre este plano.

En geología e ingeniería de minas se utiliza el término "buzamiento" para expresar el ángulo de pendiente de un plano. La inclinación puede expresarse como por ejemplo, **52°NO**. Se entiende que la dirección Noroeste es perpendicular a la orientación. Puede decirse que este plano pasa por el punto **A**, con dirección **N57°E** y con inclinación **52°NO**.

Finalmente diremos que la inclinación del plano puede expresarse de la siguiente forma:



Dirección de la Recta de Máxima Pendiente.
Ángulo de inclinación del plano y de la **RMP**.

4.10 DIMENSIÓN VERDADERA DE UN PLANO OBLICUO.

Un plano oblicuo se proyecta en dimensión verdadera, cuando es paralelo a un plano de proyección. En la figura 4.20 se dan las proyecciones principales horizontal y frontal del plano oblicuo ABC, se desea hallar la dimensión verdadera de este plano.

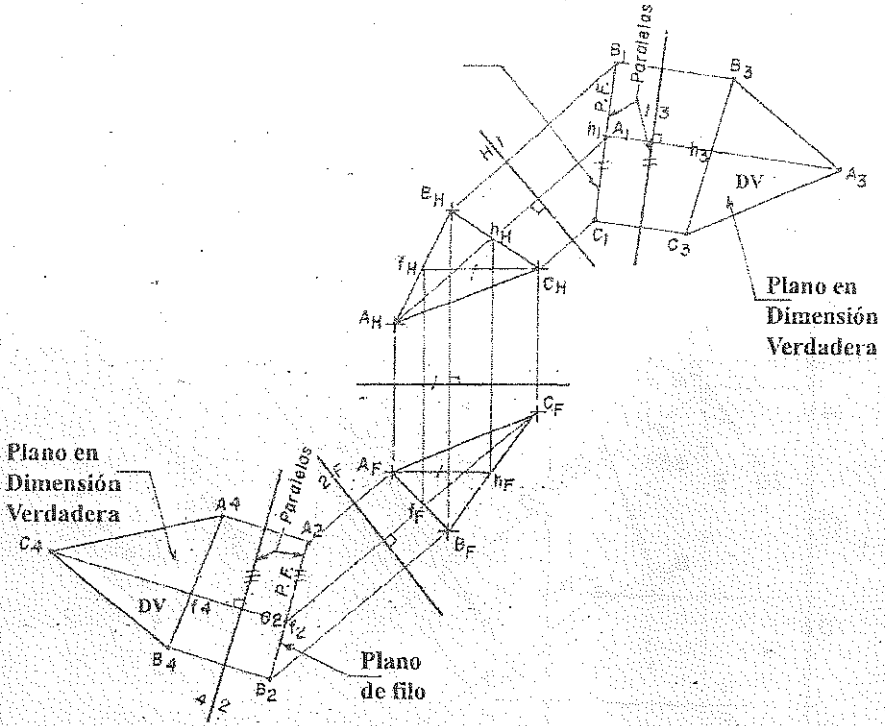


Fig. 4.20 Dimensión Verdadera de un Plano.

PROCEDIMIENTO:

1. Hallar la vista de canto del plano oblicuo, utilizando un plano de elevación o de inclinación.
2. Trazar un plano auxiliar paralelo a la vista de canto del plano oblicuo, en este plano de proyección el plano ABC se proyecta en dimensión verdadera.

4.11 LOCALIZAR UN PUNTO Y UNA RECTA EN UN PLANO, CONOCIENDO SU ORIENTACIÓN Y SU INCLINACIÓN.

Todo punto o recta contenida en un plano, puede hallarse en un plano de elevación, cuando el plano dado se proyecte de canto; luego completamos sus proyecciones principales. Hallar las proyecciones principales horizontal y frontal del punto A y de la recta BC; si el punto y la recta dada son coplanares con el plano que pasa por el punto Q, que tiene una orientación es S55°E y su inclinación 40°SO. Q(2,5,14.5); A(4, - ,10.5), B(3,3, -), C(5,7.5, -)

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar en el plano horizontal y desde el punto **Q**, la orientación **S55°E**; tal como se observa en la figura **4.21**.
2) Trazar el plano de elevación **"1"** perpendicular a la orientación trazada, luego medimos la inclinación de **40°** con respecto a un plano horizontal; determinándose la vista de canto del plano, que pasa por el punto **Q**; y donde corte a los lugares geométricos de **"B"** y **"C"**, y a la línea de referencia del punto **"A"**, hallándose la proyección de estos puntos en el plano de elevación.
3) Luego completamos la proyección horizontal de **B** y **C**; y la proyección del punto A en el plano frontal.

SOLUCIÓN:

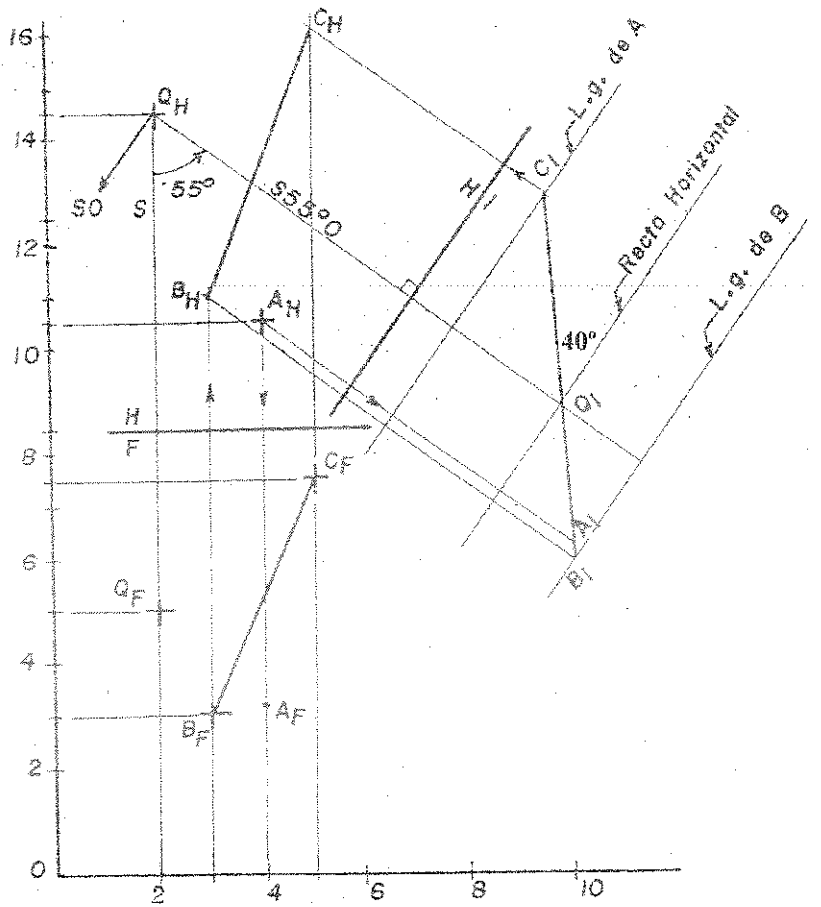
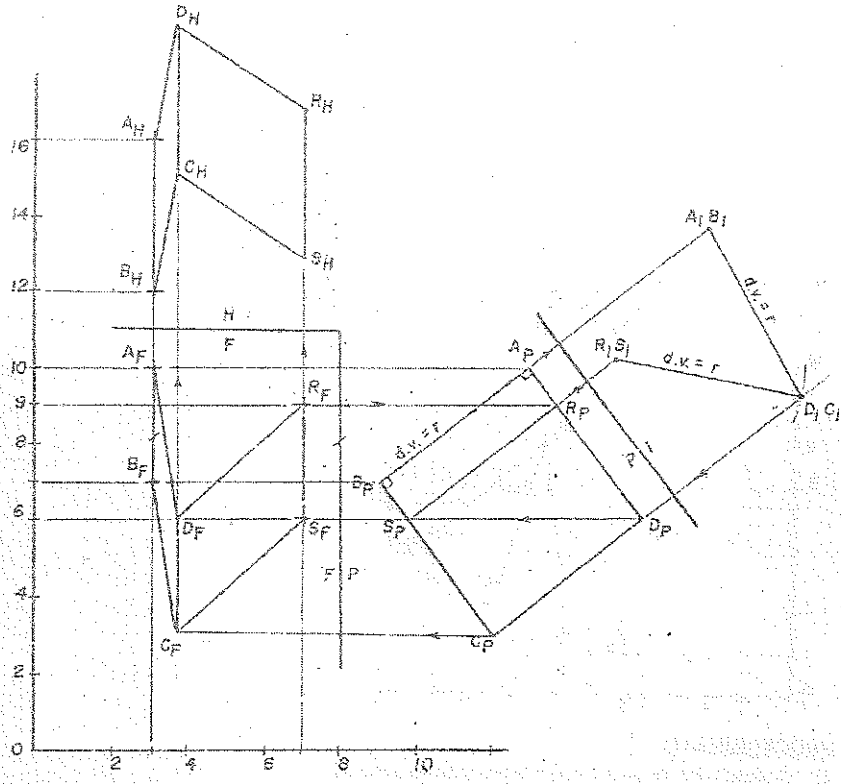


Fig. 4.21 Localizar un punto y una recta en un plano.

PROBLEMAS RESUELTOS

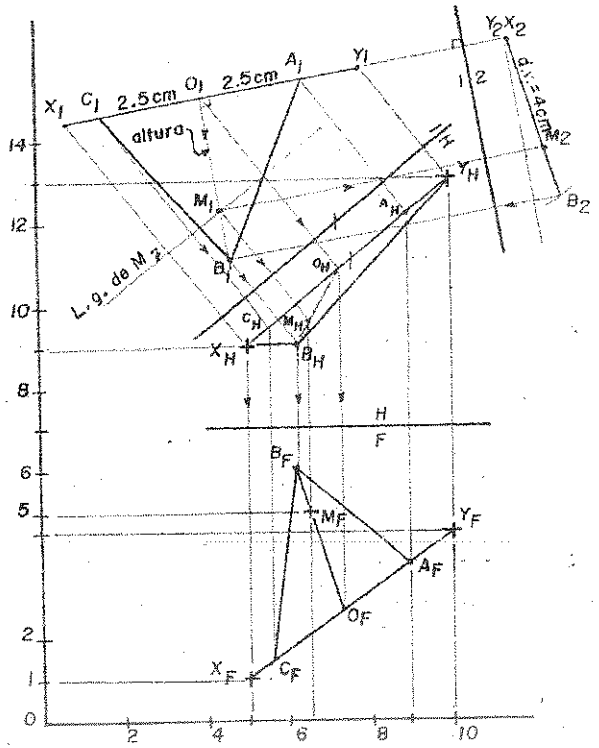
PROBLEMA 4.1: ABCD y RSCD son dos cuadrados que tienen el lado CD común. Sabiendo que CD está más abajo que RS y AB, completar las proyecciones de estos cuadrados.
A(3,10,16), B(3,7,12); R(7,9,?), S(7,6,?).
SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la dimensión verdadera del lado AB; luego proyectar la punta trazando el plano auxiliar "1" perpendicular a la recta AB.
3) En el plano de Perfil y desde A y B, trazar las rectas AD y BC perpendicular a la recta AB. (Primera condición de perpendicular).
4) Las rectas AD y BC cortan a las líneas de referencia de R y S respectivamente, determinándose la proyección de perfil de estos puntos; luego completamos su proyección horizontal.
5) En el plano auxiliar "1" el lado RS se proyecta de punta, porque en el plano de perfil se proyecta en dimensión verdadera.
6) En el plano auxiliar "1", con centro en AB y RS, y de radio igual al lado del cuadrado (r = AB =RS); trazar dos arcos que se cortan en DC, luego proyectarla en todos los planos utilizados.

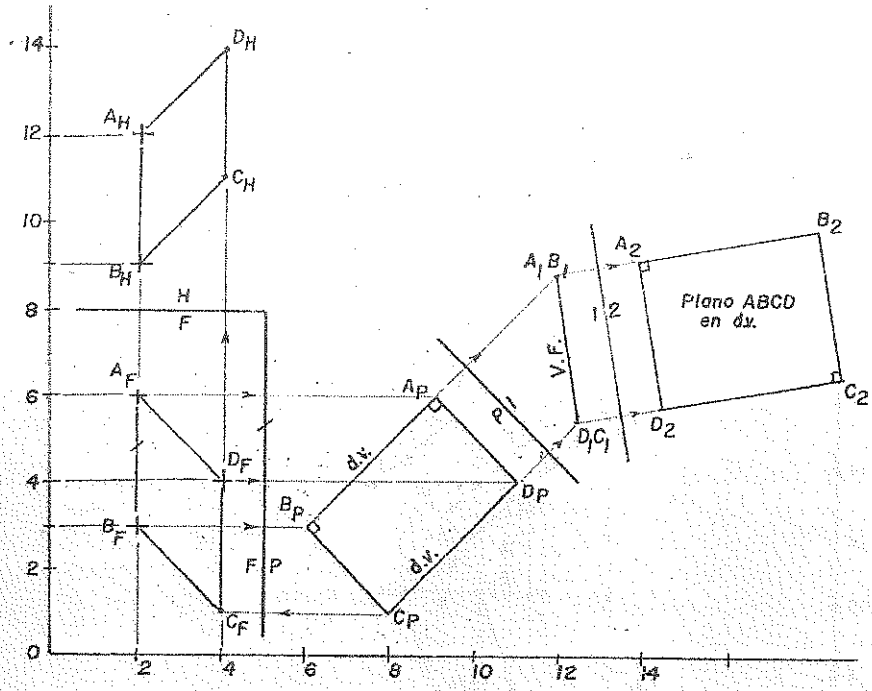
PROBLEMA 4.2: La base de un triángulo isósceles mide **5cm** y descansa sobre la recta XY. La altura mide **4cm** siendo **M** un punto perteneciente a dicha altura. Con estos datos determinar las proyecciones del triángulo ABC, sabiendo además que el punto A descansa en XY.
A(9,?,?); M(6.5,5,?); X(5,1,9), Y(10,4.5,13)
SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la dimensión verdadera de la recta XY, trazando el plano de elevación "1", paralela a la recta XY.
3) Unir la recta XY y donde corte a la línea de referencia de "A", hallamos su proyección horizontal y frontal.
4) Ubicamos al punto "A" en el plano de elevación y sobre la recta XY, y desde este punto medimos los 5cm de la base AC del triángulo isósceles, ubicándose el extremo C, luego la proyectamos a los planos principales.
5) Trazar el plano auxiliar "2", perpendicular a la recta XY, proyectándose de punta esta recta en este plano de proyección.
6) En el plano auxiliar "2" y desde XY trazar un arco de radio igual a 4cm, ubicándose el extremo "B" del triángulo isósceles; luego proyectamos este punto a todos los planos de proyección utilizados.
7) En el plano de elevación y desde el punto medio de AC trazar la altura del triángulo isósceles, perpendicular a la recta AC. Esta altura corta al *l.g.* de *M*, ubicándose su proyección en el plano de elevación; luego la proyectamos al plano auxiliar "2", y a los planos principales.
8) Finalmente completar las proyecciones del triángulo isósceles **ABC** en sus planos principales.

PROBLEMA 4.3: Las rectas AB y AD son los lados de un rectángulo ABCD, completar sus proyecciones y hallar su dimensión verdadera. A(2,6,12), B(2,3,9), D(4,4,?)
SOLUCIÓN:

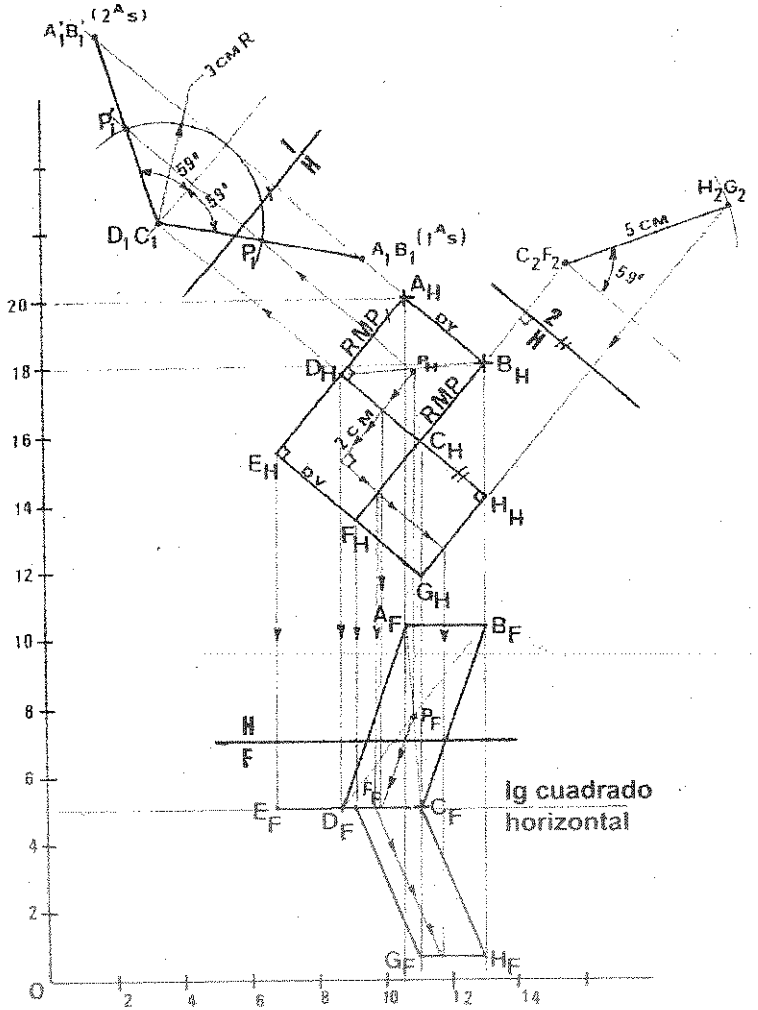


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la dimensión verdadera de **AB**, luego proyectarla de punta trazando el plano auxiliar **"1"** perpendicular a ella.
3) En el plano de perfil y desde el punto **A**, trazar una recta perpendicular a la recta **AB** y la prolongamos hasta que corte a la línea de referencia del punto **D**; luego hallamos su proyección horizontal y su proyección en el plano **"1"**.
4) En el plano auxiliar **"1"** el rectángulo **ABCD** se proyecta de canto, enseguida trazar el plano auxiliar **"2"** paralelo a la proyección de canto del rectángulo **ABCD**; en este plano de proyección el rectángulo se proyecta en dimensión verdadera.
5) Luego completamos las proyecciones del rectángulo **ABCD** en sus planos principales.

PROBLEMA 4.4: En el punto medio del rectángulo **ABCD** se deja una billa que rueda sobre él **3cm**, hasta encontrar al cuadrado horizontal **CDED**; sobre el cual rueda **2cm** y encuentra un obstáculo que desvía su trayectoria en **90°**, y sigue rodando hasta el borde y en él encuentra al rectángulo **CFGH**, sobre el cual rueda **5cm**; finalizando así su recorrido. Completar las proyecciones de dichos planos y la trayectoria de la billa, sabiendo que el ángulo de pendiente de **ABCD** y **CFGH** es el mismo.
ESCALA: 1:1 A(10.5, ? ,20), B(13, ? ,18), C(11,5, ?)

SOLUCIÓN:

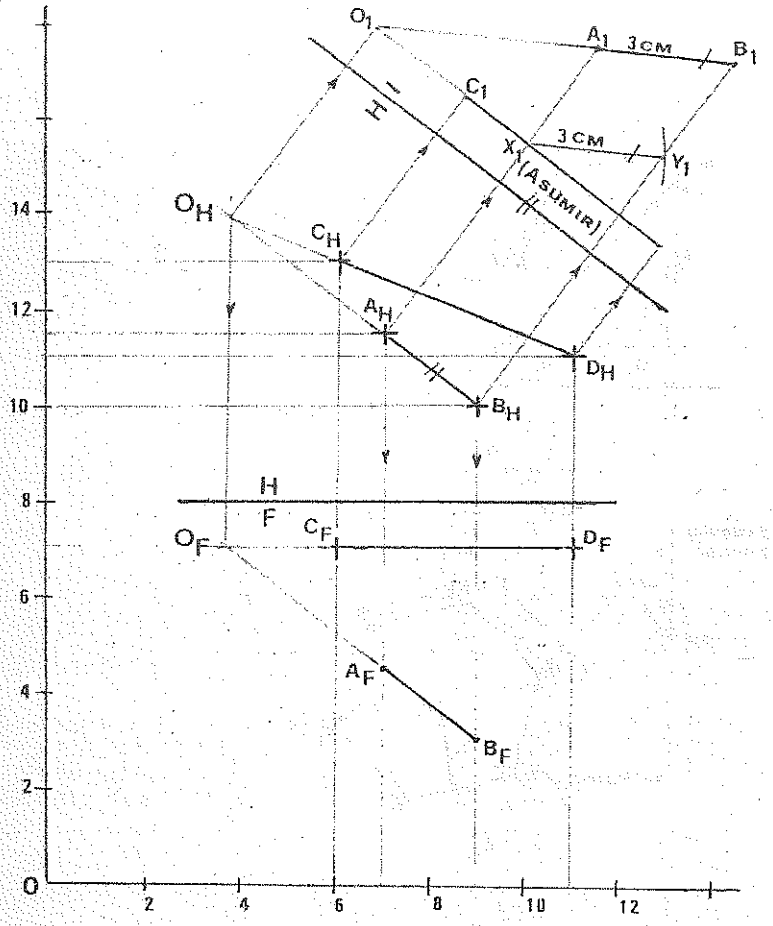


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos A, B y C según sus coordenadas dadas.
2) El cuadrado horizontal se proyecta de canto en el plano frontal y en dimensión verdadera en el plano horizontal. El rectángulo **ABCD** y el cuadrado horizontal **CDEF** tienen al lado **CD** común, en dimensión verdadera. En el plano horizontal desde el punto **B** trazar una recta perpendicular a la recta **AB** hasta cortar a la línea de referencia del punto **C**, determinándose su proyección horizontal.
3) Trazar en el plano horizontal **CD** paralelo a **AB**, luego completamos el cuadrado horizontal; teniendo en cuenta que sus cuatro lados son iguales.
4) En el plano horizontal y en el rectángulo **ABCD** hallamos el punto medio **"P"**.

5) Trazar el plano de elevación "1" perpendicular al lado AB proyectándose en este plano de proyección, de canto el rectángulo ABCD en dos soluciones. Trasladar la cota de C y D y con radio igual a 3cm, trazar un arco con centro en CD, determinándose la proyección del punto P, luego unir CD con P y donde corte a la línea de referencia de AB hallaremos su proyección en el plano "1".
6) Trazar el plano de elevación "2" perpendicular al lado CF, proyectándose de canto el rectángulo CFGH en este plano. Trasladar la pendiente de CFGH = ABCD obtenida en el plano de elevación "1" y la longitud de 5cm, hallándose el extremo GH del rectángulo.
7) Desde el punto medio P trazar el recorrido de la bilia sobre los planos ABCD, CDEF y CFGH.
8) Completar las proyecciones principales del rectángulo ABCD, del cuadrado horizontal CDEF y del rectángulo CFGH.

PROBLEMA 4.5: Se conoce la recta horizontal CD de un plano y sólo la proyección horizontal de un segmento de recta AB, situado en este mismo plano. Sabiendo que la longitud de AB es de 3cm y que B está por debajo de A; encontrar la proyección frontal del segmento de recta AB y de la recta CD. ESCALA: 1:1 C(6,7,13), D(11,7,11); A(7,?,11.5), B(9,?,10)



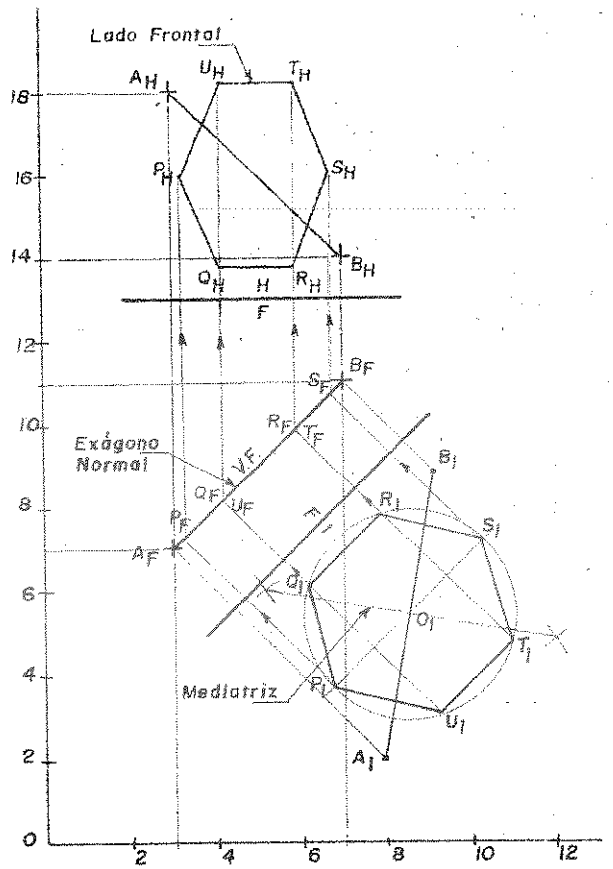
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) En el plano horizontal prolongar las rectas AB y CD, hasta que se corten en el punto O. Las rectas AB y CD pertenecen a un mismo plano.
3) Trazar el plano de elevación "1" paralela a la recta AB; para determinar su dimensión verdadera.
4) En el plano de elevación ubicamos C, D y O; en la recta CD asumimos un punto cualquiera, tal como X; desde X trazamos un arco de radio igual a 3cm, hallándose el extremo Y.

5) Definida a recta XY en el plano de elevación, trazamos una paralela a dicha recta desde el punto O; y la prolongamos hasta que corte a las líneas de referencia de A y B. Determinada la recta AB, completamos su proyección frontal.

PROBLEMA 4.6: AB es una recta contenida en un hexágono regular normal, éste hexágono puede ser inscrito en una circunferencia de 5cm de diámetro y cuyo centro es el punto medio de AB. Determinar las proyecciones del hexágono, sabiendo además que dos de sus lados son frontales.

A(3,7,18), B(7,11,14).



PROCEDIMIENTO:

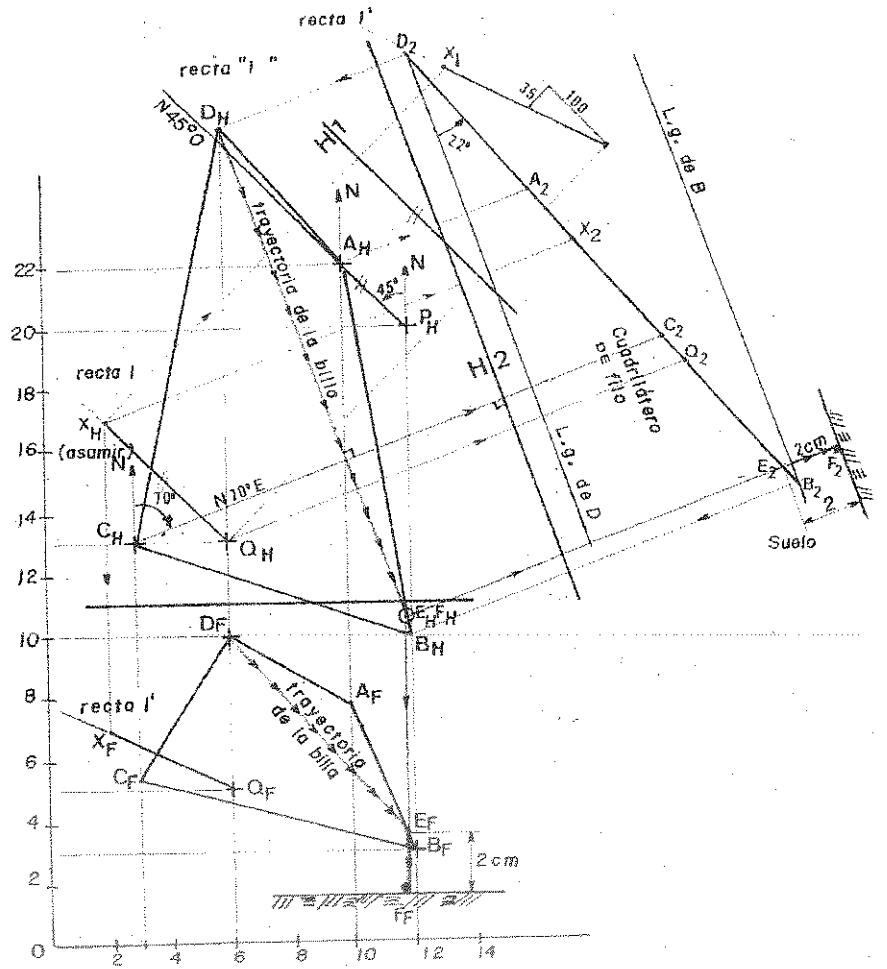
1) Graficar todos los puntos A y B según sus coordenadas dadas.
2) Hallar la dimensión verdadera de la recta AB contenida en el hexágono, utilizando el plano de inclinación "1", trazado paralelo a la recta. En este plano de proyección el hexágono regular se proyecta en dimensión verdadera, y en el plano frontal se proyecta de canto; por tratarse de un plano normal.
3) En el plano inclinado "1" y con centro en el punto medio de la recta AB, trazamos una circunferencia de 2.5cm de radio.
4) Inscribir el hexágono regular normal PQRSTU en la circunferencia trazada en el paso anterior; siendo dos de sus lados paralelos al plano frontal.
5) Desde el plano inclinado "1" proyectar todos los vértices del hexágono regular PQRSTU, hacia al plano frontal y sobre la recta AB contenida en dicho hexágono. En el plano frontal el hexágono regular se proyecta de canto.
6) Luego completar la proyección horizontal del hexágono regular normal PQRSTU.

PROBLEMA 4.7: Por el punto P pasa una recta "1" cuya orientación es N45°O y cuya pendiente ascendente es del 35%. El cuadrilátero ABCD tiene orientación N70°E. Si el punto Q, el punto P y la recta "1" son coplanares con ABCD; hallar la pendiente del cuadrilátero y la trayectoria de una billa que rueda sobre él, partiendo del punto D y que después de abandonarlo cae verticalmente 2cm al suelo. A(10,?,22), B(12,3,?), C(3,?,13), D(6,10,?); P(12,?,20), Q(6,5,13). ESCALA: 1:1

PROCEDIMIENTO 4.7:

1) Trazar la orientación N45°O de la recta "l" desde el punto P, y la orientación N70°E del cuadrilátero ABCD desde el punto C.
2) Por el punto Q pasamos la recta l' paralela a la recta "l" (Q, P y "l" son coplanares con ABCD).
3) Trazar el plano de elevación "1" paralela a la recta "l'"; en este plano de proyección ubicamos el punto Q, al trasladar su cota luego medimos la pendiente de la recta "l'". La pendiente de la recta l' es igual a la pendiente de la recta l, por paralelismo.
4) Trazar el plano de elevación "2" perpendicular a la orientación del cuadrilátero; en este plano de proyección el cuadrilátero se proyectará de filo, pasando por los puntos Q y X. Inclinación del plano: 22° ó 22°SE.
5) En el plano de proyección "2" prolongamos el cuadrilátero de filo y en el corte con las líneas de referencia o lugares geométricos, se determinan los puntos A, B, C y D de este cuadrilátero; la que proyectamos a los planos principales.
6) Desde el punto D en la proyección horizontal trazamos la trayectoria de la billa, perpendicular a la horizontal (N70°E) del cuadrilátero; y cae 2cm al suelo desde el vértice B del cuadrilátero.

SOLUCIÓN 4.7:

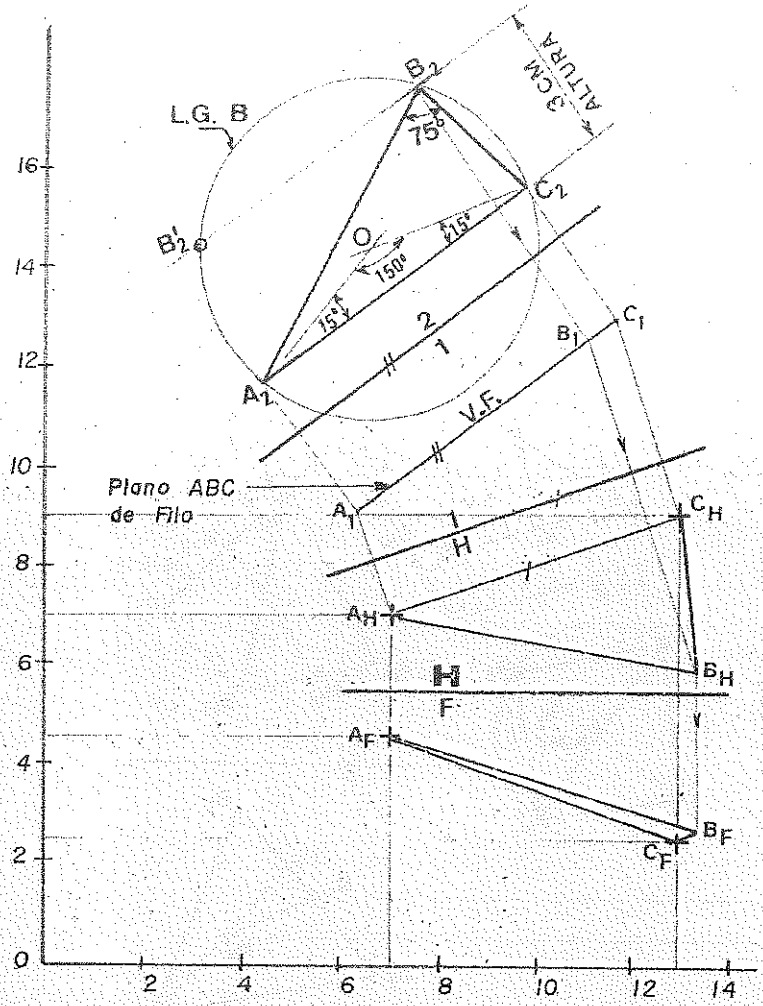


PROBLEMA 4.8: Dada la recta de máxima pendiente "AC", completar las proyecciones de un triángulo ABC, sabiendo que el ángulo "B" es 75º y su altura relativa al lado "AC" es de 3cm. El punto "B" está a la derecha y delante de "C". A(7,4.5,7), C(13,2.5,9). ESCALA: 1:1

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos A y C según las coordenadas dadas.
2) Trazar el plano de elevación "1" paralelo a la recta de máxima pendiente AC; en este plano de proyección el triángulo ABC se proyecta de canto (l.g. del plano ABC).

SOLUCIÓN:

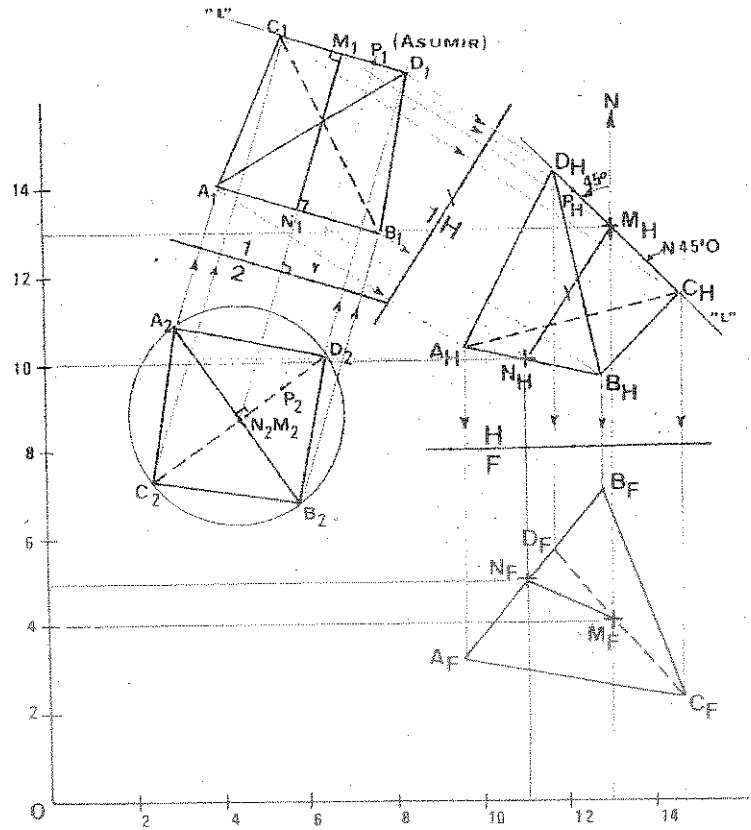


PROCEDIMIENTO 4.8:

3) Trazar el plano auxiliar "2" paralelo al plano ABC de filo; en este plano de proyección, el triángulo ABC se proyecta en dimensión verdadera e inscrito en un círculo, donde $2m^{o} = n^{o}$, siendo $n = 150^{o}$.
4) Desde los extremos A y C, trazamos dos rectas que forman un ángulo de 15° con la recta AC. Estas dos rectas se cortan en el punto O, centro de una circunferencia que define el lugar geométrico de los puntos "B"; tal que el ángulo ABC es igual a 75°.
   Tenemos que: $90^{o} = 75^{o} + \alpha$ de donde: $\alpha = 15^{o}$
   Siendo: 75°: dato del problema, 90°: Condición del arco capaz.

5) Trazamos la altura relativa de **3cm** al lado **AC**, y donde corte al círculo hallamos el punto "**B**" en dos soluciones. Se considera el punto "**B**" situado a la derecha del centro del círculo, para satisfacer la condición del problema.
6) Completar el punto "**B**" hallado en todas las proyecciones utilizadas.

PROBLEMA 4.9: El segmento **MN** une los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro regular. Si la arista **CD** que contiene a **M** tiene una orientación de **N45°O** y una longitud de **5cm**; completar las proyecciones horizontal y frontal, y todas las usadas del tetraedro.
M(13,4,13), N(11,5,10) ESCALA: 1:1
SOLUCIÓN:

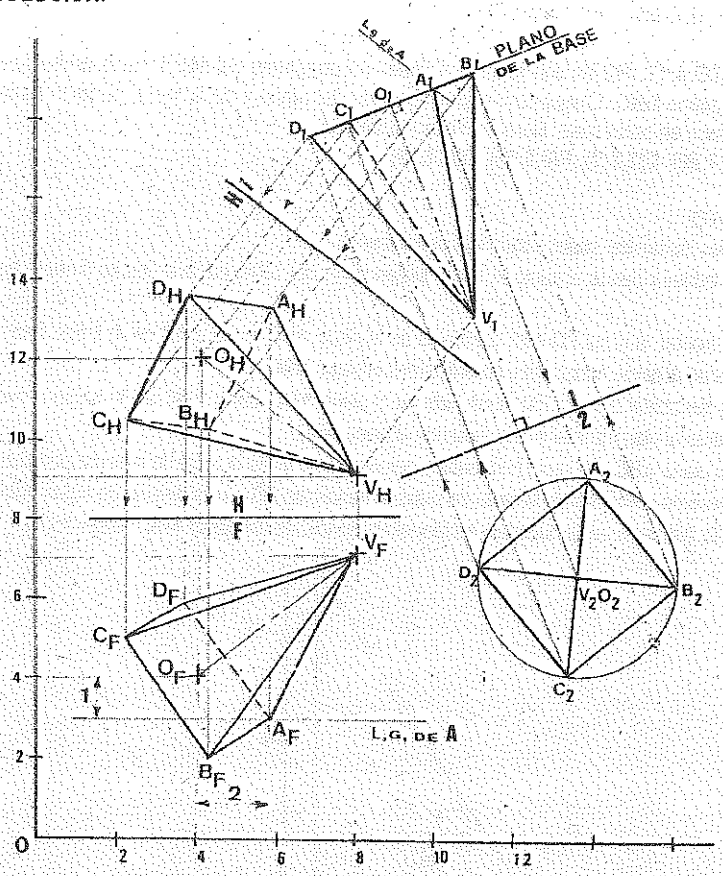


PROCEDIMIENTO:
1) Graficar los puntos **M** y **N** según sus coordenadas dadas.
2) En el plano horizontal y desde el punto **M** trazar la recta "**I**" con orientación **N45°O**.
3) Hallar la dimensión verdadera de la recta **MN**, utilizando el plano de elevación "**1**".).
4) En el plano de elevación "**1**", la recta "**I**" es perpendicular a la recta **MN**.

5) Trazar el plano auxiliar "2" perpendicular a la recta **MN**, para proyectarla de punta en este plano de proyección.

6) Con centro en **MN** y de radio igual a **2.5cm**, trazamos una circunferencia en el plano auxiliar 2.
7) En el plano de elevación y sobre la recta "f", asumimos el punto P, que la proyectamos al plano horizontal y después al plano auxiliar "2".
8) En el plano auxiliar "2" trazar con P una recta que pase por **MN** y que corte a la circunferencia en C y D, que permite inscribir en ella el tetraedro **ABCD**.
9) Determinado las dos aristas **AB** y **CD**, unimos los cuatro vértices hallados, luego completamos todas las proyecciones utilizadas; teniendo en cuenta que en el plano de elevación las aristas **AB** y **CD** son paralelas entre sí y perpendicular a la recta **MN**.

PROBLEMA 4.10: V es el vértice de un pirámide recta y O es el centro de su base, que es un cuadrado que puede ser inscrito en una circunferencia de **5cm** de diámetro. Determinar la proyección horizontal y frontal de la pirámide, sabiendo que el vértice A de la base se encuentra **2cm** a la derecha y **1cm** por debajo de O.. O(4,4,12), V(8,7,9) ESCALA: 1:1.
SOLUCIÓN:



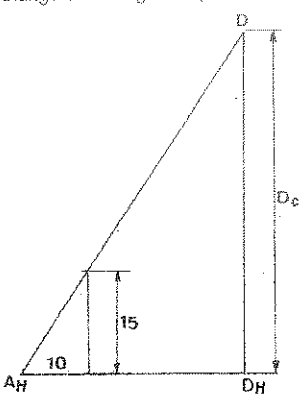
PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos **O** y **V** según sus coordenadas.
2. Trazar el plano de elevación **"1"** paralelo al eje **VO** de la pirámide, determinándose en esta proyección su dimensión verdadera.
3. Trazar el plano auxiliar **"2"** perpendicular al eje **VO** de la pirámide, obteniéndose en esta proyección la vista de punta del eje **VO**.
4. Cuando el eje **VO** se proyecte de punta, la base de la pirámide se proyectará en dimensión verdadera; luego en el plano auxiliar **"2"** trazar una circunferencia con centro **VO** y de radio igual a **2.5cm** en esta circunferencia inscribir la pirámide de base rectangular; teniendo en cuenta que el vértice **A** se encuentra **2cm** a la derecho y **1cm** por debajo de O.
5. Determinada la base **ABCD** de la pirámide en el plano auxiliar **"2"**, la proyectamos a sus planos principales; teniendo en cuenta que en el plano de elevación "1" la base de la pirámide se proyecta de canto y perpendicular al eje **VO**.
6. Mostrar la visibilidad de la pirámide **V – ABCD** en todas las proyecciones utilizadas, aplicando las reglas de visibilidad (ver página 25).

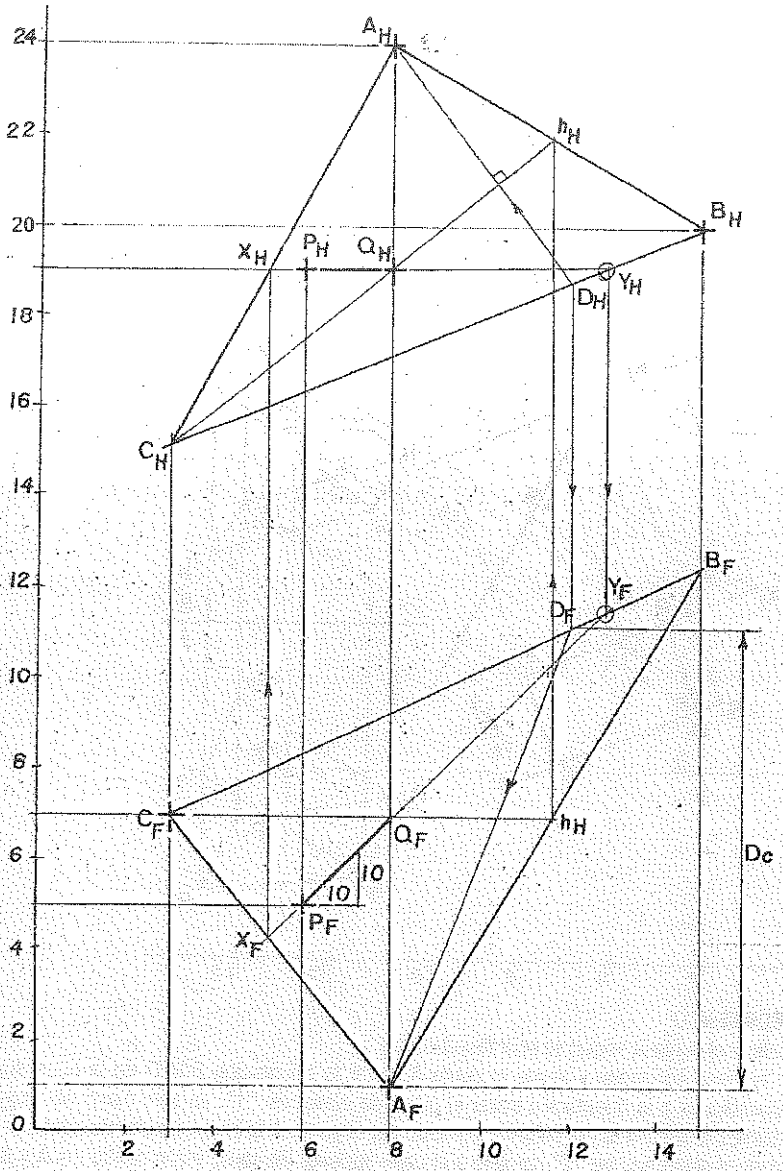
PROCEDIMIENTO 4:11: **PQ** es una recta que tiene una pendiente del **100%** hacia arriba, y está contenida en el plano **ABC**. Completar las proyecciones del plano y de la recta; además hallar la pendiente del plano en porcentaje. No usar Vistas Auxiliares.
A(8,1,24), B(15,?,20), C(3,7,?); P(6,5,19), Q(8,?,19)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) En el plano frontal y desde el punto **P**, trazar la pendiente del 100% hacia arriba de la recta frontal **PQ**.
3) En el plano frontal, la recta **PQ** está contenida en el plano **ABC**, corta a **AC** en **X**; luego proyectamos este punto al plano horizontal y completamos el plano **ABC**.
4) En el plano horizontal la recta **PQ**, contenida en el plano **ABC**, corta a **BC** en **Y**; luego proyectamos este punto al plano frontal y completamos el plano **ABC**.
5) Trazar en el plano **ABC** una recta horizontal y perpendicular a ella la recta de máxima pendiente.
6) Con la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente **AD** y la diferencia de cotas entre los puntos **A** y **D**; hallamos en un triángulo rectángulo la pendiente del plano **ABC**. Resp: 150%



SOLUCIÓN 4.11:



PROBLEMA 4.12: Se tiene un prima recto cuyas bases son triángulos equiláteros que miden **4cm** de lado, siendo uno de dichos lados de perfil. La altura de dicho prisma mide **2cm.** La base superior cuyo centro es "A", tiene una orientación **S60ºO** y una pendiente del **80ºNO.** Hallar las proyecciones de dicho prisma. **ESCALA: 1:1 A(11,4,11)**

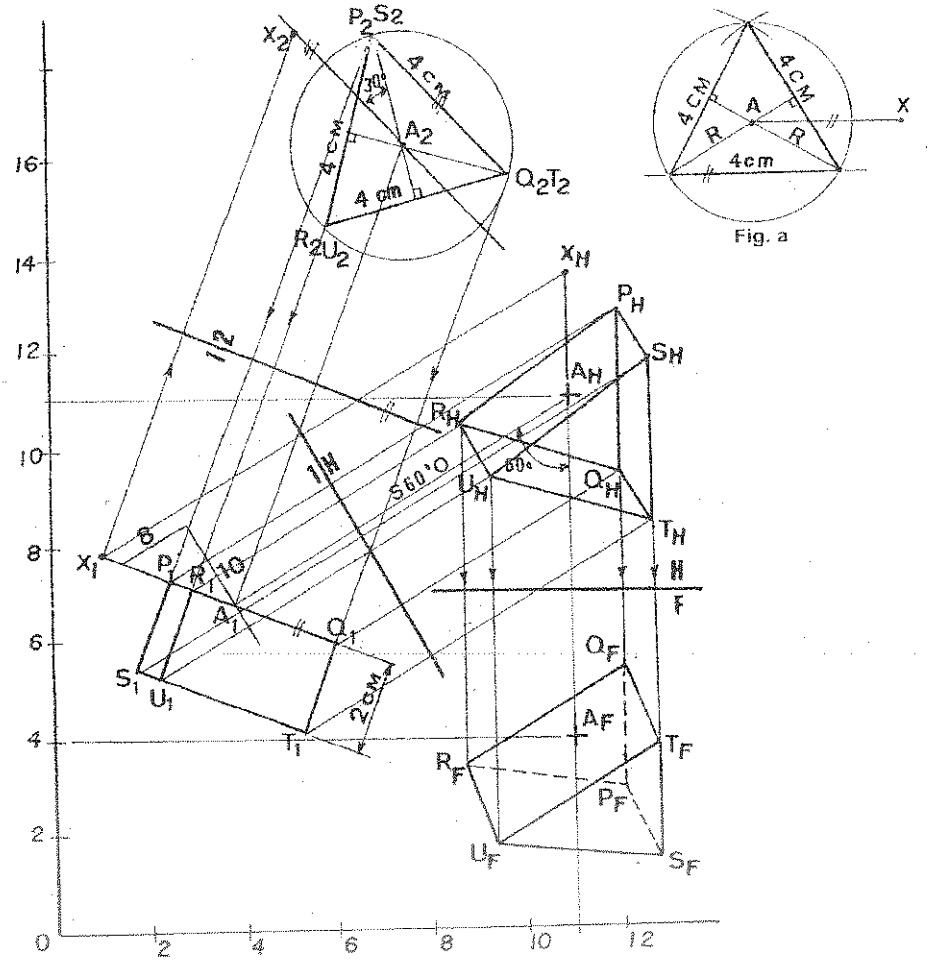
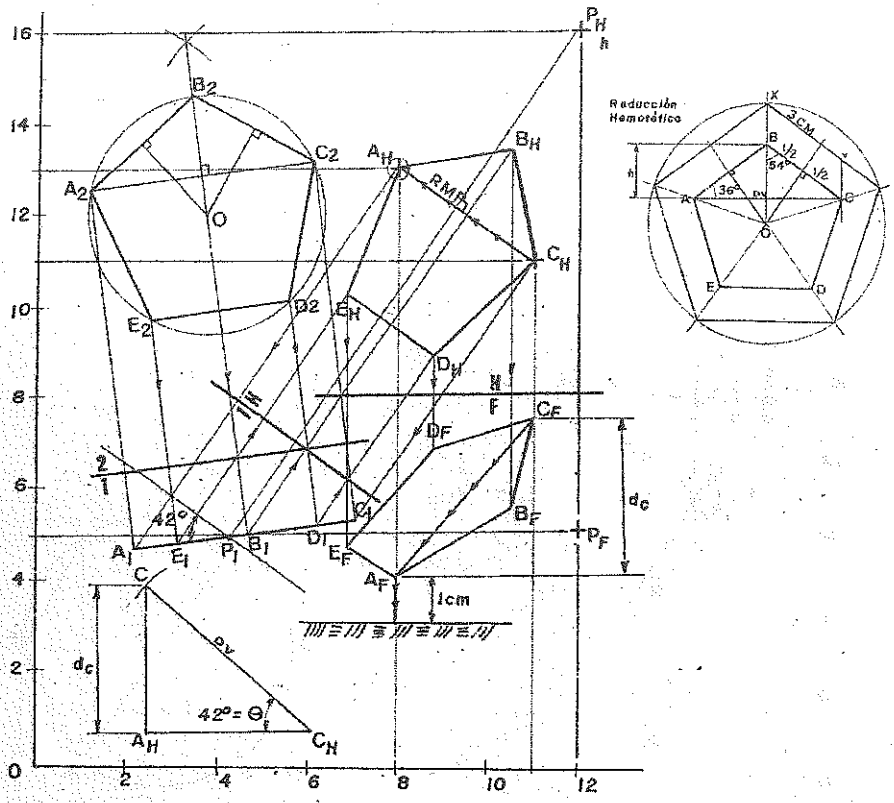


Fig. a

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto A según su coordenada dada.
2) En el plano horizontal y desde el punto A trazar la orientación S60°O de la base superior; perpendicular a la orientación trazar el plano de elevación "1", en este plano de proyección medimos la pendiente del 80%NO, pasando por el punto A la base superior de canto.
3) Trazar el plano auxiliar "2" paralelo a la base superior de canto y con centro en A y radio R obtenida de la ***figura a***, trazar una circunferencia.
4) En el plano de canto asumir un punto "X" cualquiera, tal que AX en el plano horizontal sea paralelo al lado del perfil.
5) En el plano auxiliar "2" y según la construcción de la figura a determinamos la base superior del prisma, tal que PQ sea paralela a AX. Existen dos soluciones.
6) Luego completar todas las proyecciones utilizadas.

PROBLEMA 4.13: El segmento AC es una recta de máxima pendiente de un pentágono regular ABCDE, de lado igual a 3cm. Hallar las proyecciones del pentágono sabiendo que, "P" es un punto contenido en su plano; tomar C encima de A. Así mismo en el punto "C" del pentágono se deja una billa que rueda sobre este pentágono, para caer verticalmente al suelo 1cm. Determinar la trayectoria de la billa y la pendiente del pentágono. ESCALA: 1:1. P(14,5,16); A(10,?,13), C(13,?,11)

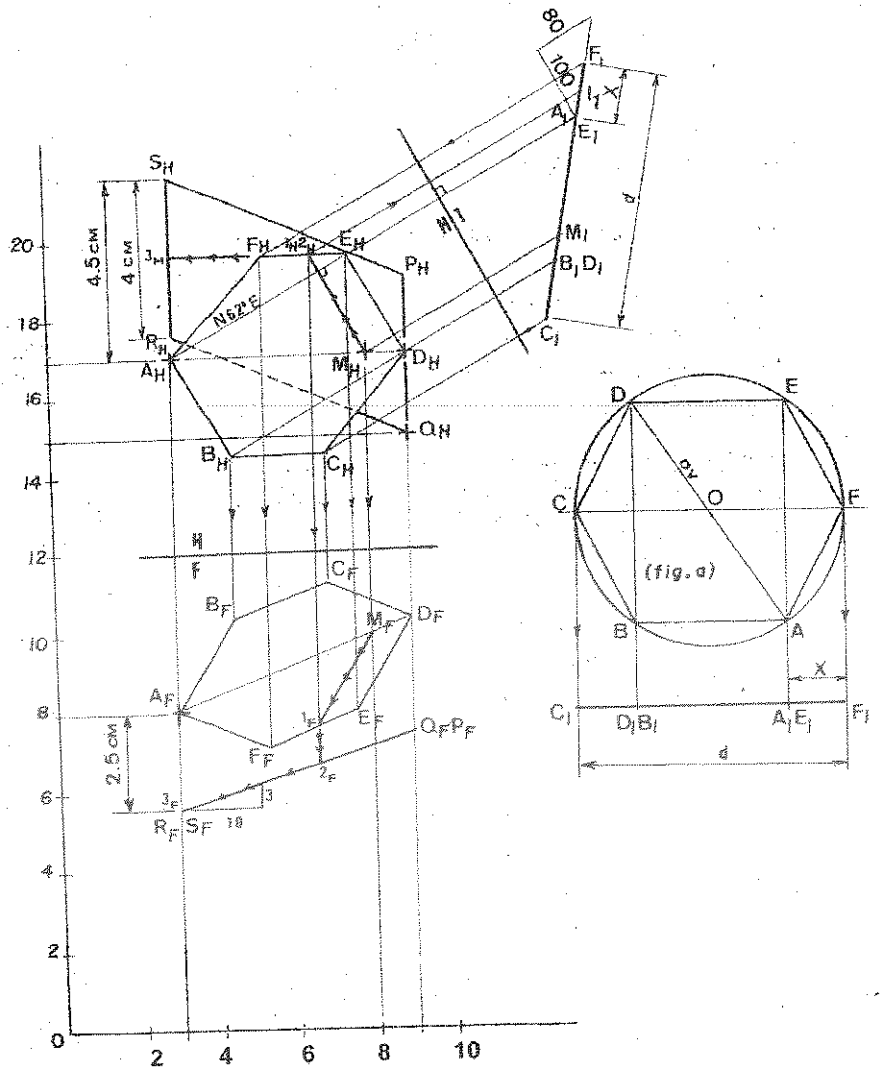


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas
2) En el plano horizontal y desde el punto P trazar una recta perpendicular a la RMP; paralelo a la RMP trazar el plano de elevación **"1"**, para proyectar al pentágono de canto.
3) Construir un pentágono cualquiera y por reducción hemotética determinamos al pentágono buscado que tenga por lado 3cm (***fig.a***); en esta figura obtenemos la dimensión verdadera de **AC**.
4) Con la proyección horizontal de **AC** y su dimensión verdadera construimos un triángulo rectángulo (***fig. b***), en donde hallamos la **dc** entre estos dos puntos.
5) En el plano de elevación, trazar el plano de canto con pendiente de **42°** y que pase por el punto **P** (contenido en el pentágono).
6) Trazar el plano auxiliar **"2"** paralelo a la vista de canto del pentágono; en este plano de proyección construir el pentágono en dimensión verdadera, hallándose en esta vista dos posiciones para B.
7) Completar todas las proyecciones utilizadas para el pentágono.
8) Desde el punto C trazar la trayectoria de la billa que cae por el extremo **A, 1cm** hasta llegar al suelo.

PROBLEMA 4.14: Una billa parte del punto "M", desplazándose por un plano hexagonal regular ABCDEF, para caer verticalmente al paralelogramo PQRS, rodando también sobre este, para caer finalmente al suelo. El primero tiene orientación N62°E y pendiente del 80%NO, además AB aparece en d.v. en el plano auxiliar de elevación; BC y EF son frontales. El segundo es un plano Normal al igual que sus lados menores que miden 4cm con pendiente del 30% descendente; el punto "S" se encuentra 4.5cm detrás y 2.5cm debajo de "A". Calcular el desplazamiento total que hace la billa hasta el instante que abandona el paralelogramo, antihorario y horario respectivamente, en el horizontal. A(3,8,17), D(9,?,17), M(8,?,17), Q(9,?,15) ESCALA: 1:1.

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO 4.14:

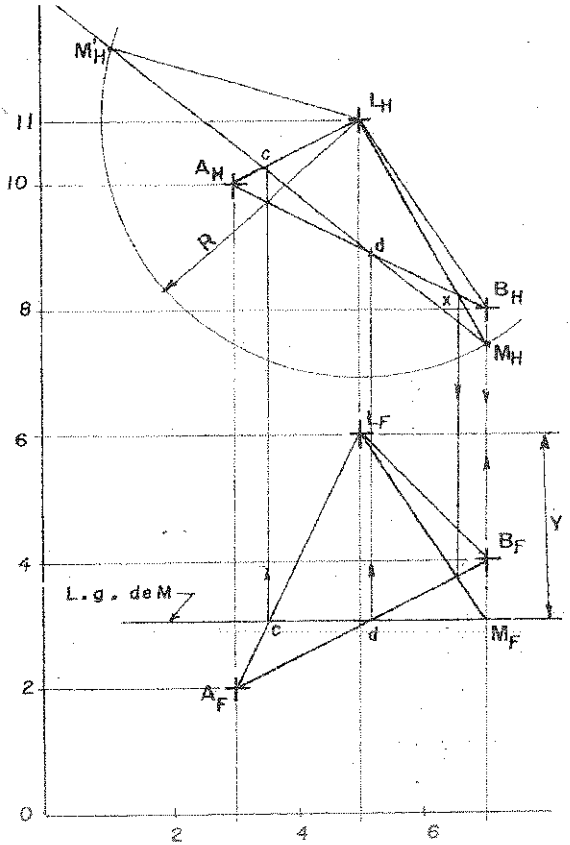
1. En el plano horizontal y desde el punto A trazar la orientación N62°E del plano ABCDEF, luego trazar el plano de proyección "1" perpendicular al rumbo.
2) En "1" encontramos el punto A, por donde pasamos una recta horizontal y en ella medimos la pendiente del 80%NO; hallando M y D.
3) En la *fig. a* se muestra la recta AD tomada del plano "1", luego hallar su punto medio y con radio OA trazar una circunferencia y en ella inscribir el hexágono ABCDEF.
4) En la *fig. a* se muestra la recta AD tomada del plano "1", luego hallar su punto medio y con radio OA trazar una circunferencia y en ella inscribir el hexágono ABCDEF.
5) De la fig. a trasladar las distancias X y d al plano "1".
5) Completar la proyección horizontal del hexágono teniendo en cuenta que: AB es paralela al plano de proyección, en forma similar para DE; BC y EF son frontales.
6) Completar la proyección frontal del hexágono ABCDEF.
7) Desde el punto A trazar 4.5cm detrás (en H) y 2.5cm debajo de él (en F), hallándose S del plano normal PQRS.
8) Desde el punto S y hacia adelante medimos los 4cm que miden los lados menores determinándose el punto R.
9) En el plano frontal y desde S, medimos la pendiente del 30%, hallándose Q en este plano.
10) Trayectoria de la billa: en el plano horizontal y desde M trazar la RMP perpendicular a la orientación del plano ABCDEF, rueda y cae verticalmente al suelo. Resp. 3,65 + 0.95 + 3.65 = 8.25

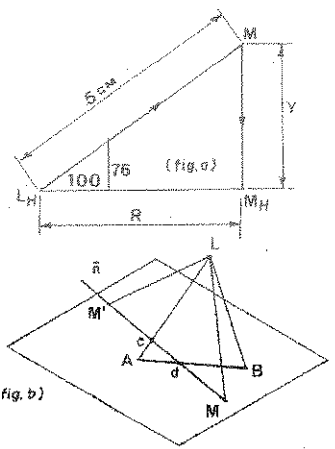
PROBLEMA 4.15: Si LM es una recta de 5cm de longitud, que se corta con AB y tiene una pendiente de 76% descendente. Determinar "M" en sus vistas principales. Resolver sin utilizar planos auxiliares. A(3,2,10), B(7,4,8); L(5,6,11)

PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos A, B y C según sus coordenadas dadas.
2. Unir los puntos dados en el plano horizontal y frontal.
3. Con la pendiente del 76% descendente y la longitud de 5cm de LM, hallamos en un triángulo rectángulo la diferencia de cotas "Y" entre los puntos M y L; y la proyección horizontal del punto M (*fig. a*).
4. Hallar el lugar geométrico de M, en el plano frontal trasladando la diferencia de cotas "Y"; y en el plano horizontal trazando el arco de radio R.
5. En el plano frontal de l.g. de M corta al plano formado ALB en los puntos "c" y "d"; la proyectamos al plano horizontal, unimos estos puntos y la prolongaos hasta cortar al l.g. de M; hallándose el punto M en dos soluciones, en el plano horizontal.
6. Unir en el plano horizontal el punto c con M, y descartamos una de las soluciones porque LM' no corta AB.
7. En el plano horizontal LM corta AB en X, este punto la proyectamos al plano frontal, unimos L con X y la prolongamos hasta cortar al l.g. de M; hallándose la proyección frontal de M.

SOLUCIÓN 4.15:

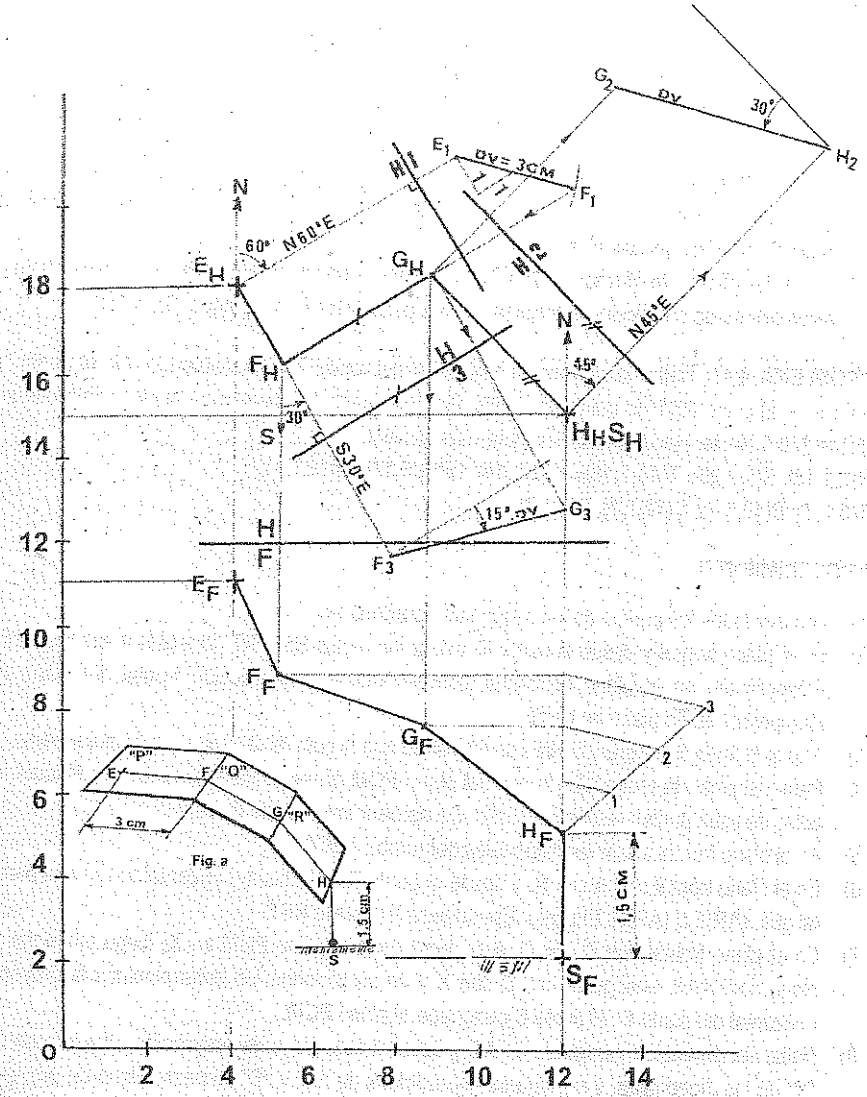




PROBLEMA 4.16: Una billa parte del punto E de un plano "P", y que sigue la trayectoria como indica la figura "a". Las orientaciones de los planos "P", "Q" y "R" son N60°E y N45°E respectivamente. La pendiente de "P" es 100% descendente, "Q" se inclina hacia el NE y tiene la mitad de la pendiente de "R". Sabiendo que EF mide 3cm y la caída vertical HS es 1.5cm. Dibujar la trayectoria de la billa y hallar las pendientes de "Q" y "R".

ESCALA: 1:1 E(4,11,18), S(12,2,15).

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos E y S según sus coordenadas dadas.
2) Las orientación de un plano esta dado por una recta horizontal contenida en él; en el plano horizontal trazar la orientación **N60°E** desde el punto E (plano P), luego trazar el plano de elevación "1" perpendicular al rumbo trazado; luego con la pendiente descendente del **100%** y el recorrido de la billa de **3cm**, determinamos el punto F del plano Q.
3) En el plano frontal desde el punto S medimos la caida vertical XS se proyecta de punta; se conoce S.
4) En el plano horizontal desde los puntos F y H trazar las orientaciones **S30°E** y **N45°E** respectivamente y perpendicular a ellas las rectas de máxima pendiente, que se cortan en el punto G.
5) En el plano frontal, la diferencia de cotas entre los puntos F y H la dividimos en tres partes iguales; y teniendo en cuenta que la pendiente del plano Q es la mitad de la pendiente del plano R, determinándose el punto G.
6) Trazar los planos de elevación "2" y "3" paralelos a las rectas HG y FG respectivamente; en estos planos de proyección determinamos las pendientes de los planos "Q" y "R".

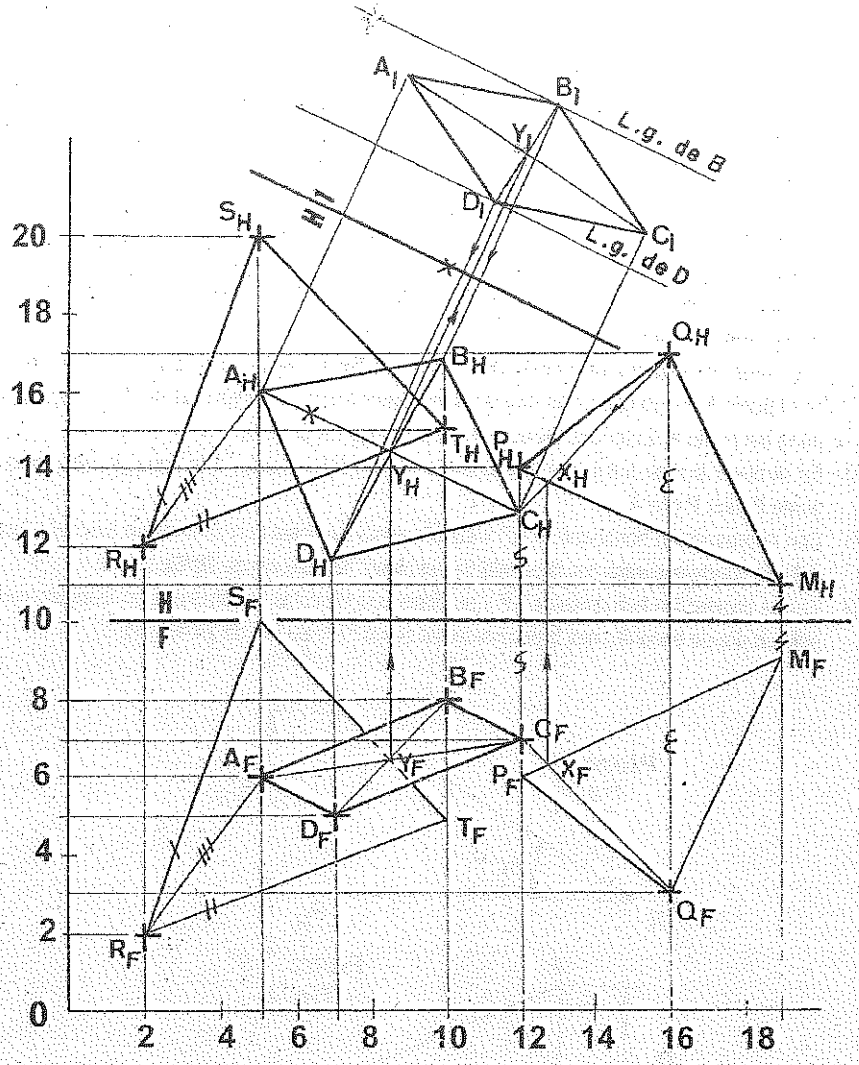
PROBLEMA 4:17: Hallar la proyección horizontal del rombo **ABCD**; sabiendo que el punto "A" pertenece al plano **RST** de pendiente **100% Sur** y el punto "C" pertenece al plano **PQM** de pendiente **100% Norte**. Hacer uso de una sola vista auxiliar.

R(2,2,12), S(5,?,20), T(10,?,15); P(12,?,14), Q(16,3,17), M(19,?,11)
A(5,6,?), B(10,8,?), C(12,7,?), D(7,5,?)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) En el plano frontal y desde el punto R, trazar las rectas RS y RT paralelas a sus respectivas proyecciones en el plano horizontal; completándose la proyección frontal del plano RST (comprobar en un plano de perfil).
3) Trazar la línea de referencia H/F considerando que la cota de Q es igual a su alejamiento.
4) Para completar la proyección frontal del plano PQM, tomar el alejamiento de P y M igual a las cotas de esos puntos respectivamente. Comprobar en un plano de perfil.
5) En el plano frontal trazar las diagonales del rombo ABCD.
6) En el plano frontal unir A con R, y desde el punto R en el plano horizontal trazar una paralela tal que: (AR)F // (AR)H. El punto A pertenece a la plano RST.
7) En el plano frontal unir C con Q, esta recta corta al plano PQM en X; luego proyectar X al plano horizontal, enseguida unir Q con X y en su prolongación determinamos la proyección horizontal del punto C. El punto C pertenece al plano PQM.
8) Hallar la dimensión verdadera de AC y llevar a este plano de proyección, el punto de corte "Y" de las diagonales, y los lugares geométricos de "B" y "D"; en este plano de proyección trazar BD perpendicular a AC, luego completamos la proyección horizontal del rombo ABCD.

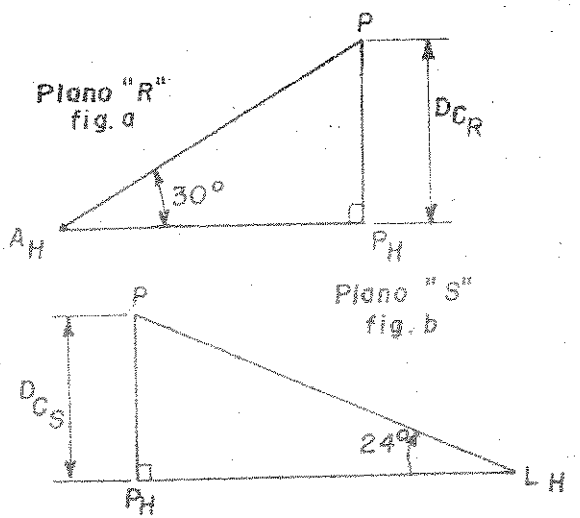
SOLUCIÓN 4.17:



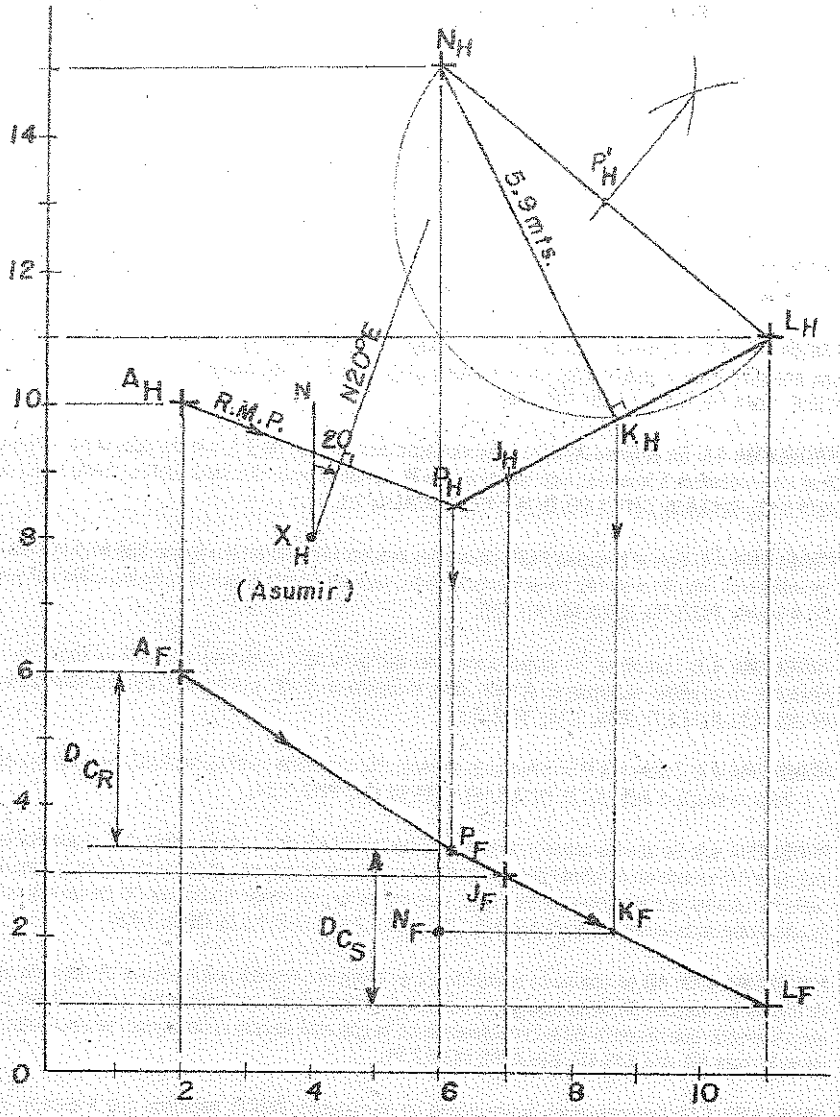
PROBLEMA 4.18: Se deja una billa en el punto "A" del plano "R", que tiene una orientación N20°E, el mismo que recorre por el mismo plano llegando a otro plano "S". En este plano de billa pasa por los puntos J, K y L; siendo la magnitud de KN igual a 5.9mts. J y K están delante de L. Determinar la ubicación del punto N y la pendiente de los planos "R" y "S". No usar vistas auxiliares. ESCALA: 1:100. Nota: El punto N pertenece al plano "S".
A(2,6,10), J(7,3,?), N(6,?,15), L(11,1,11)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas.
2) Tomar en el plano "R" un punto cualquiera tal como "X", y desde este punto trazar la orientación **N20°E**.
3) Desde el punto **A** trazar la recta de máxima pendiente perpendicular a la horizontal del plano "R".
4) Unir **N** con **L**, ambas pertenecen al plano "S", hallar el punto medio **P'** de **NL** y con centro en **P'** trazar una semicircunferencia. Como **NIK** está en dimensión verdadera, **KL** debe ser perpendicular a **NK**; por lo tanto se forma una triángulo rectángulo **NKL** que debe estar inscrita en una semicircunferencia.
5) Con centro en **N** trazar un arco de radio igual a **5.9mts**., hasta cortar a la semicircunferencia en el punto **K**; luego unir **L** con **K**, y la prolongamos hasta cortar en el punto **P** a la **R.M.P**, que parte del punto **A**. Entonces **NK** es recta horizontal y **LK** es **R.M.P**.
6) En el plano frontal unir **L** con **J**, y la prolongamos hasta cortar a la línea de referencia del punto **P**; unir **P** con **A**.
7) Con la proyección horizontal de **AP** y su diferencia de cotas construimos un triángulo rectángulo en donde encontramos la pendiente del plano "R"; siendo de **30°SE** (fig. a).
8) Con la proyección horizontal de **LP** y su diferencia de cotas construimos un triángulo rectángulo en donde encontramos la pendiente del plano "S"; siendo de **24°NE** (fig. b).



SOLUCIÓN 4.18:



PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 4.1: Construir un hexágono regular ABCDEF conociendo la diagonal AC y solo la proyección horizontal de B; estando B debajo de A. A(2,3,9.5), C(6,1,11), B(3, ?,10).

PROBLEMA 4.2: Dado el triángulo ABC y el punto P, determinar las proyecciones del cuadrado con centro en P, situado en el plano del triángulo; sabiendo que dos de sus lados son frontales y miden 2cm. A(7,4,12), B(11,2,14), C(13,5,10); P(11, ?,12) ESCALA: 1:1

PROBLEMA 4.3: Determinar un punto X en el triángulo ABC que se encuentra a la misma altura que B y que las proyecciones horizontales de CX = XB. A(4,8.5,11.5), B(10,5.5,13.5), C(7,1.5,16.5).

PROBLEMA 4.4: Determinar las proyecciones principales de un triángulo equilátero que está inscrito en una circunferencia, y está inscrita en el triángulo ABC. Un lado del triángulo equilátero tiene orientación S60°E. A(2,4,13), B(8.5,2,12.5), C(6,6,9).

PROBLEMA 4.5: En el plano ABCD se quiere situar un cuadrado de 1.5, cm de lado, cuyo centro O dista 2cm y se encuentra 1.5cm más bajo que el vértice B, siendo además dos lados del cuadrado horizontales. A(10,5,13), B(13,6,9), C(17,3,11), D(14,2,15). ESCALA: 1:1.

PROBLEMA 4.6: Sea el triángulo PQR, dibujar las proyecciones de un hexágono que está inscrita en una circunferencia, inscrita a su vez en el triángulo dado; sabiendo además que dos de los lados del hexágono son frontales. P(3,5,10), Q(5,3,15), R(7,7,9).

PROBLEMA 4.7: Completar las proyecciones del triángulo ABC sabiendo que: AB es recta de máxima pendiente de su plano, el ángulo en A mide 30° y el ángulo en B 45°; y el punto C está contenido en la recta XY B(9, ?,9), A(12,1,7); X(10, ?,10), Y(12, ?,9).

PROBLEMA 4.8: Trazar por P un segmento de recta PQ contenido en el plano ABC, cuyo rumbo es N45°E y de 2cm de longitud. A(10,8,13), B(13,5,16), C(16,10,12),; P(12, ?,14)

PROBLEMA 4.9: Se dan las proyecciones de una horizontal AB de un plano y solo proyección horizontal de una recta CD situado en el mismo plano, y que hace el mayor ángulo con el plano frontal de proyección; que cualquier otra recta contenida en este plano. Determinar la proyección frontal de CD de tal manera que D resulte arriba de la horizontal dada AB. A(6,2,7), B(11.5,2,5), C(7.5, ?,8.5), D(10, ?,4.5).

PROBLEMA 4.10: AB es una recta contenida en un hexágono regular perpendicular al plano de perfil, y P es uno de los vértices de dicho hexágono; cuyos lados miden 3cm, determinar las proyecciones del hexágono sabiendo que el centro de la circunferencia en la que está inscrito el hexágono, se encuentra contenida en la recta AB. A(2.5,10,17), B(6,8,18); P(3.5,7,19).

PROBLEMA 4.11: Determinar las proyecciones de un cuadrado ABCD, sabiendo que X está en la prolongación de BC, e Y está en la prolongación de DC. A(2,6.5,11.5); X(6,6.5,10.5), Y(6.5,2,9).

PROBLEMA 4.12: AB es un lado de la base pentagonal de una pirámide regular de vértice V. Completar las proyecciones de la pirámide VABCDE sabiendo que el lado AB es de mayor cota. Mostrar la visibilidad. A(2,6,15), B(5,6,11); V(6,2,11).

PROBLEMA 4.13: AC es una diagonal de un cuadrado vertical. Hallar sus proyecciones. A(5,10,13), C(10,5,17).

PROBLEMA 4.14: Hallar el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la distancia de 2cm del punto M y equidistantes de los lados JC y CF del plano JCF. M(8,8,16); J(6,1,16), C(1,5,17), F(4,9,12)

PROBLEMA 4.15: Dada la recta BC y el punto P, trazar por C la recta de máxima pendiente del plano BCP; hallar su pendiente. P(8,7,15); B(1,5,15), C(5,1,9)

PROBLEMA 4.16: En el punto M de un lado ABC se deja un cuerpo cuyo ángulo de reposo es 20°. Determinar si el cuerpo resbala o no; de resbalar, indicar su trayectoria y posición respecto al punto de partida en el instante que choca con el plano frontal. ESCALA: 1:200. A(2,8,13), B(6,4,11), C(8,6,11); M(?,4,12).

PROBLEMA 4.17: Por el punto P pasa un plano que tiene una orientación de S60°O y una pendiente de 45°NO; encontrar las proyecciones principales del plano y de las rectas AB y CD contenidas en él.
A(8, ?,13), B(10, ?,9), C(8,5, ?), D(11,2, ?); P(10,4,11).

PROBLEMA 4.18: El lado BC es recta de máxima pendiente del plano ABC que tiene pendiente del 50%NE. Completar las proyecciones del triángulo ABC sabiendo que X está contenido en él. No usar proyecciones adicionales. A(3, ?,12), B(6, ?,8), C(9, ?,10.5); X(5,4,10).

PROBLEMA 4.19: M, N y P son los puntos medios de AB, BC y AC respectivamente. Si el ángulo MPN es de 60° y el plano ABC es orto perfil; determinar las proyecciones principales del triángulo ABC, sabiendo que P dista 3cm de MN. ESCALA: 1:1. M(3,4,8), N(6,2,9).

PROBLEMA 4.20: ABCD es la base superior de un prisma recto y EFGH es la base inferior; AE es una de las aristas laterales. Dibujar los planos principales del prisma, sabiendo que las bases son paralelogramos. Mostrar la visibilidad. A(6,6,11), D(5, ?,13), E(4,4,8), F(3,5, ?).

PROBLEMA 4.21: Completar las proyecciones del cuadrado ABCD, sabiendo que la recta RS está contenida en dicho plano; y que el punto C pertenece a la recta BX. Dar como solución al lado AB con menor pendiente. R(8,6,13), S(12,5,11), A(9, ?,14), B(10, ?,10).

PROBLEMA 4.22: Encontrar las proyecciones principales del polígono plano ABCDEF, y determine después la pendiente que tiene y la orientación que lleva.
A(16,3.5,7), (13,2,7.5), C(10.5,2, ?), D(10.5,4,10), E(12.5, ?,10), F(14.5, ?,8.5)

PROBLEMA 4.23: LM es la recta de máxima pendiente de un plano que contiene un pentágono inscrito en una circunferencia cuyo diámetro es también LM. Hallar sus proyecciones, sabiendo que uno de sus lados del pentágono está de Perfil. L(2,4,15), M(5,8,11).

PROBLEMA 4.24: En el punto M contenido en el plano ABC se deja caer una billa metálica que por efectos de la gravedad resbala sobre él hasta el borde y luego cae verticalmente 2mts encontrando un segundo plano, resbalando sobre él hasta llegar al punto Z de dicho plano. Dibujar la trayectoria de la billa utilizando solo los planos principales, y determine además la orientación y pendiente del segundo plano (el que contiene a Z). ESCALA: 1:100. A(14,6,13), B(10,5,19), C(6,10,12); M(?,9,13), Z(6,2,15).

PROBLEMA 4.25: Completar las proyecciones del cuadrado ABCD, sabiendo que C se encuentra 1cm delante y 1cm debajo de B. ESCALA: 1:1. A(3,6, ?), B(3,3,10).

PROBLEMA 4.26: Los puntos A y B y la recta "m" cuya orientación es N45°0, están situados en un mismo plano; determinar las proyecciones de un punto X situado en dicho plano y que equidiste de los puntos A y B, y de la recta "m". Nota: El punto X está en la recta "m". X(5,4,11); A(8,4,9), B(9,2,12).

PROBLEMA 4.27: Completar las proyecciones del cuadrilátero ABED sabiendo que los ángulos AEB y BDE son iguales. **A(6.5, ?10.5), B(10.5,5.5,10.5), E(9, ?,7), D(4,2.5,8.5).**

PROBLEMA 4.28: AB es un lado y recta de máxima pendiente del triángulo ABC, determinar sus proyecciones teniendo en cuenta que el ángulo C mide 70° y que dicho vértice está 2cm a la derecha de A.
A(4,2.5,7), B(7.5,4,9.5).

PROBLEMA 4.29: Del punto A del plano PQR parte una bilta que resbala sobre él y luego cae sobre el plano QRS. Determinar la posición de la bilta cuando está 5cm de bajo de A.
ESCALA: 1:100. P(3,7,17), Q(12,9,18), R(5,4,12), S(10,1,10); A(8, ?,17).

PROBLEMA 4.30: JK es la recta de máxima pendiente del plano ABC, completar sus proyecciones sabiendo que ABC es un triángulo equilátero que baja hacia el Noroeste. Dar la solución que muestre el punto C más cerca al plano de proyección horizontal.
J(13,7,9), K(12,5, ?): A(9, ?,8), B(9,4,11).

PROBLEMA 4.31: Determinar las proyecciones del cubo de 4cm de arista, sabiendo: su vértice A, la proyección horizontal de la arista AB y de la recta que contiene a la arista AD cuya orientación es N20°E. mostrar la visibilidad en todas sus proyecciones. **ESCALA 1:1. A(12,7,15), B(15, ?,17).**

PROBLEMA 4.32: PQ es recta de máxima pendiente del plano PQR. JK mide 4.5cm y es perpendicular a PQ. Determinar la proyección horizontal de P y Q. considerar que JK va hacia delante y PQ va hacia atrás.
P(8,6, ?), Q(9,3, ?), R(11,5,9); J(9,5, ?), K(11,3, ?).

PROBLEMA 4.33: Determinar la proyección horizontal del rombo ABCD, sabiendo que el punto A pertenece al plano RST de pendiente 100%S y el punto C pertenece al plano PQM de pendiente 100%N.
A(5,3.5, ?), B(8.5.,5, ?), C(10,4, ?), D(6.5,2.5, ?); R(2.5,1,6), S(4.5, ?,9), T(8, ?,7.5);
P(9.5, ?,6.5), Q(13,1,10.5), M(16,5,7.5).

PROBLEMA 4.34: Del punto P que pertenece a la recta RT del plano RST parte una bolita y resbala sobre dicho plano hasta cortar a la recta horizontal que pasa por R después de haber recorrido 2cm. completar las proyecciones del plano RST, sabiendo que tiene una inclinación de 50%NE.
ESCALA: 1:1. R(7,3,10.5), S(11, ?11.5), T(12, ?,7); P(10, ?, ?)

PROBLEMA 4.35: El punto V es el vértice y AB es una arista de la base cuadrada ABCD de una pirámide de 3cm de altura. Si CD está hacia la derecha de AB, completar las proyecciones principales de la pirámide, así como todas las usadas. Visibilidad. V(12,3,9.5); A(12, 5.5, 14), B(14,8,10.5).

PROBLEMA 4.36: Dado el triángulo ABC, construir las proyecciones de la pirámide VABC cuyo vértice equidista de los vértices de la base ABC y se encuentra en el plano horizontal.
A(3,3,19(, B(6,7,13), C(6,5,9).

PROBLEMA 4.37: Completar las proyecciones del segmento AB de 4cm de longitud, cuya pendiente es 50% descendente; y que está contenida en un plano cuya orientación es N70°E y de pendiente 55%SE.
A(4,2,7).

PROBLEMA 4.38: JK es una recta de 5cm de longitud, se corta con AB y tiene una pendiente de 80% descendente. Hallar las proyecciones de K. **A(3,2,10), B(7,4,8); J(5,6,11).**

PROBLEMA 4.39: AC es una diagonal del cuadrado ABCD y M es un punto de la otra diagonal. Dibujar las proyecciones del cuadrado. **A(2,6,10), C(5,4,12); M(4,4, ?).**

PROBLEMA 4.40: Completar las proyecciones del cuadrado ABCD y del triángulo equilátero ABR no coplanares, pero de igual pendiente; sabiendo además que el triángulo ABR baja hacia el sureste.
A(4,5,9), B(7, ?,11), C(6, ?,12.5).

PROBLEMA 4.41: El segmento AC es recta de máxima pendiente de un pentágono regular ABCDE de lado igual a 2.5cm. Hallar las proyecciones del pentágono sabiendo que P está contenido en su plano. Considerar C encima de A. ESCALA: 1:1. P(1,4,13); A(4, ?,11), C(2, ?,10).

PROBLEMA 4.42: RS es una recta que tiene una pendiente de 100% hacia arriba y está contenida en el plano ABC. Completar las proyecciones del plano y de la recta; además hallar la pendiente del plano y dar el resultado en porcentaje.
R(4,4,12), S(7, ?,10); A(5,2,16), B(9, ?,13), C(2,6, ?).

PROBLEMA 4.43: Las bases de un prisma recto son triángulos equiláteros, siendo ABC la base inferior. Completar las proyecciones del prisma sabiendo que: (a) M es punto medio de BC, (b) la longitud de las aristas laterales es de 3 cm., (c) el punto A está detrás de B, y (d) mostrar la visibilidad en todas las proyecciones utilizadas. ESCALA 1:1. A(3,7,14), b(4, ?,17), C(6, ?,16)

PROBLEMA 4.44: Una bilia parte del punto M del triángulo ABC, rueda sobre este hasta el borde y cae verticalmente hasta el triángulo PQR rodando también sobre este y cae verticalmente al suelo. Indicar la trayectoria y posición final de la bilia. Plano PQR: Normal..
A(3,7,12), B(7,4,18), C(10,10,14); Nivel del piso (?, 1.5, ?); P(3.5, 4.5, 15.5), Q(7.5, ?, 20), R(10, 2.5, 13)

PROBLEMA 4.45: Un poste vertical RS está apoyado sobre un plano normal que pasa por XZ, en el punto S. Este poste está asegurado mediante tres cables RA, RB y RC. Completar las proyecciones del poste y de los cables sabiendo que RA mide 30mts y que A, B y C son equidistantes y están en el plano normal donde se apoya el poste. El punto "S" equidista de A, B y C.
ESCALA: 1:1,000. X(4,5,9), Z(8,2,11); A(5, ?, 7), S(6, ?, 8)

PROBLEMA 4.46: Dibujar una recta BX de 6cm de longitud que tenga 100% de pendiente descendente y que este contenida en el triángulo ABC.
ESCALA: 1: 1. A(2,5,10), B(5, 8, ?), C(7, 2.5, ?).

PROBLEMA 4.47: AB es una arista de un cubo y P un punto contenido en una de las caras que forman la arista AB. Completar las proyecciones del cubo.
A(2, 4, 8), B(3, 3, 10); P(4, 2.5, 7).

PROBLEMA 4.48: En el punto A se deja una bolita, la cual resbala sobre dos planos para llegar al punto S. sobre el plano Q para llegar al punto "R" y sobre el plano Z para llegar del punto "R" al punto S. determinar la orientación de los planos Q y Z y la pendiente de cada uno.
A(4,6,10), R(8.5,5,12), S(12,2,8.5)

PROBLEMA 4.49: O es el centro de gravedad de un triángulo equilátero RST de lado igual a 5cm contenido en un plano de orientación S60°E y de pendiente 130%NE. Hallar las proyecciones H y F del triángulo sabiendo que uno de sus lados tiene por orientación S30°E.
O(4, 6,14).

CAPITULO 5:

INTERSECCIONES

5.1. INTERSECCION DE UNA RECTA CON UN PLANO.

Una recta corta a una superficie plana en un punto, denominado punto de intersección. En la **fig. 5.1** se muestra a la recta **MN** que corta al plano **ABC** en el punto de intersección **I**.

Se utilizan dos métodos para determinar el punto de intersección:

a) **Método de la Vista de Canto:** El punto de intersección se localiza en la intersección de la recta con la vista de canto del plano dado.

b) **Método del Plano Cortante:** El punto de intersección se localiza en la intersección del plano de corte con el plano dado.

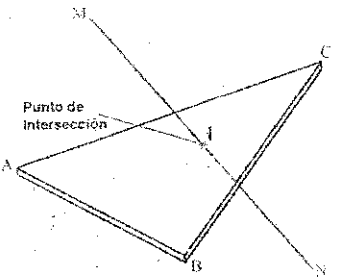


Fig. 5.1 Punto de Intersección.

5.1.1. METODO DE LA VISTA DE CANTO

A. CUANDO SE CONOCE LA VISTA DE CANTO.

El punto de intersección está determinado en la intersección de la recta con la vista de canto del plano dado. En la fig. **5.2** se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta oblicua **MN** y del plano vertical **ABC**; se desea determinar el punto de intersección **I** entre la recta dada y el plano vertical **ABC**.

PROCEDIMIENTO:

1) El corte de la recta **MN** en la proyección horizontal, con la vista de canto del plano vertical **ABC**, determina el punto de intersección **I**.
2) La proyección frontal del punto **I** se localiza, trazando desde el punto de corte la línea de referencia hasta que corte a la recta **MN**.
3) **Visibilidad:** En la proyección horizontal, **IN** y **IM** se halla delante y detrás respectivamente del plano vertical **ABC**; luego en la proyección frontal **IN** es visible y **IM** es invisible a partir del punto de intersección **I** hasta que encuentre al lado **AC**.

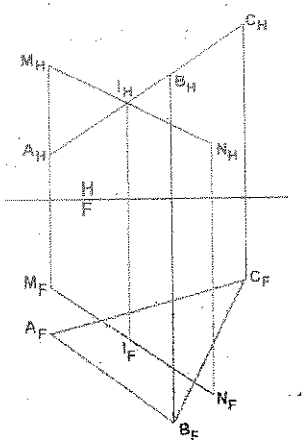


Fig. 5.2 Cuando se conoce la vista de canto del plano.

B. CUANDO NO SE CONOCE LA VISTA DE CANTO.

Para determinar el punto de intersección entre una recta y un plano debemos proyectar al plano dado de canto, luego en el corte del plano de filo con la recta, se localiza así el punto de intersección. En la fig. 5.3 se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta oblicua MN y del plano oblicuo ABC; se desea determinar el punto de intersección I entre la recta MN y el plano ABC.

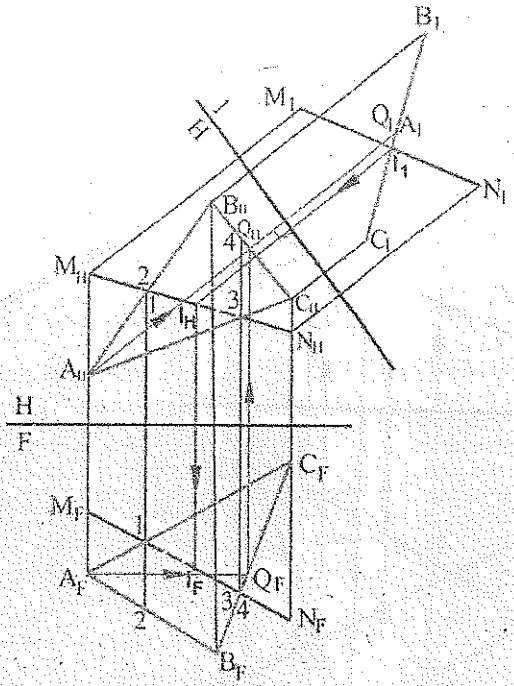


Fig. 5.3 Intersección de Recta con Plano: Método de la vista de canto.

PROCEDIMIENTO:

1) Determinar la vista de canto del plano ABC, usando la recta horizontal Ah.
2) En el plano 1, se observa que la recta MN corta al plano de canto ABC en el punto de intersección I; luego proyectamos a este punto a los planos horizontal y frontal, y contenida en la recta MN.
3) Visibilidad:
   a. En la proyección horizontal desde el punto de cruce (1,2) trazamos una recta perpendicular al plano frontal y encontramos 1en MN y 2 en AB, luego MN será visible hasta el punto de intersección, en el plano donde se produce el cruce por ser la primera recta que se encuentra.
   b. Desde el punto de cruce (3,4), trazamos una perpendicular al plano horizontal y encontramos primero a MN (3) y luego a BC (4), luego MN será visible en el plano donde se produce el cruce hasta el punto de intersección.

5.1.2 METODO DEL PLANO CORTANTE.

El punto de intersección entre una recta y un plano está situado sobre la recta de intersección del plano dado y un plano cortante que contenga a la recta dada. El plano cortante se traza en el plano horizontal o frontal. En la fig. 5.4 se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta oblicua **MN** y del plano oblicuo **ABC**; se desea determinar el punto de intersección I entre la recta **MN** y el plano **ABC**.

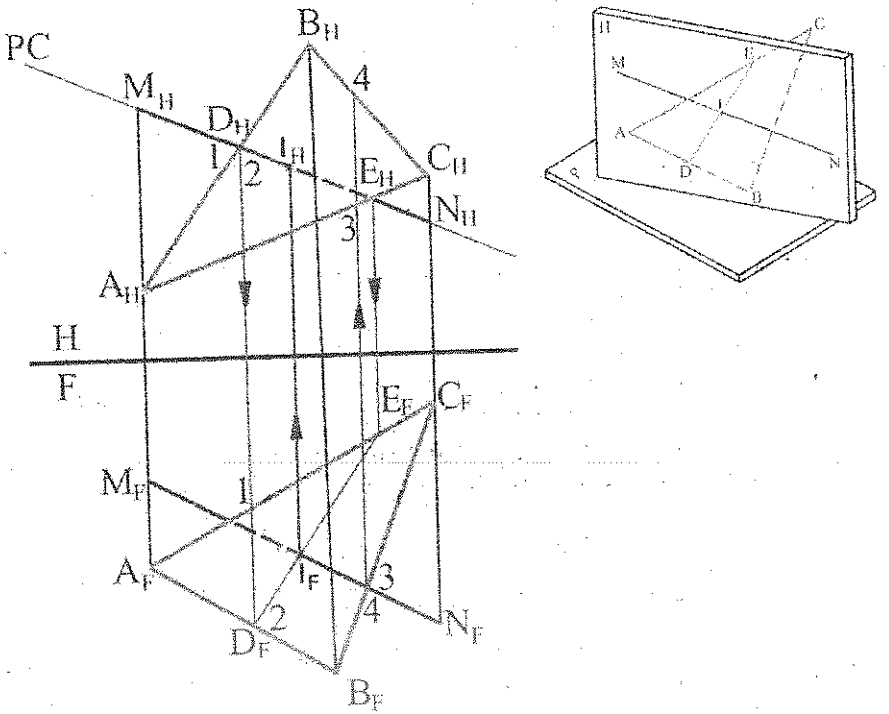


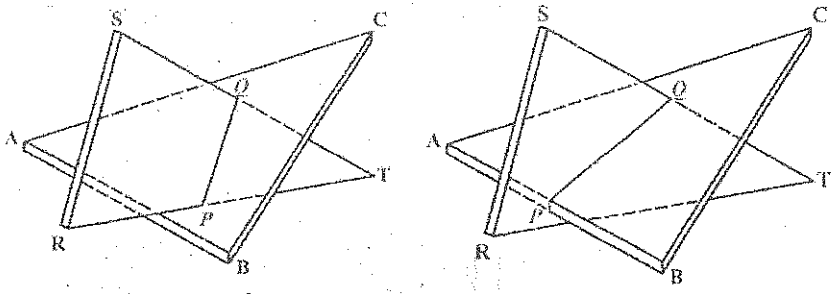
Fig. 5.4 Intersección de Recta con Plano: Método del Plano Cortante.

PROCEDIMENTO:

1) En el plano horizontal trazamos un plano cortante PC, proyectado de canto y que contenga a la recta **MN**.
2) El plano cortante corta a las aristas **AB** y **AC** del plano **ABC**, en los puntos D y E respectivamente; luego estos puntos se proyectan al plano frontal.
3) Se traza la recta que unen los puntos D y E, y ésta línea corta a la recta **MN** en el punto de intersección I. Las rectas **MN** y **DE** se cortan en el punto de intersección I; sabemos que dos rectas que se cortan determinan al Plano Cortante.
4) Luego desde el plano frontal se proyecta el punto de intersección I al plano horizontal, y contenida en el Plano Cortante.
5) Se determina la visibilidad de la recta **MN** con respecto al plano dado **ABC**, en los planos horizontal y frontal; similar al caso estudiado en el punto 5.1.1.B.

5.2 INTERSECCION DE PLANOS

La intersección de dos planos que no son paralelos es una línea recta llamada recta de intersección, que contiene todos los puntos comunes a los dos planos. Se presentan dos tipos de intersecciones: por mordedura y por penetración, tal como se observa en (a) y (b) de la figura 5.5 respectivamente.



a) Penetración. **b) Mordedura.**

Fig. 5.5 Intersección entre planos.

Existen dos métodos para determinar la recta de intersección:

a) **Método de la Vista de Canto:** Este método se usa para planos limitados y se le conoce como el Método del Plano Auxiliar.
b) **Método del Plano Cortante:** Este método se usa para planos limitados e ilimitados, y se le conoce como el Método de la Recta Individual o del Plano Cortante.

5.2.2 MÉTODO DE LA VISTA DE CANTO

A. CUANDO SE CONOCE LA VISTA DE CANTO.

Cuando se conoce la vista de canto de uno de los planos, la recta de intersección se determina en la intersección del plano de canto de uno de ellos con dos de las aristas del otro plano dado. En la figura 5.6 se dan las proyecciones horizontal y frontal del plano vertical **ABCD** y el plano oblicuo **RST**; se desea determinar la recta de intersección **PQ** entre el plano vertical **ABCD** y el plano oblicuo **RST**.

PROCEDIMIENTO:

1) En el plano horizontal el plano vertical **ABCD** se proyecta de canto.
2) El plano de canto **ABCD** corta al plano oblicuo **RST** en los puntos **P** y **Q**, estos puntos está contenida en las aristas **RT** y **RS** respectivamente.
3) Proyectamos los puntos **P** y **Q** a la vista frontal y contenida en las aristas **RT** y **RS** respectivamente, unimos estos puntos y determinamos la recta de intersección **PQ**.
4) **Visibilidad:** Para determinar la visibilidad de la intersección de estos planos en la vista frontal, observamos que en la vista horizontal las porciones **PQR** y **PQST** se encuentran delante y detrás respectivamente del plano vertical **ABCD** proyectada de filo; luego **PQR** es visible y **PQST** es invisible en el plano principal frontal.

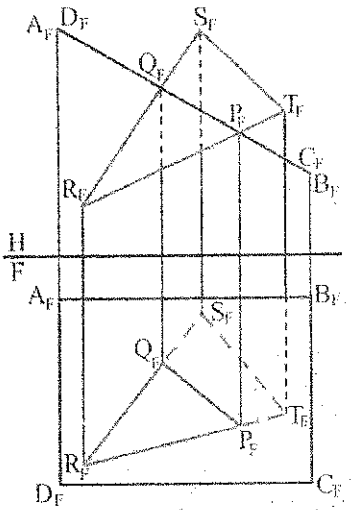


Fig. 5.6 Intersección entre planos, cuando se conoce la vista de canto de uno de ellos.

B. CUANDO NO SE CONOCE LA VISTA DE CANTO.

Para determinar la recta de intersección entre dos planos oblicuos, debemos trazar un plano auxiliar que proyecte ambos planos oblicuos, uno de ellos de canto; este plano de filo corta al otro plano en dos puntos, siendo estos puntos la recta de intersección. En la figura 5.7 se dan las proyecciones horizontal y frontal de los planos oblicuos **ABC** y **RST**; se desea determinar la recta de intersección **PQ** entre estos dos planos.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar el plano de elevación 1 que muestre ambos planos, de tal manera que uno de ellos, **ABC**, aparezca de canto.
2) En el plano de elevación 1, el plano de canto **ABC** corta al plano **RST** en los puntos **P** y **Q**; estos puntos están contenidas en las aristas **RS** y **RT** respectivamente.
3) Proyectar a los puntos **P** y **Q** a sus vistas principales y contenidas es sus aristas respectivas.
4) Al unir estos puntos observamos que el punto **P** se encuentra en un área que no es común a ambos planos, de la recta de intersección trazada seleccionamos el punto **P'** contenida en la arista **AC**, este punto si se encuentra en un área común a ambos planos.
5) Visibilidad:
   a) Desde el punto de cruce(1,2) de las rectas **RS** y **AB** en el plano horizontal, trazamos una perpendicular al plano frontal y encontramos primero a **RS(1)** y después a **AB(2)**, luego **RS** será visible en el plano donde se produce el cruce, en toda su longitud por no tener ningún punto de intersección en su recorrido.
   b) Desde el punto de cruce **(3,4)** de las rectas **BC** y **RT** en el plano frontal, trazamos una perpendicular al plano horizontal y encontramos primero a **RT (3)** y después a **BC (4)**, luego **TR** será visible en el plano donde se produce el cruce, hasta el punto de intersección.

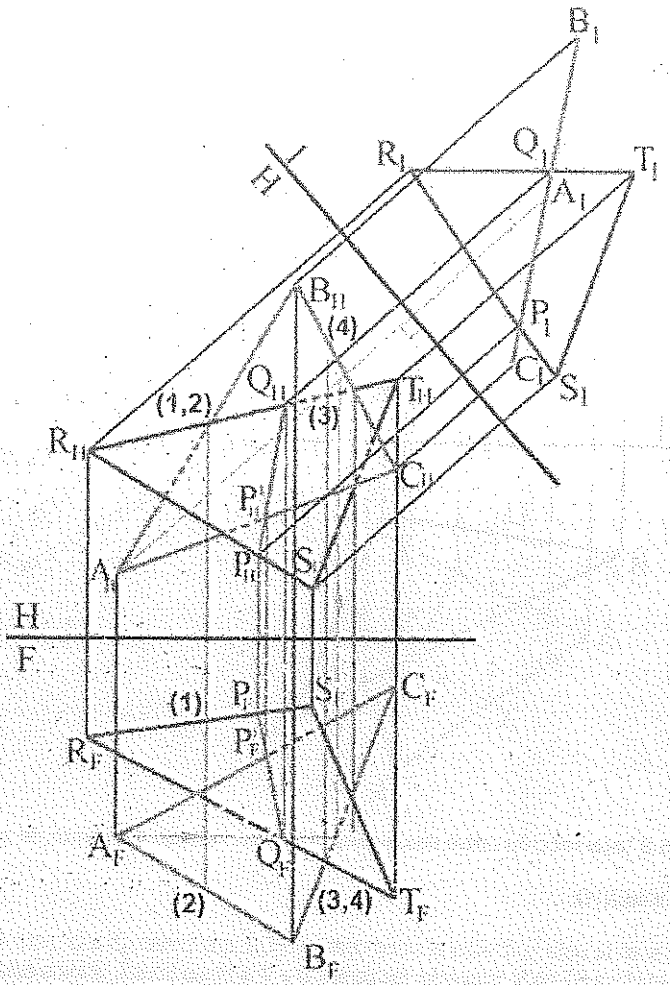


Fig. 5.7 Intersección entre dos planos oblicuos: Método de la vista auxiliar.

5.2.3 MÉTODO DEL PLANO CORTANTE. PLANOS LIMITADOS

Para determinar los puntos de intersección, se traza un plano cortante de canto, que contenga a una de las aristas y que corte a dos de las aristas del otro plano; se proyectan estos puntos al plano adyacente, si se cortan estas dos rectas, determinan al plano cortante, siendo el punto de corte el punto de intersección buscado. Usando el mismo método hallamos un segundo punto de perforación. Al unir estos dos puntos de penetración, determinamos la recta de intersección entre los dos planos.

En la figura 5.8 se dan las proyecciones horizontal y frontal de los planos oblicuos **ABC** y **RST**; se desea determinar la recta de intersección **PQ** entre estos dos planos.

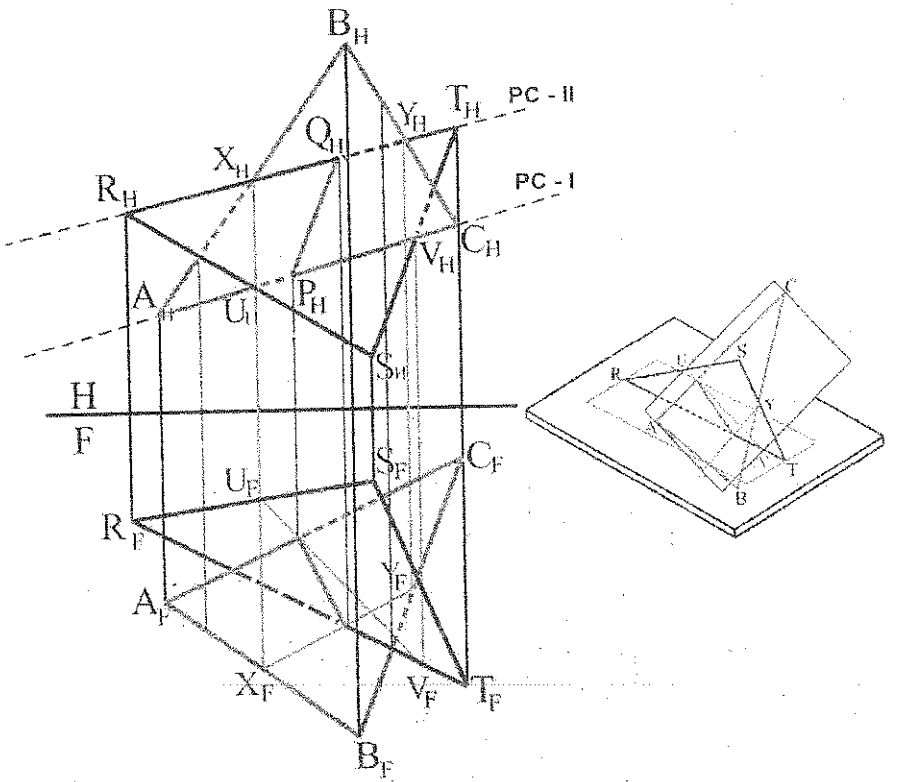


Fig. 5.8 Intersección entre dos planos oblicuos. Método del punto de perforación.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar en la vista horizontal el plano cortante PC-I, que contenga a la recta AC y que corte a RS en U y a ST en V. Proyectar los puntos U y V al plano frontal, unimos estos puntos y corta a la recta AC en el punto P; luego este punto de intersección P lo proyectamos al plano horizontal y contenida en la recta AC.
2) Trazar en el plano horizontal el plano Cortante PC – II, que contenga a la recta RT y que corta a la arista AB en X y a la arista BC en Y. Proyectar los puntos X e Y al plano frontal, unimos estos puntos y corta a la recta RT en el punto Q; luego este punto de intersección Q lo proyectamos al plano horizontal y contenida en la recta RT.
3) Visibilidad: La visibilidad de la intersección entre los planos ABC y RST, en las vistas horizontal y frontal, se determina en forma similar al caso estudiado en el punto 5.4.1.C.

5.2.4 METODO DEL PLANO CORTANTE.- PLANOS ILIMITADOS.

Dos planos oblicuos ilimitados se cortan en dos puntos que al unirlos determinan la recta de intersección. Para determinar estos dos puntos de intersección se debe trazar dos planos cortantes que determinan cada uno de ellos a un punto de intersección.

En la fig. 5.9 se dan las proyecciones horizontal y frontal de los planos ABC y RST; se desea determinar la recta de intersección PQ entre estos dos planos.

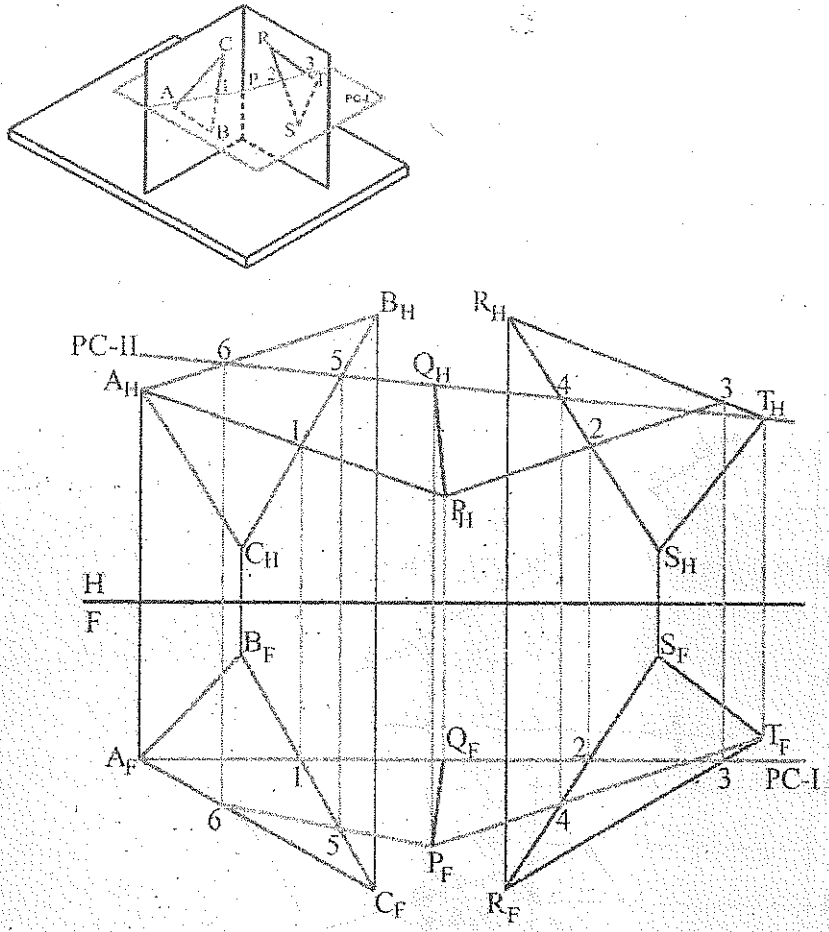


Fig. 5.9 Intersección de dos planos ilimitados.

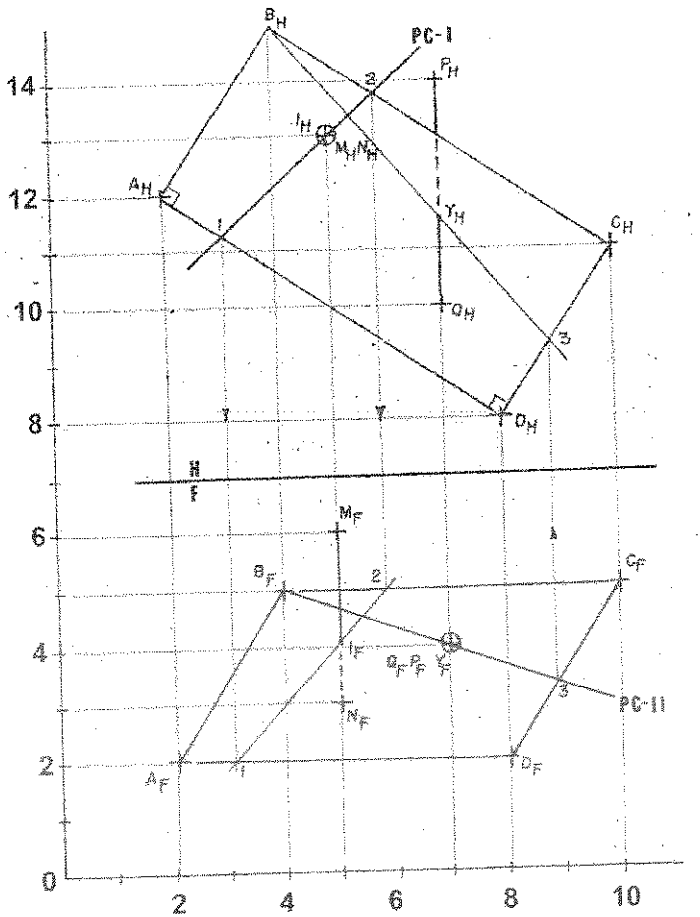
PROCEDIMIENTO:

1) Trazar el plano cortante horizontal PC – I, que corta a los dos planos dados en los puntos A – 1 y 2– 3. Proyectar estos puntos al plano horizontal y unirlos con rectas prolongadas, hasta que se corten en el punto P; luego este punto de intersección P lo proyectamos al plano frontal hasta que corte a la vista de canto del plano de corte PC - I.
2) Trazar en la vista horizontal el plano cortante vertical PC – II, que corta a los dos planos dados en los puntos T- 4 y 5 – 6. Proyectar estos puntos al plano frontal y unirlos con rectas prolongadas, hasta que se corten en el punto Q; luego este punto de intersección Q lo proyectamos al plano horizontal hasta que corte a la vista de canto del plano de corte PC - II.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 5.1: Hallar la intersección de la recta vertical **MN** y la recta normal **PQ**, con el plano horizontal **ABCD**; sin utilizar planos auxiliares. Mostrar la visibilidad.
A(2,2,?), B(4,5,?), C(10,5,11), D(8,2,8); M(5,6,13), N(5,3,13), P(7,4,14), Q(7,4,10).

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas indicadas.
2) Completar la proyección horizontal del rectángulo horizontal del rectángulo horizontal **ABCD**; trazando **AD** paralela a **BC**, y **DC** paralela a **AB**.

3) Trazar el plano cortante PC-I, y que pase por la recta MN proyectada de punta en el plano horizontal; este plano cortante corta al plano ABCD en los aristas AD y BC, siendo los puntos de corte 1 y 2 respectivamente; las cuales la proyectaos al plano frontal, unimos estos puntos y se cortan con la recta MN en el punto de intersección I.

4) En el plano frontal y desde el punto B trazamos el plano cortante PC – II, tal que pase por la recta PQ proyectada de punta; este plano cortante corta al plano horizontal ABCD en B y 3, estos puntos la proyectamos al plano horizontal y al unir B y 3, corta a la recta PQ en el punto de intersección Y.

5) Visibilidad en H: el cruce de las rectas PY y BC en el plano frontal, BC está arriba y PY está debajo; por lo tanto es visible BC en el plano horizontal.

6) Visibilidad en F: el cruce de las rectas MI con BC, en el plano horizontal MI esta delante y BC está detrás; por lo tanto es visible MI en el plano frontal.

PROBLEMA 5.2: En un momento determinado de un partido de fútbol se hicieron cinco disparos al arco **PQRS**, que tiene dos de sus lados horizontales. Los puntos **A, B, C, D** y **E** representan los puntos de origen de los disparos, que siguen las siguientes direcciones: **Este, S60°E, S70°E, S71°E** y **Este** respectivamente. Suponiendo que todos estos disparos siguen una misma trayectoria parabólica, determinada por los puntos **A, X** e **Y**. Determinar: (a) Si los cinco disparos se convirtieron en gol, (b) Las distancias del punto de penetración de los goles al travesaño **QR**. (c) La altura desde el gramado al punto de penetración de los goles. Nota: Considerar que el estado es horizontal.
P(7,2,?), Q(9,6,?), R(15,6,13), S(13,2,13); X(12,6,?), Y(16, 4, ?).
A(4,2,13), B(6,?,16), C(5,?,14), D(7,?,16), E(7,?,10).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos según sus coordenadas dadas.

2) Completar la proyección horizontal del rectángulo **ABCD**, trazando desde los extremos **R** y **S** dos perpendiculares a la recta **RS** y donde corte a las líneas de referencia de **Q** y **P** hallamos su proyección horizontal.

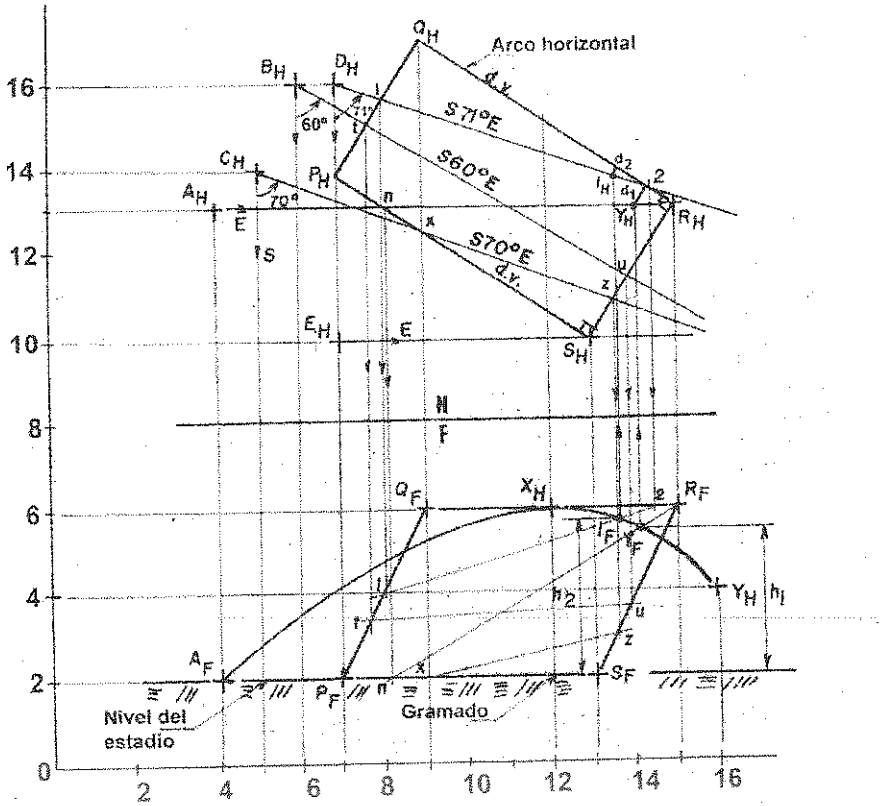
3) El disparo que parte del origen **A** sigue la dirección **Este** y corta al plano **PQRS**, en "**n**" y **R**; que proyectados y unidos en el plano frontal cortan a la trayectoria parabólica en el punto de intersección **Y**, que proyectamos después al plano horizontal. Este disparo se convierte en gol.

4) Los disparos que parten de **B, C** y **E** siguen las direcciones **S60°E, S70°E** y **Este**; y cortan al plano **PQRS** en los puntos **t** y **u, x** y **z** y **n** respectivamente; que proyectados y unidos en el plano frontal, no cortan a la trayectoria parabólica; por lo tanto no existe intersección, no se convienen en goles.

5) El disparo que parte del origen **D** sigue la dirección **S71°E** y corta al plano **PQRS** en **1** y **2**; que proyectados y unidos en el plano frontal cortan a la trayectoria parabólica en el punto de intersección **I**, que proyectamos después al plano horizontal. Este disparo se convierte en gol.

6) Respuestas: (a) Dos disparos se convierten en gol. (b) d_1 = 30cm y d_2 = 20 cm., (c) h1= 2.30 mt., h2=2.40mt.

SOLUCIÓN:



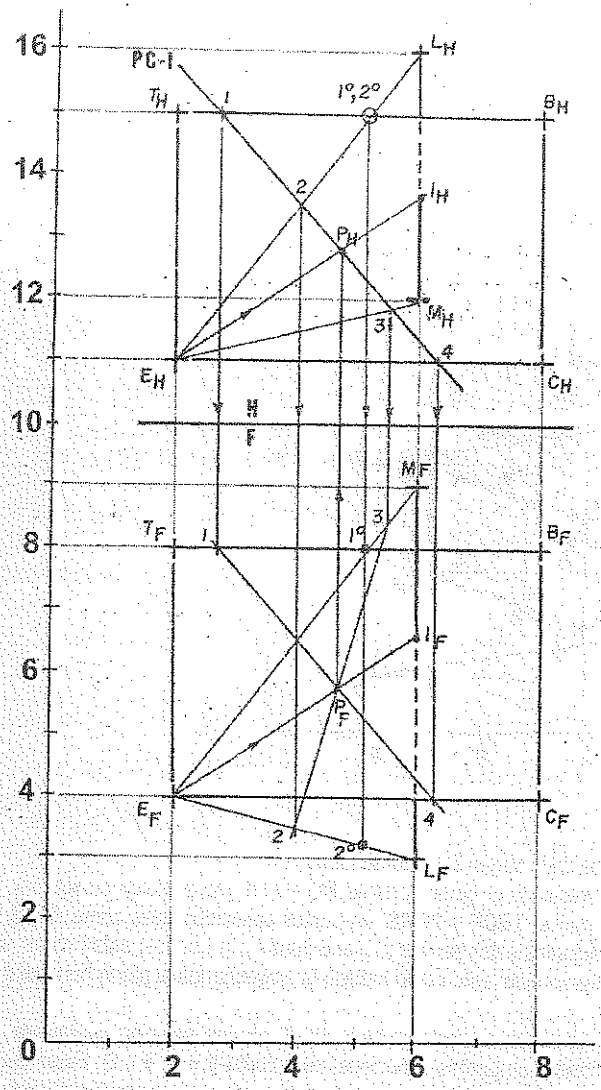
PROBLEMA 5.3: Hallar la intersección de la recta LM con el plano TBCE, sin utilizar planos auxiliares. Mostrar la visibilidad.
L(6,3,16), M(6,9,12); T(2,8,15), B(8,8,15), C(8,4,11), E(2,4,11).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Unir la recta LM con el extremo E (arbitrario, se asume un punto cualquiera) y formamos el plano MEL.
3) En el plano horizontal trazamos el plano cortante PCI en una posición cualquiera y que corte a los dos planos: TBCE y MEL en los puntos 1 y 4, 2 y 3 respectivamente, de fácil ubicación; la proyectamos y unimos en el plano frontal y se corta en el punto de intersección P, que después proyectamos al plano horizontal.
4) Unir el extremo E con P y la prologamos hasta cortar a la recta LM en el punto I, que representa el punto de intersección buscado.

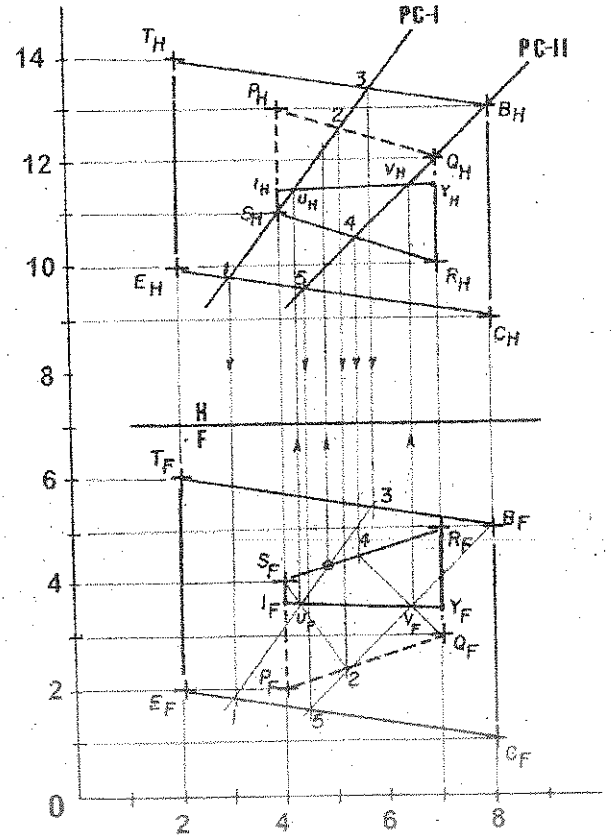
5) Visibilidad en H: el cruce de las rectas EL y TB, desde el punto de cruce trazamos una perpendicular hacia al plano frontal y encontramos primero a TB, siendo visible esta recta en el plano horizontal; luego LM será visible hasta que encuentre a TB, sigue invisible y a partir del punto I sale visible.

6) Visibilidad en F: el cruce de las rectas TB y EM, desde este punto de cruce trazamos una perpendicular hacia al plano horizontal y encontramos primero a EM; por lo tanto es visible EM en el plano frontal; luego ML es visible hasta el punto de intersección I, como MI, después sigue invisible y sale visible pasa la recta EC.



PROBLEMA 5.4: Hallar la intersección de los cuadriláteros TBCE y PQRS, sin utilizar planos auxiliares. Mostrar la visibilidad. T(2,6,14), B(8,5,13), C(8,1,9), E(2,2,10). P(4,2,13), Q(7,3,12), R(7,5,10), S(4,4,11).

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dado según sus coordenadas.
2) En el plano horizontal trazamos el plano cortante PC – I en una posición cualquiera, y que corte a los dos planos dados; TBCE y PQRS, en puntos conocidos tales como: 1 y 3, S y 2 respectivamente. Proyectamos estos puntos al plano frontal y la unimos, estas rectas se cortan en el punto U de intersección; este punto hallado la proyectamos al plano horizontal hasta cortar al plano cortante.
3) En el plano horizontal trazamos el plano cortante PC-II, en una posición cualquiera, y que corte a los dos planos dados en puntos conocidos; tales como 5 y B, 4 y Q. Estos puntos, la proyectamos al plano frontal, la unimos y se cortan en el punto de intersección V; este punto la proyectamos al plano horizontal y contenido en el plano cortante.

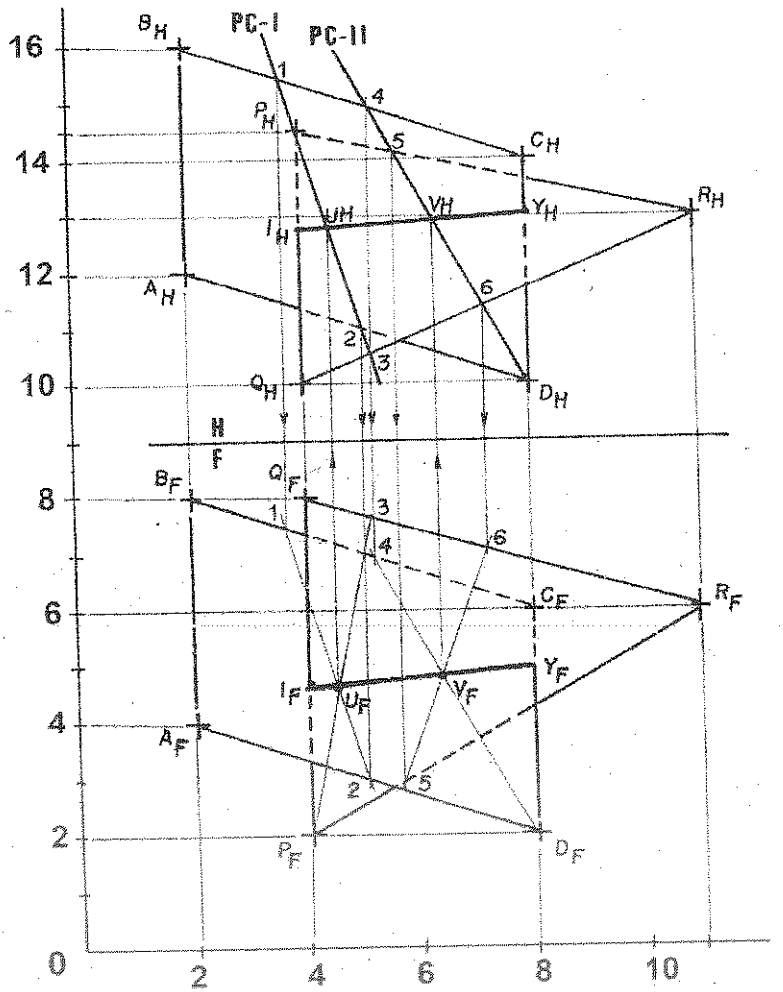
4) Unir los puntos U y V, y la prolongamos en sus dos extremos hasta cortar a PS y QR en los puntos de intersección I e Y respectivamente; hallándose la recta de intersección IY.
5) Visibilidad en H; el cruce de las rectas SR y B5; desde este puno de cruce trazamos una perpendicular hacia al plano frontal y encontramos primero a SR, siendo visible esta recta en el plano horizontal; luego desde S y R parten líneas visibles hasta encontrar a los puntos de intersección I y Y respectivamente; a partir de estos puntos de intersección continúa invisible las rectas hasta llegar a los extremos P y Q respectivamente.
6) Visibilidad en F; el cruce de las rectas SR y 13; desde este punto de cruce trazamos una perpendicular hacia el plano horizontal y encontramos primero a SR; entonces SR está delante y 13 detrás, luego SR es visible en el plano frontal. Desde los puntos S y R parten líneas visibles hasta encontrar a los puntos de intersección I y Y respectivamente; a partir de estos puntos las rectas continúan invisibles.

PROBLEMA 5.5: Determinar la intersección de los planos ABCD y PQR. Mostrar la visibilidad del conjunto. Usar el método del plano Cortante. **A(2,4,12), B(2,8,16), C(8,6,14), D(8,2,10). P(4,2,14.5), Q(4,8,10), R(11,6,13).**

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) En el plano horizontal trazamos el plano cortante **PC-I** en una posición cualquiera, y que corte a los dos planos dados: **ABCD** y **PQR** en puntos conocidos tales como **1, P, 2 y 3** y de fácil determinación. Estos puntos la proyectamos al plano frontal y unimos los puntos que pertenecen a un mismo plano; estas rectas se cortan en el punto **U** de intersección, que luego la proyectamos al plano horizontal hasta cortar al plano cortante.
3) En el plano horizontal trazamos el plano cortante **PC – II**, también en una posición cualquiera, y que corte a los dos planos dados en puntos conocidos tales como: **4, 5, 6 y D**. Estos puntos la proyectamos al plano frontal y unimos los puntos que pertenecen a un mismo plano; estas rectas se cortan en el punto **V** de intersección, que luego la proyectamos al plano horizontal hasta encontrar al plano cortante.
4) Unir los puntos U y V; y la prolongamos en sus extremos hasta cortar a **PQ** y **CD** en los puntos de intersección **I** e **Y** respectivamente; esta recta **IY** representa la recta de intersección entre los planos dados.
5) Visibilidad en H: analizando las rectas **AD** y **QR**, en el plano frontal observamos que **QR** está arriba y **AD** se encuentra debajo de dicha recta (QR); por lo tanto **QR** es visible en el plano horizontal en toda su longitud, por no tener ningún punto de intersección en toda su extensión. Si **QR** es visible, también lo será **QY**, luego **AD** será visible hasta llegar a la recta **QI**, pasa por debajo invisible del plano **IQR**, y sale visible cuando pasa la recta **QR**.
6) Visibilidad en F: analizando las rectas **BC** y **QR**, en el plano horizontal vemos que **QR** está delante y **BC** está detrás de esta recta; por lo tanto **QR** es visible en el plano frontal en toda su longitud.

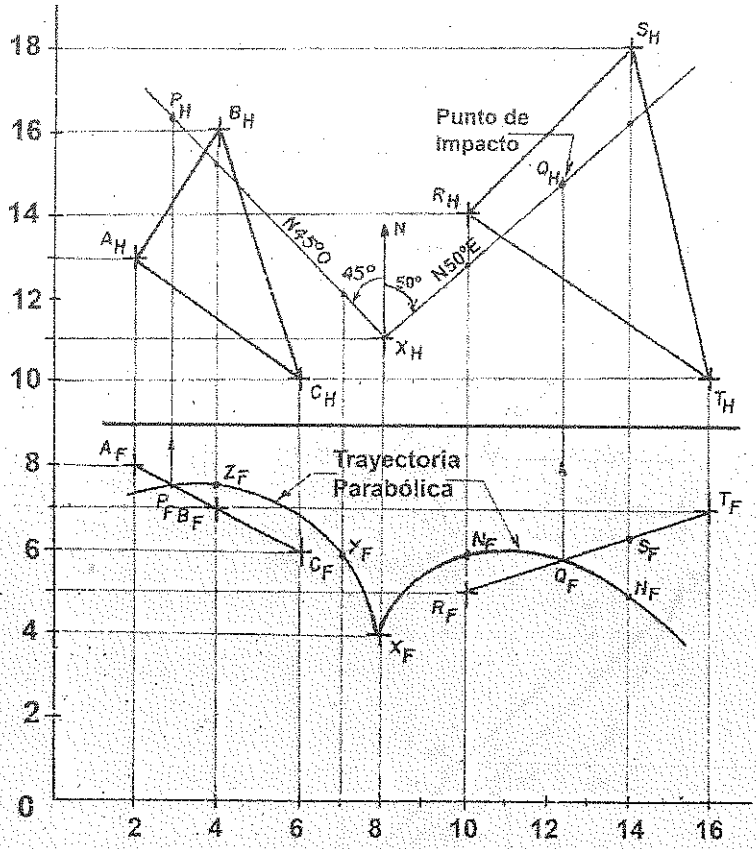
SOLUCIÓN:



PROBLEMA 5.6: ABC y RST representan los planos de dos ciudades normales. Un submarino Polar es ubicado en "X", efectúa los disparos de dos proyectiles atómicos, con la intención de destruir las ciudades antes mencionadas. El primer disparo sigue la dirección N45°O y el segundo disparo sigue la dirección N45°E; teniendo ambos disparos una trayectoria parabólica. Averiguar si se destruyeron las dos ciudades, de ser así; determinar las coordenadas del lugar de impacto de los proyectiles. Trayectoria parabólica del primer disparo: X, Y, Z. Trayectoria parabólica del segundo disparo: X, M, N.

A(2,8,13), B(4,?,16), C(6,6,10); R(10,5,14), S(14,?,18), T(16,7,10)
X(8,4,11); Y(7,6,?), Z(4,7.5,?); M(10,6,?), N(14,5,?).

SOLUCIÓN:

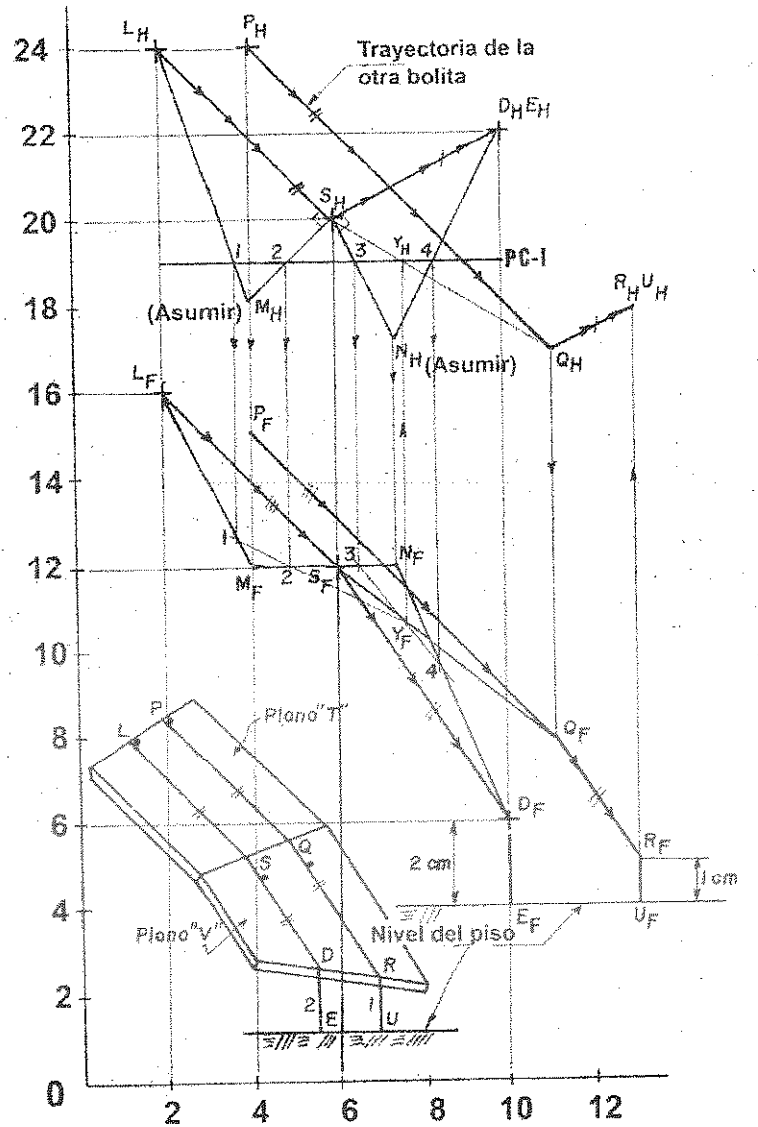


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Desde el punto X en el plano horizontal graficamos las orientaciones **N45°O** y **N45°E** del 1ro. y 2do. disparo respectivamente, efectuado por el submarino Polar.
3) Desde el punto X en el plano frontal trazar las trayectorias parabólicas del 1ro. y 2do. disparo y que pasan por los puntos X, Y, Z y X, M, N respectivamente.
4) La trayectoria parabólica del primer disparo se corta con la proyección de canto del plano **ABC** en el punto **P**, tal como se observa en el plano frontal; este punto la proyectamos al plano horizontal hasta cortar a la orientación **N45°O** y vemos que el punto **P** no se encuentra contenida en el plano **ABC**; por lo tanto no hace impacto en esta ciudad.
5) La trayectoria parabólica del segundo disparo se corta con la proyección de canto del plano **RST** en el punto **Q**, tal como se observa en el plano frontal; este punto la proyectamos al plano horizontal hasta cortar a la orientación **N45°E**, y vemos que el punto **Q** se encuentra contenida en el plano **RST**; por lo tanto este disparo hace impacto en esta ciudad.

PROBLEMA 5.7: Los puntos L, S y D representan la trayectoria de una bolita al rodar sobre los planos "T" y "V" respectivamente. Determinar la trayectoria de otra bolita que parte de P ("P" pertenece al plano "T"), si rueda sobre los planos "T" y "V" respectivamente; tal como se observa en la figura "a". L(2,16,24), S(6,12,20), D(10,6,22); P(4,?, 24).

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO 5.7:

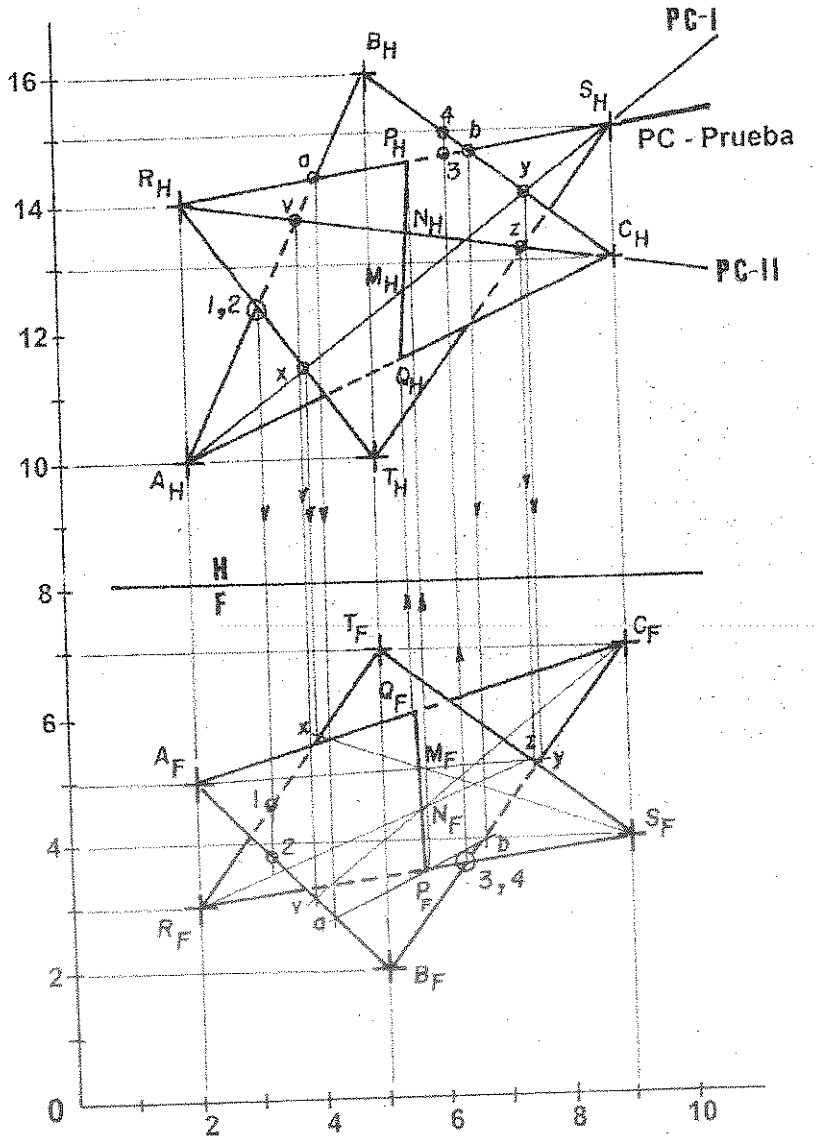
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Unir los puntos I. ; S, y S y D; estas rectas representan la trayectoria de la bolita, por lo tanto son rectas de máxima pendiente.
3) Formar los planos LSM y DSN trazando las rectas horizontales SM y SN perpendiculares a las RMP LS y SD respectivamente. Asumir en una posición cualquiera los puntos M y N.
4) Hallar la intersección de los planos LSM y DSN, utilizando el plano cortante I que corta a los planos en (1,2) y (3,4) respectivamente; estos puntos proyectamos al plano frontal, las unimos y se cortan en el punto de intersección Y que unido con S nos determina la recta de intersección SY.
5) En el plano horizontal y desde el punto P trazamos una paralela a la RMP, tal como LS y la prologamos hasta que se corte con la prolongación de la recta de intersección SY en el punto Q.
6) Proyectamos el punto Q al plano frontal hasta que corte a la prolongación de la recta SY; desde este punto Q trazamos una paralela a LS y la prolongamos hasta intersecar a la línea de referencia del punto P.
7) En el plano frontal y desde el punto D trazamos 2 cm debajo de él una recta, que representa el l.g. del piso; luego desde el nivel del piso hacia arriba medimos 1 cm., por donde trazamos una recta que representa el l.g. del borde del plano "V".
8) Desde el punto Q trazar una paralela a la RMP, tal como SD y la prolongamos hasta determinar el punto Q.

PROBLEMA 5.8.: Hallar la intersección de los planos ABC y RST, sin utilizar planos auxiliares. Mostrar la visibilidad. A(2,5,10), B(5,2,16), C(9,7,13); R(2,3,14), S(9,4,15), T(5,7,10).

PROCEDIMIENTO:

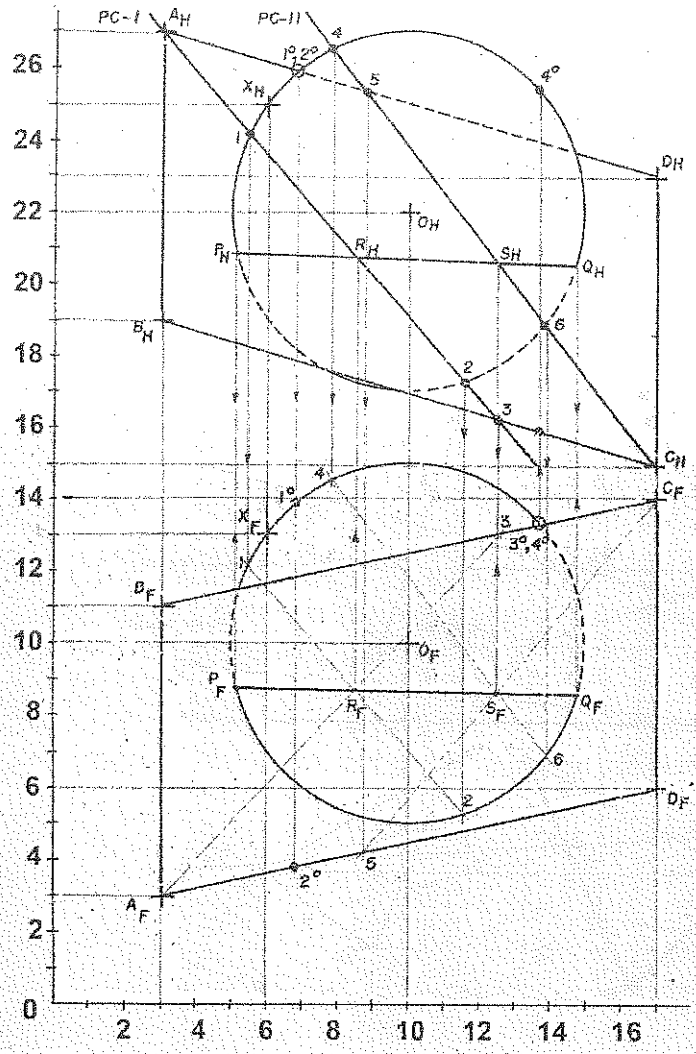
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Trazar el PC-I en el plano horizontal en una posición cualquiera, y que corte a los dos planos dados en puntos conocidos; tales como: A, x, y i, S. Estos puntos la proyectamos al plano frontal, unimos los puntos que pertenecen a un mismo plano; como Ay e xS, estas rectas se cortan en el punto de intersección M; que luego proyectamos al plano horizontal hasta cortar al PC – I.
3) Trazar el PC – II en el plano horizontal en una posición cualquiera, y que corte a los dos planos dados en puntos conocidos; tales como: R, v, z y C. Estos puntos la proyectamos al plano frontal, y unimos los puntos que pertenecen a un mismo plano; como Rz y vC, estas rectas se cortan en el punto de intersección N; que luego la proyectamos al plano horizontal hasta cortar al PC- II.
4) Para comprobar el método utilizado, trazamos en el plano horizontal el "plano cortante de prueba" y que pase por la recta RS; este plano cortante corta al plano ABC en a y b, proyectamos estos puntos al plano frontal y la unimos; y vemos que se corta con RS en el punto P de intersección.
5) Unir los puntos M y N, la prologamos hasta cortar al primer lado de uno de los planos; y vemos que corta a RS y AC en los puntos de intersección P y Q respectivamente. El punto P hallado coincide con el determinado con el plano cortante de prueba.
6) Visibilidad en H: analizando las rectas RT y AB, en el plano frontal vemos que RT está arriba y AB por debajo; por lo tanto RT es visible en el plano donde se produce el cruce.
7) Visibilidad en F: analizando las rectas BC y RS, en el plano horizontal vemos que RS está delante y BC detrás; por lo tanto RS es visible en el plano donde se produce el cruce.

SOLUCIÓN 5.8:



PROBLEMA 5.9: Sin utilizar plano auxiliares hallar la intersección de los planos **ABCD** que es un paralelogramo con una elipse cuyas proyecciones principales son circulos de **5cm** de radio con centro en **O**; y que contiene al punto X.
O(10,10,22), X(6,13,25); A(3,3,27), B(3,11,19), C(17,14,15), D(17,6,23).

SOLUCIÓN 5.9:



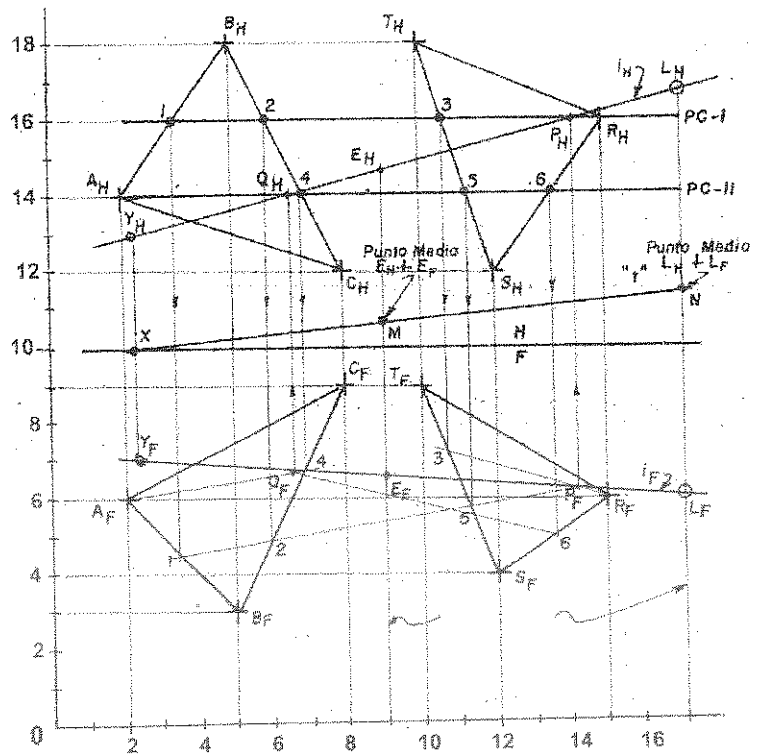
PROCEDIMIENTO 5.9:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Trazar el **PC – I** en una posición cualquiera, y que corte a los planos dados en puntos conocidos; tales como **A**, **1**, **2** y **3**. Estos puntos la proyectamos al plano frontal, y unimos los puntos que pertenecen a un mismo plano; como **A3** y **12**, estas rectas se cortan en **R**, que la proyectamos luego al plano horizontal hasta cortar al **PC – I**.

3) Seguir el mismo procedimiento para el **PC – II**; que nos determina el punto **S**.
4) Unir los puntos **R** y **S**, la prologamos hasta cortar al primer plano que encuentre en los puntos **P** y **Q** de intersección; siendo **PQ** la recta de intersección.
5) Visibilidad en **H**: analizando el cruce de las rectas **AD** y **X4**; en el plano frontal observamos que **X4** está arriba y **AD** por debajo; por lo tanto **X4** es visible en el plano horizontal.
6) Visibilidad en **F**: analizando las rectas **BC** y **Q4**; en el plano horizontal observamos que **BC** está delante y **Q4** detrás; por lo tanto **BC** es visible en el plano frontal.

PROBLEMA 5.10: ABC y RST determinar la posición de dos planos respectivamente. Hallar un punto común a estos dos planos, tal que su cota sea igual a su alejamiento. Trazar la línea de pliegue **(H-F) 10mm** encima de **C**. **A(2,6,14), B(5,318), C(8,9,12); R(15,6,16), S(12,4,12), T(10,9,18).**

SOLUCIÓN 5.10:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Trazar el plano cortante frontal **PC – I** y que corte a los dos planos dados; en **1** y **2** al plano **ABC**, **3** y **R** al plano **RST**. Estos puntos la proyectamos al plano frontal y unimos los puntos como **12** y **3R**, que se cortan en **P**; que la proyectamos luego al plano horizontal hasta cortar al **PC – I**.

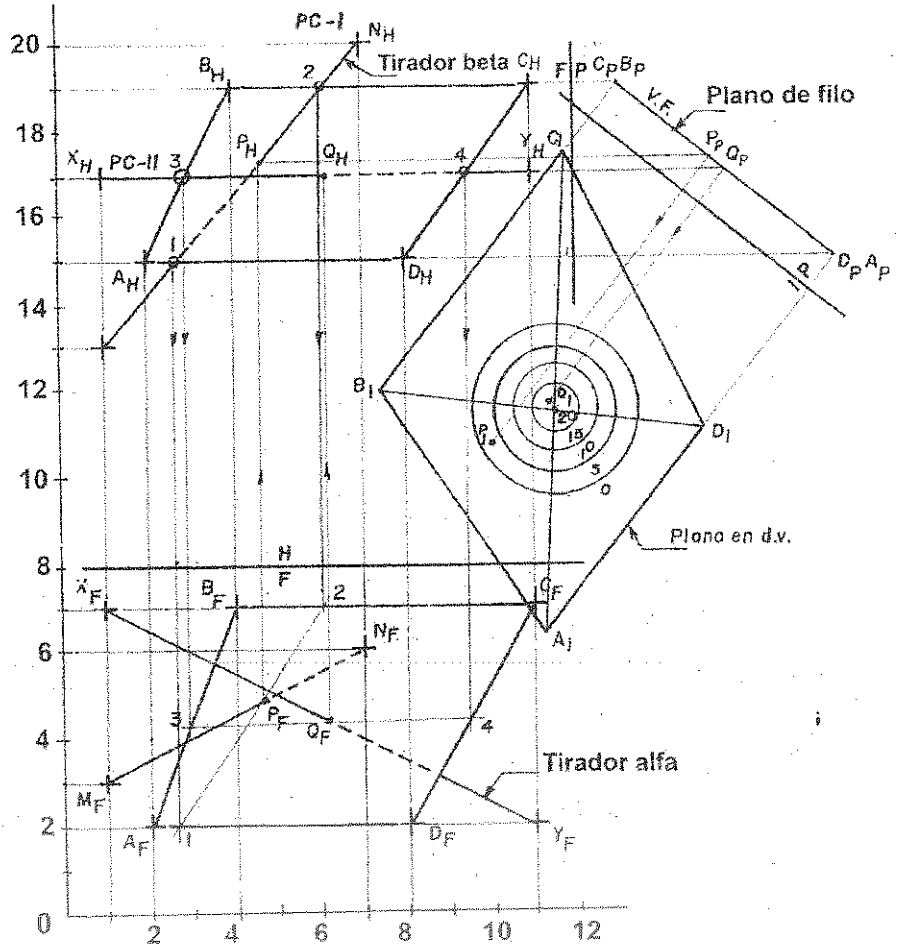
3) Trazar el PC – II y corta al plano ABC en A y 4, y al plano RST en 5 y 6. Proyectar estos puntos al plano frontal y al unirlos se cortan en Q, que luego la proyectamos al plano horizontal hasta cortar al PC – II.
4) Unir los puntos P y Q, que representa la recta común "i" de los planos dados ABC y RST
5) Tomar el segmento "EL" en una posición cualquiera en la recta común "i".
6) Se toma el punto medio de las sumas de cotas entre alejamiento de cada extremo del segmento tomando "EL"; tales como M y N.
7) Trazar la recta "t" que une los puntos medios M y N, y la prologamos hasta cortar a la línea (H – F) en X.
8) Por el punto X trazar la línea de referencia perpendicular a la línea (H – F) y la prologamos hasta encontrar a la recta común "i" de los planos dados en Y; siendo este punto común a los dos planos dados y tal que su cota sea igual al alejamiento.

PROBLEMA 5.11: ABCD es un cartel plano de X unidades de lado. En el se representa un sistema de Bull con el máximo número de puntaje mediante círculos inscritos desde el centro de las diagonales del mencionado cuadrilátero. El máximo puntaje (20) corresponde al círculo más pequeño, de radio 0.5 cm. Los demás círculos crecen de radio en medio centímetro. Cada espacio de entre círculos vale 5 puntos de diferencia. Todo disparo fuera del cartel, es disparo perdido; y todo disparo en el cartel y fuera de los círculo, vale 0 puntos. Determinar el puntaje de cada tirador, si: XY son puntos de la trayectoria del tirador alfa. MN son puntos de la trayectoria del tirador beta. X(1,7,17), Y(11,2,17); M(1,3,13), N(7,6,20). A(2,2,15), B(4,7,19), C(11,7,19), D(8,2,15)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Utilizando los planos cortantes PC – I y PC – II, determinamos los puntos de intersección P y Q, que corresponde a los disparos efectuados por los tiradores **Beta** y **Alfa** respectivamente.
3) Hallar la dimensión verdadera de cartel plano ABCD.
4) Proyectar los puntos P y Q hasta el plano de proyección en donde el cartel ABCD se proyecta en dimensión verdadera.
5) En el plano "1" trazar las diagonales del cuadrilátero, y desde el punto de corte de estas diagonales, trazar el círculo de **0.5cm** de radio que corresponde al de mayor puntaje (20)
6) Luego trazamos los demás círculos que crecen en **1cm** de diámetro.
7) Se necesitan cuatro círculos y cada espacio de entre círculos desciende 5 puntos de diferencia.
8) En el plano "1" observamos que los puntos P y Q se encuentran en los espacios señalados con el puntaje 5 y 20 respectivamente.
9) Respuesta: Puntaje de cada tirador: Alfa: "Q": 20 puntos, Beta: 05 puntos.

SOLUCIÓN 5.11:

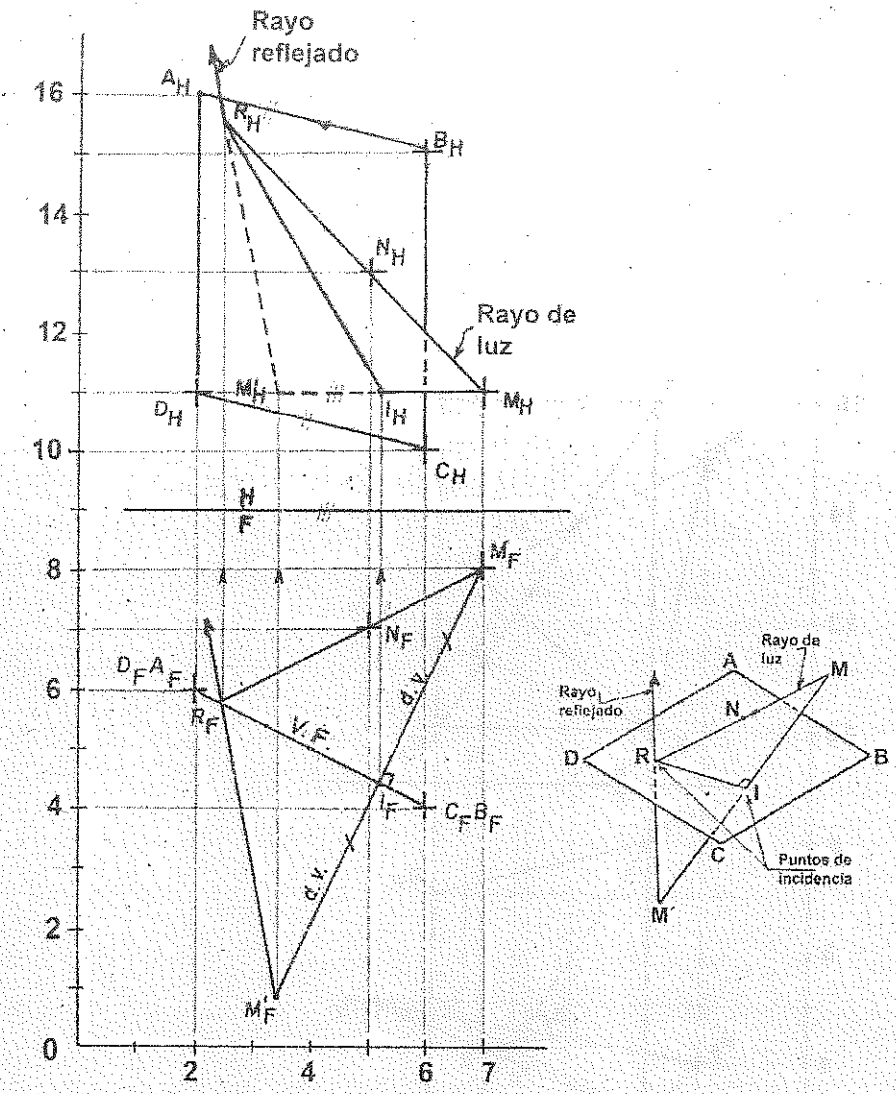


PROBLEMA 5.12: Determinar las proyecciones del rayo reflejado al incidir el rayo **MN** sobre el espejo plano **ABCD**. Usar sólo las proyecciones horizontal y frontal. Visibilidad.
M(7,8,11), N(5,7,13); A(2,6,?), B(6,4,15), C(6,4,10), D(2,6,11).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Completar la proyección horizontal del espejo plano **ABCD**, trazando **BA** paralelo a **CD**.
3) Unir **M** y **N**; en el plano frontal el rayo **MN** incide en el punto **R**, en el espejo **ABCD** proyectado de canto.
4) En el plano frontal y desde el punto **M**, trazar una recta perpendicular al plano de filo **ABCD**.

SOLUCIÓN 5.12:



PROCEDIMIENTO 5.12: (continuación)

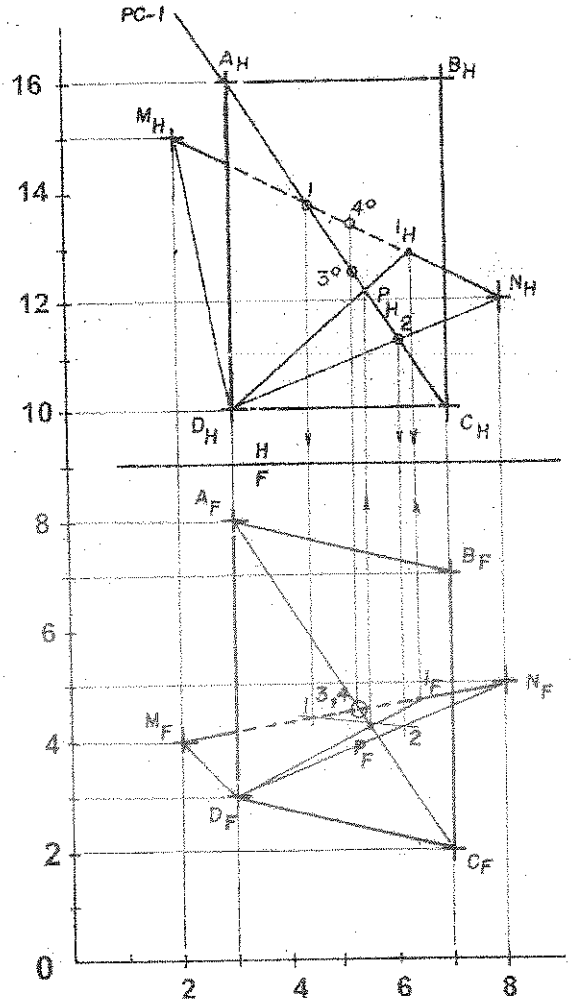
5) En el plano frontal tomar **MI = IM'**; siendo **I** punto de intersección de **MN** con **ABCD**. **MN'** recta en dimensión verdadera (1ra. Condición de perpendicularidad).
6) En el plano frontal unir **M'** con **R** y prolongamos esta recta que representa el rayo reflejado.
7) En el plano horizontal **MM'** se proyecta paralela al plano de proyección, luego proyectar sobre esta recta el punto **I**.

PROCEDIMIENTO 5.12: (continuación)

8) En el plano horizontal, en el corte del rayo **MN** con la línea de referencia del punto **R**, se determina su proyección horizontal.
9) Luego unir en el plano horizontal **M'** con **R** que representa la proyección del rayo reflejado.
10) Visibilidad: en el plano frontal **MI** está arriba de **ABCD**, y **M'I** por debajo de dicho plano, por lo tanto **MI** es visible en el plano horizontal.

PROBLEMA 5. 13: Hallar la intersección de la recta **MN** con el plano **ABCD**, sin utilizar vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad. **M(2,4,15), N(8,5,12) A(3,8,16), B(7,7,16), C(7,2,10), D(3,3,10)**

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO 5.13:

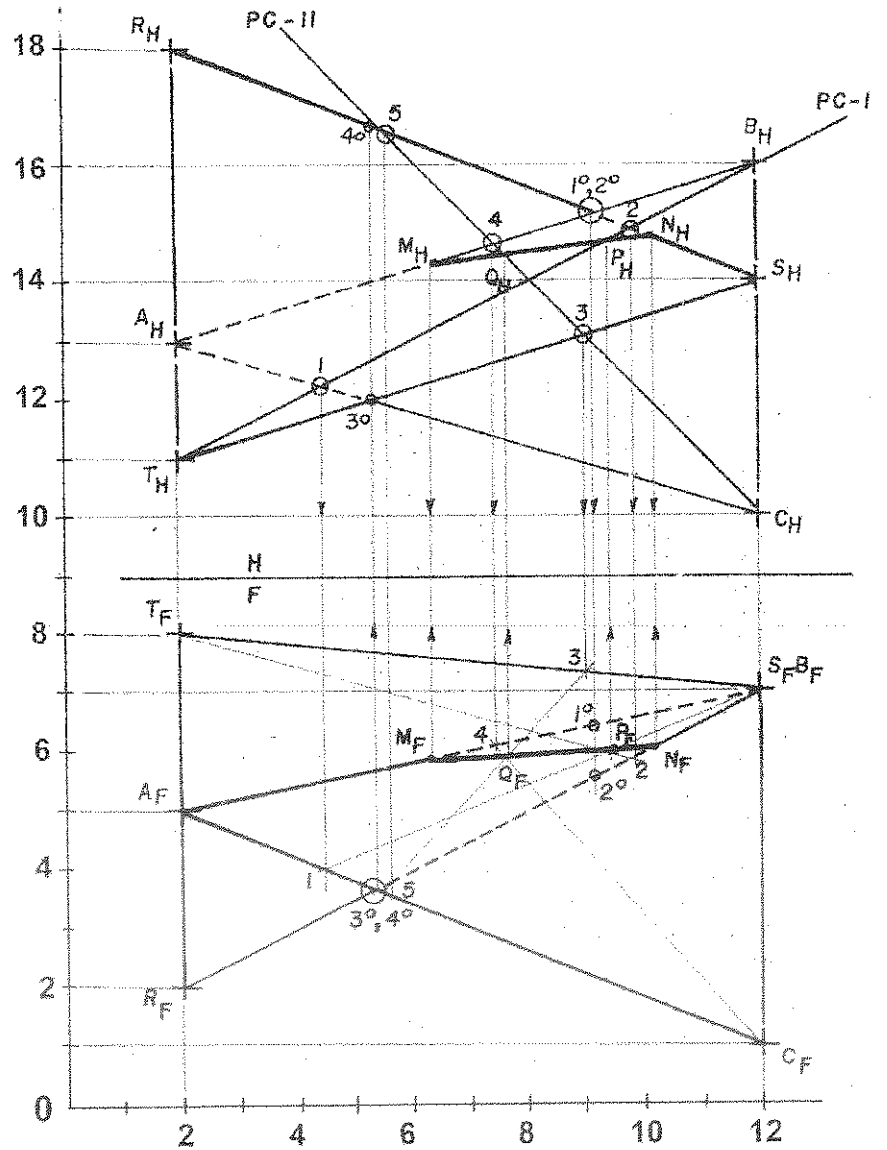
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Unir los extremos de la recta MN con el punto D (seleccionar un punto arbitrario del plano ABCD), y se forma el plano MND.
3) En el plano horizontal trazamos el plano cortante PC – I, en cualquier posición y que corte a los dos planos; ABCD y MND, tales como A, C y 1, 2 respectivamente; estos puntos son de fácil determinación.
4) Proyectar A, C, 1 y 2 al plano frontal y al unirse se cortan en P, luego ubicamos este punto en el plano horizontal.
5) Unir el punto D con P, y la prologamos hasta cortar a la recta MN en el punto de intersección I buscado.
6) Visibilidad en H: el cruce de las rectas AC y MN; en el plano frontal vemos que AC esta "encima" y MN "debajo" de dicha recta; por lo tanto es visible AC y MN invisible en el plano horizontal.
7) Visibilidad en F: el cruce de las rectas AC y MN; en el plano horizontal encontramos AC "delante" y MN "detrás" de dicha recta, por lo tanto es visible AC y MN invisible en el plano frontal.

PROBLEMA 5.14: Hallar la intersección de los planos ABC y RST, sin utilizar vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad.
A(2,5,13), B(12,7,16), C(12,1,10), R(2,2,18), S(12,7,14),T(2,8,11)

PROCEDIMIENTO:

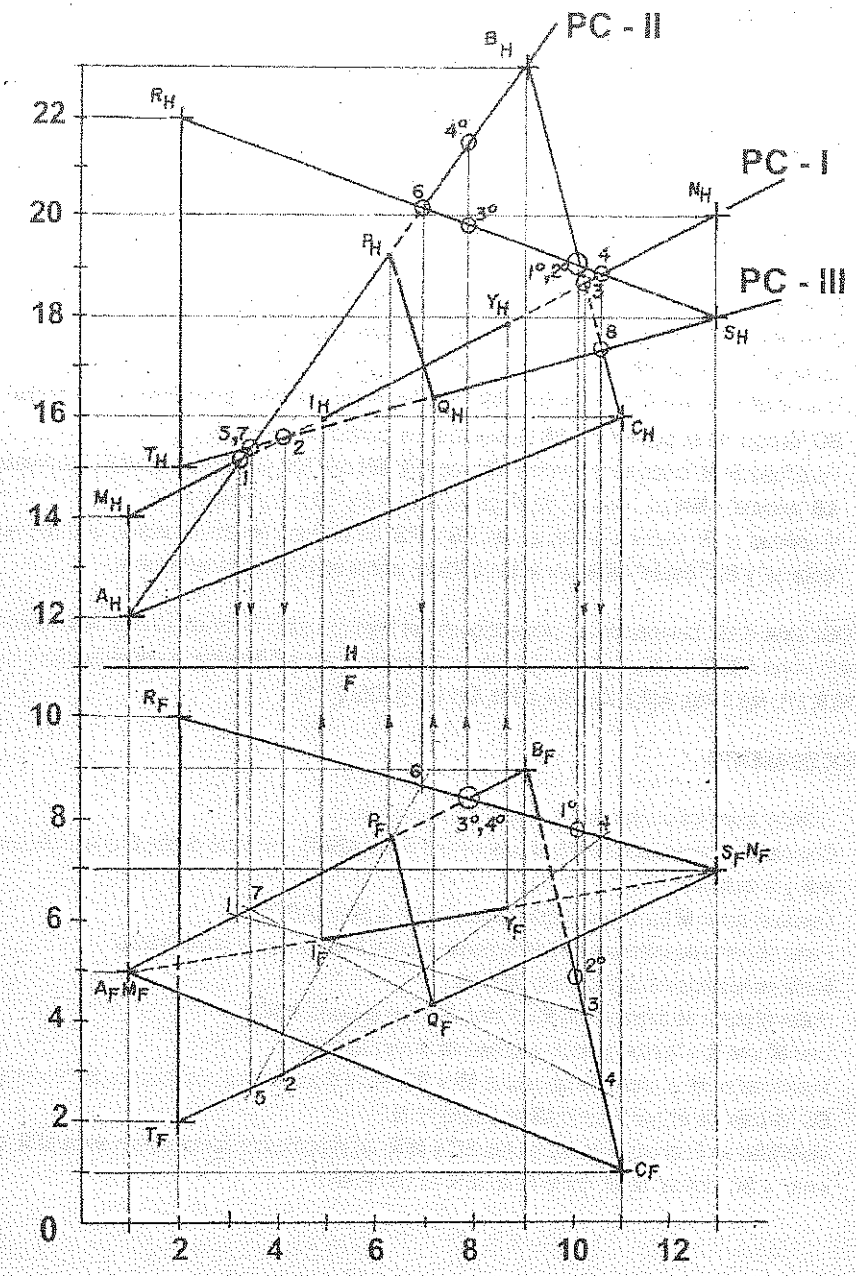
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) En el plano horizontal trazar el PC – I, en cualquier posición y que corte a los planos ABC y RST; tales como: 1B y 2T respectivamente.
3) Proyectar al plano frontal los puntos 1, B, 2 y T; y al unir dichos puntos se cortan en P; luego proyectamos este punto al plano horizontal.
4) En el plano horizontal trazar el PC – II, en una posición cualquiera y corta a los planos dados en 3, 5 y 4, C; al unir estos puntos se cortan en Q.
5) Unir P y Q, y la prolongamos hasta cortar en M al plano ABC y en N al plano RST; estos puntos representan la recta de intersección buscada.
6) Visibilidad en H: el cruce de las rectas AB y RS; en el plano frontal vemos que AB esta "encima" y RS por "debajo" de dicha recta; por lo tanto es visible BA hasta M, e invisible RS.
7) Visibilidad en F: el cruce de las rectas AC y RS; en el plano horizontal vemos que AC está "delante" de RS, por lo tanto es visible en el plano horizontal.

SOLUCIÓN 5.14:



PROBLEMA 5.15: Hallar la intersección de la recta **MN** con los planos **ABC** y **RST**, y la intersección entre estos dos planos entre sí, sin utilizar vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad del conjunto. **M(1,5,14), N(13,7,20); A(1,5,12), B(9,9,23), C(11,1,16); R(2,10,22), S(13,7,18), T(2,2,15).**

SOLUCIÓN 5.15.



PROCEDIMIENTO 5.15:

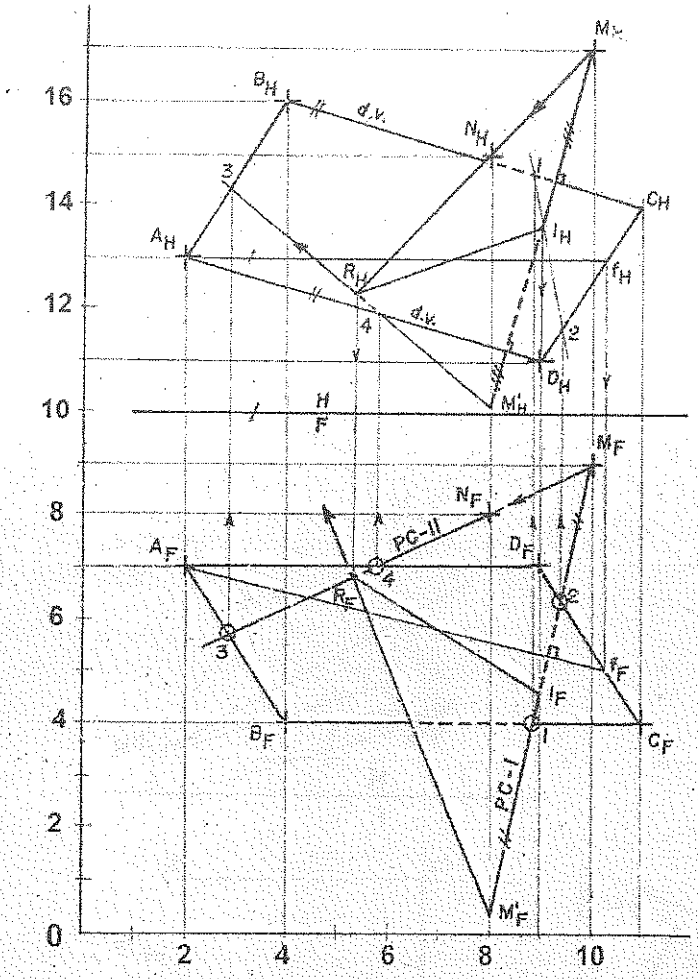
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) En el plano horizontal por **MN** trazar el **PC – I**, este plano cortante corta a los planos **ABC** y **RST** en **1,3** y **2,4** respectivamente; que proyectados al plano frontal y al unirse por rectas se intersectan en **I** e **Y** respectivamente.
3) En el plano horizontal por **AB** trazar el plano cortante **PC-II**, que corta al plano **RST** en los lados **TS** y **RS** en los puntos **5** y **6** respectivamente; que la proyectados al plano frontal y al unirse estos puntos se cortan con **AB** en **P**.
4) En el plano horizontal por **TS** trazar el plano cortante **PC – III**, que corta al plano **ABC** en los lados **BA** y **BC** en los puntos **7** y **8** respectivamente; que proyectados al plano frontal y al unirse se cortan con **TS** en **Q**.
5) Visibilidad en **H**: cruce de las rectas **RS** y **BC**, en el plano frontal observamos **RS** "encima" y **BC** "debajo" de él; por lo tanto **RS** es visible en **H**, en toda su longitud.
6) Visibilidad en **H**: cruce de las rectas **MN** con **AB**, **MN** con **RS**; en el plano frontal observamos **AB** "encima" y **MN** por "debajo" de él; por lo tanto **AB** y **RS** son visibles en **H**.
7) Visibilidad en **F**: el cruce de las rectas **AB** y **RS**, en el plano horizontal vemos que **RS** está "delante" y **BC** "detrás" de él; por lo tanto **RS** es visible en **H**, en toda su longitud.

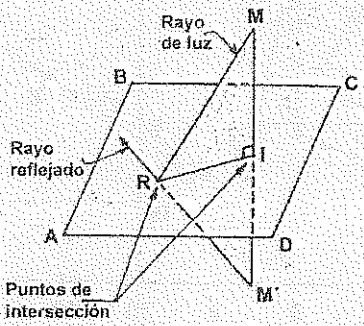
PROBLEMA 5.16: Determinar las proyecciones del rayo reflejado al incidir el rayo **MN** sobre el espejo plano **ABCD**. Usar solo las proyecciones horizontal y frontal. Mostrar la visibilidad.
M(10,9,17), N(8,8,15); A(2,7,13), B(4,4,16), C(11,4,?), D(9,7,11).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Completar la proyección horizontal del espejo plano **ABCD**, trazando desde **B** una recta paralela a la recta **AD**.
3) Desde el punto **M** trazar una recta perpendicular al plano **ABCD**.
4) Hallar el punto de intersección **I** de la perpendicular trazada con el plano **ABCD**.
5) Medir en la perpendicular trazada **MI = IM'**.
6) Hallar el punto de intersección **R** del rayo **MN** con el plano **ABCD**.
7) Unir **M'** con **R**, y la prolongación representa al rayo reflejado.
8) Visibilidad en **H**: el cruce de las rectas **MI** y **BC**, en el plano frontal observamos **MI** "encima" y **BC** "debajo" de él; por lo tanto **MI** es visible en **H**.
9) Visibilidad en **F**: el cruce de las rectas **BC** y **M'R**, en el plano horizontal observamos **M'R** "delante" y **BC** "detrás" de él; por lo tanto **M'R** es visible en **F**.

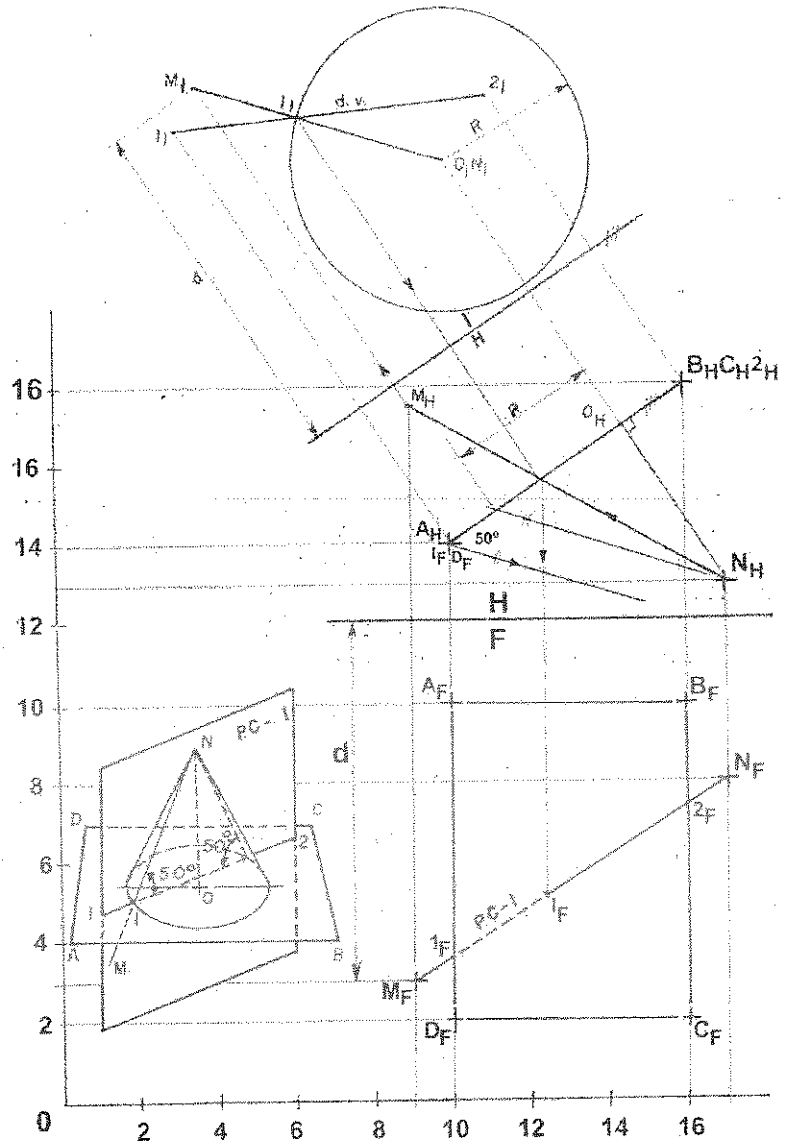
SOLUCIÓN 5.16:





PROBLEMA 5.17: Determinar la proyección horizontal del punto M, sabiendo que la recta **MN** hace un ángulo de **50°** con el plano **ABCD**. Mostrar la visibilidad. **M(9,3,?), N(17,8,13) A(9,10,14), B(16,10,18), C(16,2,18), D(10,2,14).**

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO 5.17:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Para resolver este tipo de problemas es necesario utilizar la construcción de un cono; cuya base se encuentra en el plano ABCD, y sus generatrices deben tener un ángulo de 50° con el plano.
3) Desde un extremo del plano de filo medir el ángulo de 50°, que tiene las generatrices del cono y paralelo a él trazamos una recta que pase por el punto N y que corte al plano de filo en X.
4) Desde la proyección horizontal de N trazamos la altura NO del cono, perpendicular al plano ABCD proyectado de filo.
5) Trazar el plano de elevación "1" paralelo al plano de filo y con centro en O y de radio R = OX trazamos la base del cono.
6) En el plano frontal trazar PC – I que pase por la recta MN y que corta al plano ABCD en los puntos 1 y 2.
7) Proyectar los puntos 1 y 2 al plano de elevación "1" y donde se corte con la circunferencia (base del cono), determinamos el punto de intersección I que luego proyectamos a los planos principales.
8) En el plano horizontal y desde N trazar una recta que pase por I, y la prolongamos hasta cortar a la línea de referencia de M; M_H.
9) Visibilidad en F: en el plano horizontal observamos IN "delante" del plano de filo ABCD, por lo tanto es visible.

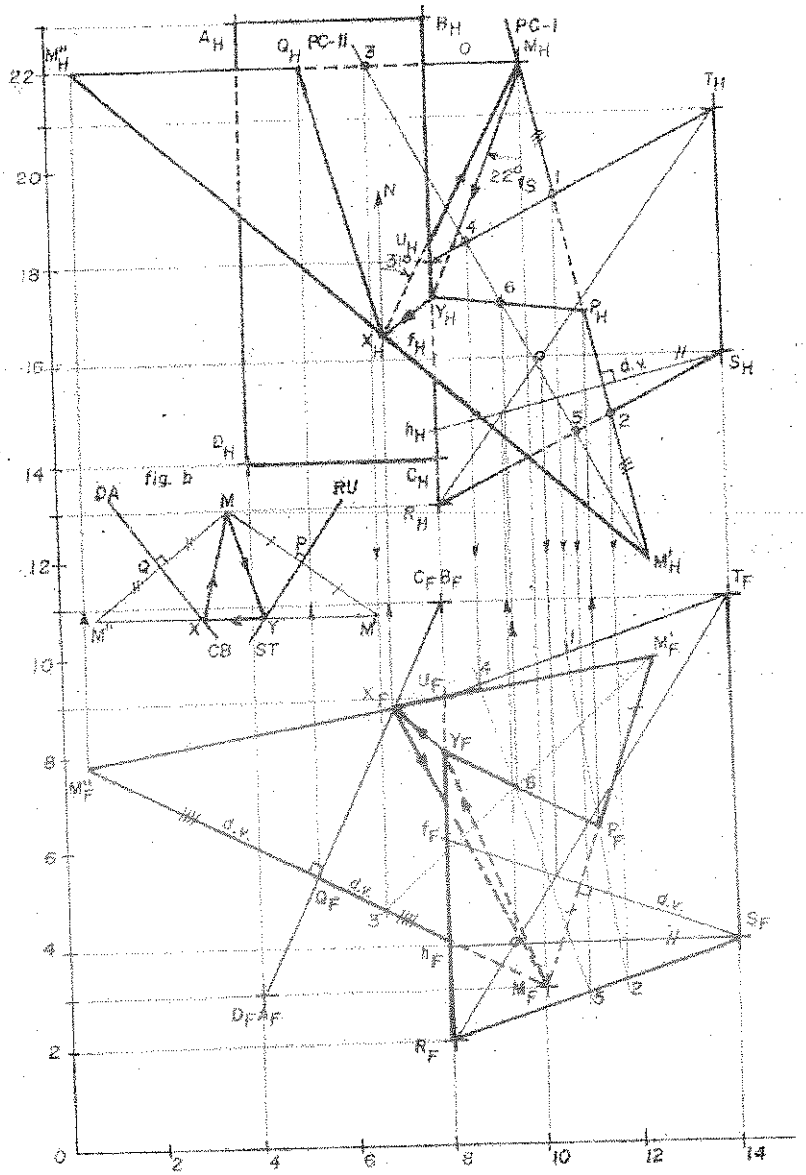
PROBLEMA 5.18: Un rayo luminoso que parte de M incide primero en el espejo oblicuo RSTU y luego en el espejo normal ABCD, y después de reflejarse en este espejo normal regresa al unto M. Sin utilizar visitas auxiliares hallar las proyecciones horizontal y frontal del rayo luminoso y determinar sus orientaciones de salida y llegada al punto M. Mostrar la visibilidad.
A(4,3,23), B(8,11,23), C(8,11,14); D(4,3,14);
R(8,2,13), S(14,4,16), T(14,11,21), U(8,9,18); M(10,3,22)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Trazar en el plano RSTU las rectas notables horizontal y frontal, utilizar la diagonal RT para hallar dichas rectas notables.
3) Desde el punto M trazar una recta perpendicular a las rectas notables del plano RSTU.
4) Trazar el PC-I y hallar el punto de intersección P de la perpendicular trazada en el plano RSTU; en esta encontramos la imagen M; haciendo MP = M'P.
5) En el plano frontal y desde el punto M trazar una recta perpendicular al plano de canto ABCD; siendo Q su punto de intersección y sobre esta recta a una distancia igual encontramos M", en donde MQ = QM".
6) Unir M' y M" y al cortar al plano ABCD de canto en el plano frontal, encontramos el punto de reflexión X.
7) Interceptar el plano M"MM' con el plano RSTU, siendo YP la recta de intersección.
8) Unir MY, YX y XM que representa la trayectoria del rayo luminoso, siendo las orientaciones de salida y llegada de S9°O y M29°E respectivamente.

9) Visibilidad en H: cruce de **UT** y **MP**, en el frontal vemos **UT** arriba y **MP** debajo de él; por lo tanto **UT** es visible en el horizontal;. **M"Q** es visible porque se encuentra arriba del plano **ABCD**.

10) Visibilidad en F: cruce de **XM'** y **UT**, observamos que **XM'** está delante de **UT**; por lo tanto es visible.



PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 5.1: Hallar la intersección entre el plano ABC y la recta XY. Mostrar la visibilidad de la intersección. A(1,5,6.5), B(5,1,11.5), C(10,2.5,8.5); X(2,4,11.5),Y(8.5,6,6.5)

PROBLEMA 5.2: Intersectar a la recta MN con el plano TBC, sin utilizar vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad de la intersección.
T(4,8,18), B(6,3,13), C(9,4,7) ; M(4,3,14), N(8,6,18).

PROBLEMA 5.3: En un partido de futbol R, S y T son jugadores que quieren hacer un gol en el arco definido por el paralelogramo ABCD. Si K es un punto de la trayectoria rectilínea de un disparo que hizo gol en el arco ABCD, averiguar qué jugador realizó el gol y la visibilidad de todo el conjunto.
R(2,6,17), S(5,2,19), T(3.5,11,14); K(18,3.5,14);
A(7.5,1.5,12.5), B(9.5,5.5,15), C(14.5,7.5,17.5), D(12.5,3.5,15)

PROBLEMA 5.4: Determinar la intersección de los planos ABCD y PQR. Mostrar la visibilidad de la intersección. A(2,5,15), B(7,9,17), C(13,?,13), D(8,2,12); P(3,8,10), Q(9,3,18), R(12,9,13)

PROBLEMA 5.5: Determinar la intersección de los planos LSD y TBC. Mostrar la visibilidad de la intersección. Resolver sin vistas auxiliares.
L(4,2,16), S(12,9,19), D(17,5,12); T(4,7,12), B(17,9,16), C(9,2,20)

PROBLEMA 5.6: Determinar la intersecci4n de los planos LMN y PQR. Mostrar la visibilidad de la intersección. Resolver sin vistas auxiliares.
L(2,5,12) ,M(8,1,16), N(12,7,10); P(4,2,14), Q(12,4,15), R(8,8,9).

PROBLEMA 5.7: Determinar la intersección de la recta MN con el plano ABCE. Mostrar la visibilidad de la intersección. Resolver sin utilizar vistas auxiliares.
M(2,6,9.5), N(9.5,6.5,10); A(2.5,2.5,11), B(9,2.5,11.5), C(2.5,5,8.5), E(9,5,9).

PROBLEMA 5.8: Hallar la intersección entre la recta XY y el plano ABC. Mostrar la visibilidad de la intersección. Resolver sin vistas auxiliares.
X(16,3.5,11.5), Y(16,3.5,5); A(13,6,9); B(18,2.5,7.5), C(15.5,4.5,10)

PROBLEMA 5.9: Determinar la intersección entre los planos ABCD y LMN, sin utilizar vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad de la intersección.
A(3,4,12), B(7,7,13), C(12,5,10), D(8,2,9); L(11,7,11), M(9,2,14), N(4,?,8)

PROBLEMA 5.10: Determinar la intersección de los planos ABC y RST. Resolver sin vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad de la intersección.
A(5,5,16.5), B(13,3,16.5), C(7.5,9,12), R(10,10,18), S(13,3,13), T(5,2.5,14).

PROBLEMA 5.11: Intersectar los planos ABCD y RST. Mostrar la visibilidad de la intersección.
A(3,9,16), B(3,5,11), C(9,3,9), D(9,?,19); R(2,8,13), S(5,2,19), T(10,8,16).

PROBLEMA 5.12: Intersectar los planos ABC, BCD y EFG; considerándolos limitados. Mostrar la visibilidad. Resolver sin vistas auxiliares. ESCALA: 1:100.
A(3,2,10), B(13,7,13), C(13,1,13); D(8,1,7), E(9,6,11), F(7,1,13), O(5,6,9).

PROBLEMA 5.13: Por el punto P trazar una recta que corte a las rectas AB y RS. Mostrar la visibilidad de la intersección. Resolver sin vistas auxiliares.
P(2,3,17); A(8,9,21), B(11,1,15); R(2,7,15), S(13,3,21)

PROBLEMA 5.14: Determinar un punto P en AB que equidiste de M y de N. Resolver sin vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad de la intersección. M(2,6,18), N(2,10,12); A(10,1,18), B(10,11,13).

PROBLEMA 5.15: Hallar las intersecciones que hubieran entre los planos ABC, ABF, AEF y BDF, con su respectiva visibilidad.
A(10,10,15), B(12,5,20); C(3,10,22); F(5,5,16), E(8,12,20), D(9,11,23).

PROBLEMA 5.16: Hallar la intersección de los planos ABC y CDE sabiendo que la recta DE es perpendicular al plano ABC. Resolver solamente en los planos principales. Mostrar la visibilidad de la intersección. A(7,7,?), B(9.5,3,?), C(12,5,12.5); D(10.5,9,11), E(10.5,5,14.5).

PROBLEMA 5.17: Hallar las proyecciones del segmento más corto, cuyo ángulo de inclinación sea de 35° y que se apoye en AB y CD a la vez. ESCALA: 1:1.
A(3,4.8), B(9,1,13); C(5,6,13), D(11,3,9).

PROBLEMA 5.18: Hallar todas las intersecciones que hubieran entre los planos RST, MNL y la recta PQ. Mostrar la visibilidad de la intersección.
R(5,8,17.5), S(11.5,4.5,9), T(3.5,1.5,11.5); P(2,6,15), Q(11.5,4.5,10.5);
M(10,2.5,11), N(10,8.5,17), L(2,6,13.5).

PROBLEMA 5.19: Hallar la intersección del triángulo ABC con el círculo con centro en O, de radio 3 centímetros y orientación S30°E. Se sabe además que la recta OX es una recta frontal que pertenece al círculo. Mostrar la visibilidad de la intersección. No emplear vistas adicionales.
A(4,6.5,13.5), B(6.5,8.5,11), C(9.5,5.5,15); O(7,7,13), X(5.5,6,?)

PROBLEMA 5.20: Hallar las intersecciones de los planos RST, ABCD y la recta MN, mostrando la respectiva, visibilidad. No emplear vistas adicionales. ESCALA: 1:200.
R(2,7,17), S(8 10,20), T(14,2,16.5); M(3,11 15), N(17,2,20).
A(2,3,16), B(11,9,19), C(17,6,17.5), I(4,?,15)

PROBLEMA 5.21: Se da el plano ABC y una recta DE fuera de este plano, sin emplear vistas auxiliares, encontrar las proyecciones de un segundo plano DEF que pase por la recta dada DE; de tal manera que su intersección con el plano dado ABC haga 90° con la recta DE.
A(3,2.5,10), B(5,6.5,16.5), C(8,4.5,8); D(6,7.5,8.5), E(12,2.5,11).

PROBLEMA 5.22: RS y LM son rectas de máxima pendiente de los planos P y Q respectivamente. Determinar la intersección del plano P y Q, sin utilizar ninguna vista adicional.
R(6,1,10), S(4,4.5,6); L(9.5,1,10), M(11.5,4.5,5.5).

PROBLEMA 5.23: Intersectar la recta MN con el plano PQR, sin utilizar *vistas* auxiliares. Mostrar la visibilidad de la intersección.
M(7,1.5,13), N(7,9,20); P(4,5,16), Q(15,2,20), R(15,10,12).

PROBLEMA 5.24: Hallar la intersección de la recta MN con el plano TBCE, sin utilizar vistas adicionales. Mostrar la visibilidad de la intersección.
M(10,3,15), N(10,7,12); T(7,8,17), B(13,8,17), C(13,4,13), E(7,4,13).

PROBLEMA 5.25: Hallar la intersección mostrando la respectiva visibilidad de los triángulos ABC y RST. A(4,1,10), B(10,7,13), C(15,4,9); R(6,7,13), S(16,4,14), T(12,2,8).

PROBLEMA 5.26: Hallar la intersección de los planos opacos y limitados ABC, RST y RSU, sin hacer uso de vistas adicionales y mostrando visibilidad completa. ESCALA: 1:1.
A(4,13,19), B(4,2,26), C(18,6.26); R(2,8,24), S(12,11,20), T(16,1,27), U(16,9,23)

PROBLEMA 5.27: Hallar la intersección del cuadrilátero ABCD y el triángulo LMN. Resolver sin vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad.
A(4,7,14), B(4,3,10), C(10,3,10), D(10,7,14); L(5,2,15), M(5,8,19), N(11,6,13).

PROBLEMA 5.28: Desde un punto P se desea tender una tubería de agua potable, siguiendo una alineación recta y de modo que empalme con las tuberías existente AB y CD. Hallar las proyecciones horizontal y frontal de la tubería por instalar y los puntos de empalme.
A(4,6,11), B(12,3,14); C(7,3,11), D(14,6,9); P(5,8,17).

PROBLEMA 5.29: Hallar la intersección de la recta LM con el plano TBCE, sin utilizar vistas adicionales. Mostrar la visibilidad de la intersección.
T(7,9,17), B(13,9,17), C(13,3,11), E(7,3,11); L(10,4,16), M(10,8,12).

PROBLEMA 5.30: El rectángulo ABCD tiene una perforación rectangular PQRS. Hallar la intersección con el cuadrilítero EFGH y su respectiva visibilidad. ESCALA: 1:1.
A(1.5,3,25), B(1.5,13,15), C(18.5,13,15), D(18.5,3,25).
P(7.5,6,23) Q(7.5,11,17), R(14.5,11,17), S(14.5,5,23).
E(6.5,12,24), F(3.5,8,19), G(14.5,4,16), H(17.5,A,21).

PROBLEMA 5.31: Hallar la intersección del plano PQRS y la recta MN, sin hacer uso de vistas adicionales. ESCALA: 1:1.
P(1.5,6,13), R(16.5,1,9), Q(16.5,6,13), S(1.5,1,9), M(7.5,1,12), N(7.5,7.8)

PROBLEMA 5.32: Determinar las proyecciones del rayo reflejado al incidir el rayo MN sobre el espejo plano ABCD. Usar solo las proyecciones horizontal y frontal.
A(3,7,12), B(5,4,15), C(12,4,?), D(10,7,10); M(11,9,16), N(9,8,14).

PROBLEMA 5.33: Dado los espejos planos ABC y BCD, y los puntos P y Q, hallar las proyecciones de un rayo luminoso, que partiendo de P, después de incidir dos veces en cada uno de los espejos pase por Q. Nota Primero incide en el espejo ABC.
A(6,5,18), B(11,7,10), C(11,1,10); D(1,4,12); P(9,4,12), Q(3,4,12).

PROBLEMA 5.34: Hallar las proyecciones de un segmento de recta frontal, cuyos extremos A y B se encuentran en las rectas horizontales LM y NO respectivamente; sabiendo además que X es punto medio de AB está contenida en el plano PQR.
L(3,10,15), M(10,10,19); N(10,4,19), O(14,4,14); P(5,3,12), Q(8,9,17), R(11,7,14).

PROBLEMA 5.35: Hallar las intersecciones que hubieran entre los planos PQR, ABC y BCD. Mostrar la visibilidad de la intersección. Resolver sin vistas auxiliares.
P(6,11,18), Q(3,412), R(14,5,20); A(13,7,21), B(1,8,15), C(8,2,12), D(15,10,18).

PROBLEMA 5.36: Determinar la intersección de los planos ABC y RST, sin utilizar planos auxiliares. Mostrar la visibilidad de la intersección.
A(2,5,12), B(6,8,14), C(8,3,10); R(10,3,10), S(12,6,14), T(14,2,11).

PROBLEMA 5.37: Determinar la intersección entre los planos RST y ABCD sin utilizar vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad.
R(2,4,7), S(4,5,10), T(6,1,6); A(6,5,10), B(8,2,7), C(9,5,9), D(7,7,11).

PROBLEMA 5.38: Determinar la intersecci6n entre los planos TBC y LSD. Mostrar la visibilidad de la intersección. T(2,5,12), B(6,8,14), C(8,3,10); L(10,3,10), S(12,6,14), D(14,2,11).

PROBLEMA 5.39: Determinar la intersección entre los planos LMN y PQR. Mostrar la visibilidad de la intersección. L(2,6,10), M(4,3,15), N(6,7,12); P(8,4,14), Q(12,2,14), R(10,8,10).

PROBLEMA 5.40: Determinar la interaecci6n de loa planos TBCE y LSD. Mostrar la visibilidad de la intersección. L(3,2,12), S(3,6,8), D(7,4,10); T(10,2,12), B(15,2,12), C(15,6,8), E(10,6,8).

PROBLEMA 5.41: Hallar la intersecci6n de la recta MN con el plano ABCD, sin utilizar vistas adicionales. Mostrar la visibilidad de la intersección.
M(2,7,11), N(12,5,13); A(3,7,10), B(11,9,13), C(11,4,16), D(3,2,13).

PROBLEMA 5.42: Determinar la intersección de los planos LSD y TBC sin utilizar vistas auxiliares. Mostrar la visibilidad de la intersección.
L(3,3,13), S(3,9,10), D(11,6,13); T(2,8,13), B(11,9,13), C(11,3,10).

CAPITULO 6:

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

6.1. CONDICION DE PARALELISMO: ENTRE RECTAS Y PLANOS.

1. RECTAS PARALELAS: Se dice que dos rectas de un mismo plano son paralelas, cuando son equidistantes en todos sus puntos y en cualquier plano de proyección que se utilice. Si una de las rectas se proyecta de punta, su paralela se proyectará igualmente; en este plano de proyección se obtiene la distancia real.

Fig. 6.1 Rectas Paralelas

2. RECTA PARALELA A UNA PLANO: Si una recta que no pertenece a un plano dado, se dice que son paralelas, cuando la recta es paralela a cualquier recta en ese plano.

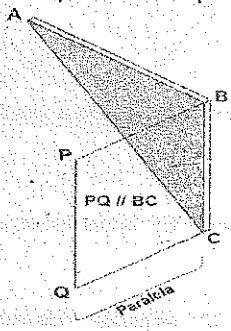


Fig. 6.2 Recta paralela a un plano.

3. PLANOS PARALELOS: Dos planos son paralelos, si uno de ellos contiene a dos rectas que se cortan, que son respectivamente paralelas a otras dos rectas que se cortan del otro plano.

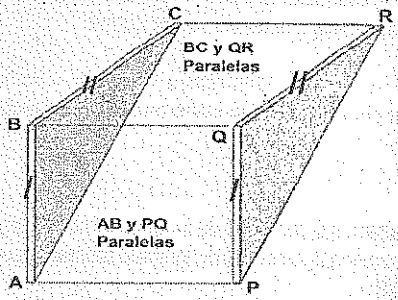


Fig. 6.3 Planos Paralelos.

6.2. POR UNA RECTA TRAZAR UN PLANO PARALELA A UNA RECTA DADA.

El plano solicitado está definido por dos rectas que se corta: una de ellas es la recta dada y la otra es la paralela que se trace a la otra recta también dada.

En la figura **6.4** se dan las proyecciones horizontal y frontal de las rectas **AB** y **CD**; se desea trazar un plano que contenga a la recta **CD** y sea paralela a la otra recta dada **AB**.

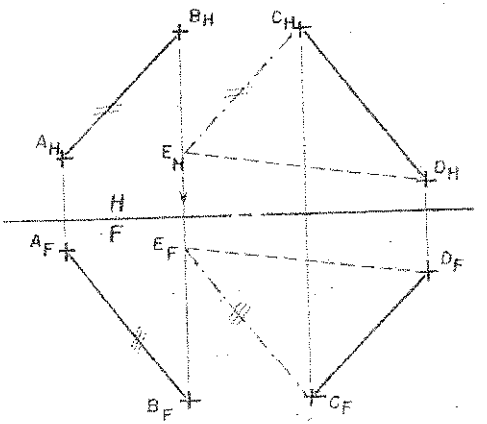


Fig. 6.4 Plano paralela a una recta dada.

PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto **C** trazamos la recta **CE** de longitud arbitraria, y paralela a la recta **AB**.
2) Entonces: **CE//AB**

Por consiguiente el plano formado **CDE** es paralelo a la recta **AB**.

6.3. POR UN PUNTO TRAZAR UN PLANO PARALELO A DOS RECTAS DADAS.

El plano solicitado está determinado por dos rectas que se cortan en el punto dado, siendo además estas paralelas a cada una de las rectas dadas.

En la figura 6.5 se dan las proyecciones horizontal y frontal del punto **P** y de las rectas **AB** y **CD**; se desea trazar por el punto **P** un plano paralelo a las rectas **AB** y **CD**.

PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto **P** trazamos la recta **PQ** de longitud arbitraria, paralela a la recta **AB**.
2) Desde el punto **P** trazamos la recta **PR** de longitud arbitraria, paralela a la recta **CD**.
3) Entonces: **PQ // AB** y
   PR // CD

Por consiguiente el plano formado **PQR** es paralelo a las rectas **AB** y **CD**.

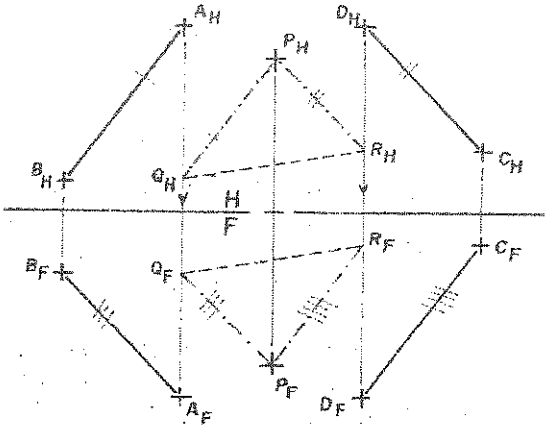


Fig. 6.5 Plano paralela a dos rectas dadas.

6.4. POR UN PUNTO TRAZAR UNA RECTA PARALELA A UN PLANO.

La recta solicitada será definida al ser paralelo a cualquier recta contenida en el plano.

En la figura 6.6 se dan las proyecciones horizontal y frontal del punto P y del plano ABC; se desea trazar por el punto P una recta paralela al plano ABC.

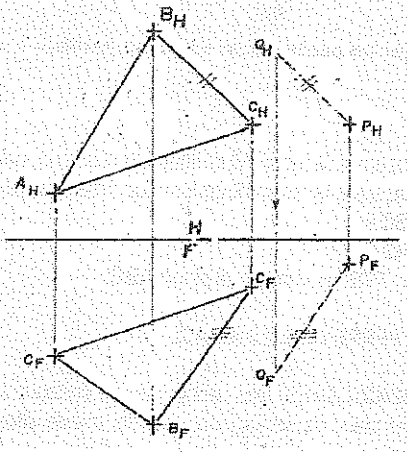


Fig. 6.6 Por un punto trazar una recta paralela a un plano.

PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto P trazamos la recta PQ de longitud arbitraria, paralela al lado BC.
2) Entonces: PQ//BC

Por consiguiente la recta PQ es paralelo al plano ABC.

6.5. POR UN PUNTO TRAZAR UN PLANO PARALELO A OTRO PLANO DADO.

El plano solicitado está determinado por dos rectas que parten del punto dado, siendo además paralela a otras dos rectas contenidas en el punto plano.

En la figura 6.7 se dan las proyecciones horizontal y frontal del punto P y del plano ABC; se desea trazar por el punto P un plano paralelo al plano ABC.

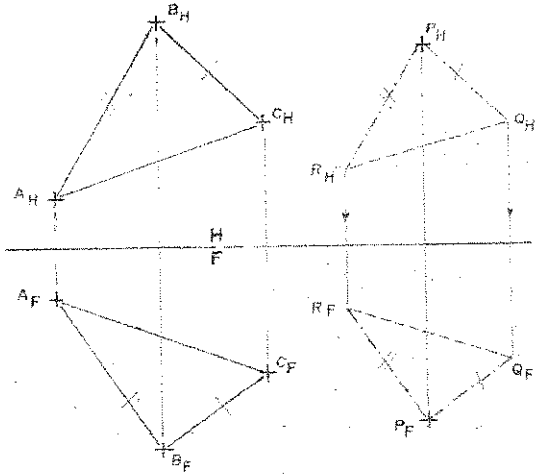


Fig. 6.7 Por un punto trazar un plano paralelo a un plano dado.

PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto P trazamos la recta PQ de longitud arbitraria, paralela al lado BC.
2) Desde el punto P trazamos la recta PR de longitud arbitraria, paralela al lado AB.
3) Entonces: PQ // BC y
   PQ // AB

Por consiguiente el plano PQR es paralelo al plano ABC.

6.6. CONDICION DE PERPENDICULARIDAD.

1. RECTAS PERPENDICULARES: Dos rectas que se cortan o se cruzan son perpendiculares entre sí en cualquier plano de proyección, cuando una de ellas por lo menos se proyecta en dimensión verdadera.

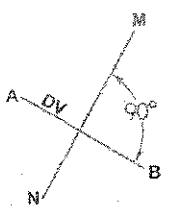


Fig. 6.8 Rectas perpendiculares.

2. RECTA PERPENDICULAR A UNA PLANO: Si una recta que no pertenece a una plano dado se dice que son perpendiculares, cuando la recta sea perpendicular por lo menos a dos rectas que se cortan y contenidas en dicho plano.

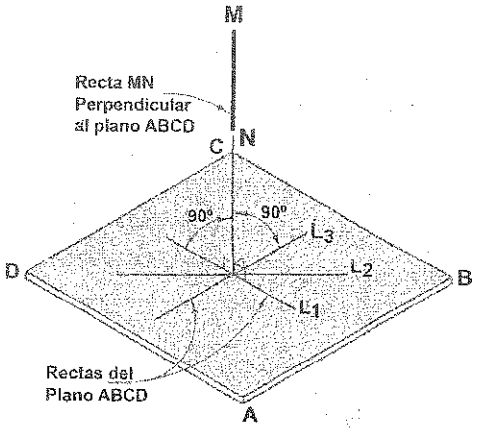


Fig. 6.9 Recta perpendicular a un plano.

3. PLANOS PERPENDICULARES: Dos planos son perpendiculares, si uno de ellos contiene a una recta que sea perpendicular a otra recta contenida en el otro plano.

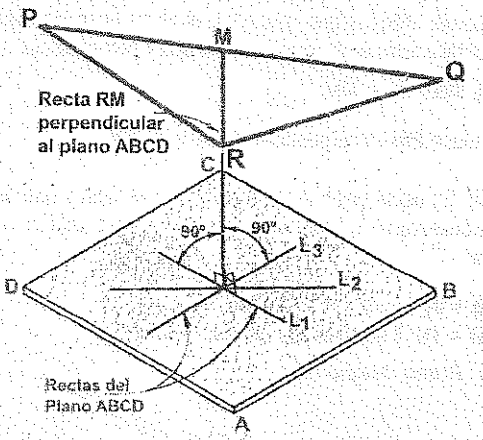


Fig. 6.10 Planos perpendiculares.

6.7. POR UN PUNTO TRAZAR UN PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA DADA.

El plano solicitado está determinado por dos rectas que se cortan en el punto dado, siendo además perpendicular a la recta dada.

En la figura 6.11 se dan las proyecciones horizontal y frontal del punto P y la recta MN; sin utilizar plano auxiliar, se desea trazar desde el punto P un plano perpendicular a la recta MN.

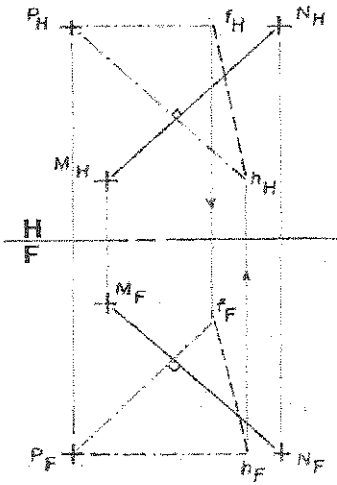


Fig. 6.11 Desde un punto trazar un plano perpendicular a una recta dada.

PROCEDIMIENTO:

1) Como no es posible utilizar plano adicional, el plano buscado está formado por dos rectas notables (horizontal y frontal), de longitud arbitraria y perpendicular a la recta **MN**.
2) Entonces: **Ph** ⊥ **MN** y **Pf** ⊥ **MN**

Por consiguiente el plano **Phf** es perpendicular a la recta **MN**.

PLANO MEDIATRIZ: Es aquel plano perpendicular a una recta y que divide a ésta en dos partes iguales; tal como se observa en la figura 6.12. Cualquier punto del Plano Mediatriz equidista de los extremos de la recta.

Entonces: **MI** = **IN**; I punto medio de **MN**.
MT = **TN**; T equidista de los extremos **M** y **N**.

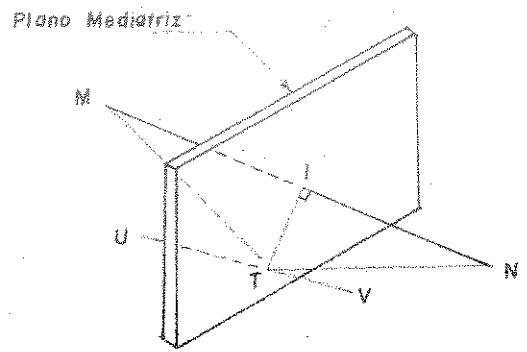


Fig. 6.12 Plano Mediatriz.

6.8. POR UN PUNTO TRAZAR UNA RECTA PERPENDICULAR A UNA PLANO.

Una recta es perpendicular a un plano cuando todas las rectas contenidas en él, pasan por el punto de intersección de la recta con el plano: tal como se observa en la figura 6.13.

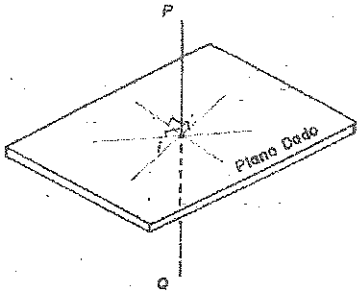


Fig. 6.13 Recta perpendicular a un plano.

Para determinar la perpendicular a un plano tenemos dos métodos:

a) Método de la Vista de canto.
b) Método de las Rectas Notables.

6.8.1. METODO DE LA VISTA DE CANTO.

Consiste en proyectar al plano de canto, en este plano de proyección la perpendicular trazada desde el punto al plano, se proyectará en dimensión verdadera y en el plano adyacente se mostrará paralelo al plano de proyección.

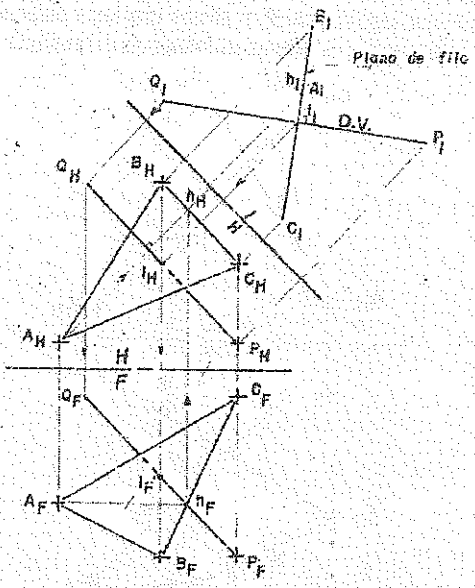


Fig. 6.14 Método de la vista de canto.

En la figura **6.14** se dan las proyecciones horizontal y frontal del punto **P** y del plano **ABC**; se desea trazar desde el punto **P** una recta perpendicular al plano dado.

PROCEDIMIENTO:

1) Hallar la vista de canto del plano **ABC** usando una recta notable.
2) Cuando el plano se proyecta de filo, desde el punto **P** trazamos una recta de longitud arbitraria perpendicular al plano de filo; tal como **PQ**.
3) La recta **PQ** en el plano horizontal se proyecta paralelo al plano de proyección, por lo tanto en el plano de proyección "1" se proyectará en dimensión verdadera.
4) Luego completamos en los planos principales el punto **Q** y el punto de intersección **I**.

6.8.2. METODO DE LAS RECTAS NOTABLES.

Consiste en trazar la perpendicular común del punto dado a dos rectas notables contenidas en el plano.

En la figura **6.15** se dan las proyecciones horizontal y frontal del punto **P** y del plano **ABC**; se desea trazar desde el punto **P** una recta perpendicular de longitud arbitraria al plano dado.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar una recta horizontal en el plano **ABC**, luego desde **P** trazamos una recta de longitud arbitraria perpendicular a la recta horizontal; tal como **PQ**.
2) Trazar una recta frontal, luego desde **P** trazamos una recta perpendicular a la recta frontal, hasta que corte a la proyección de la linea de referencia del punto **Q**.

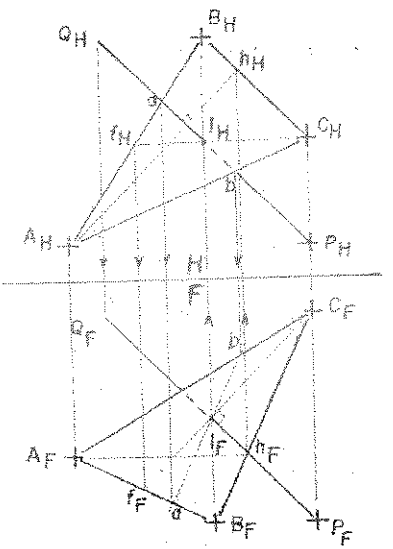


Fig. 6.15 Método de las Rectas Notables.

6.9. POR UNA RECTA TRAZAR UN PLANO PERPENDICULAR A UN PLANO DADO.

Consiste en trazar una recta que corte a la recta dada y que sea perpendicular al plano dado.

En la figura 6.16 se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta PQ y del plano ABC; se desea trazar la recta PQ un plano perpendicular al plano dado.

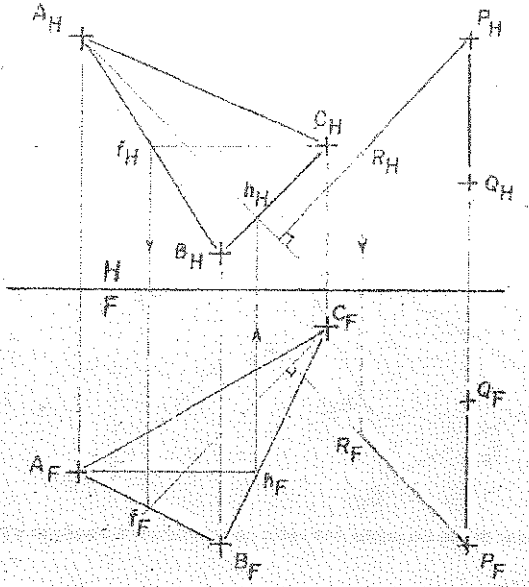


Fig. 6.16 Por una recta trazar un plano perpendicular a un plano dado.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar una recta horizontal en el plano ABC, luego desde la recta PQ (punto P) trazamos una recta de longitud arbitraria, perpendicular a la recta horizontal; tal como PR.
2) Trazar una recta frontal en el plano ABC, luego desde P trazamos una recta perpendicular a la recta frontal, hasta que corte a la proyección de la línea de referencia del punto R.

6.10. POR UN PUNTO TRAZAR UN PLANO PERPENDICULAR A UN PLANO DADO Y PARALELO A UNA RECTA DADA.

El plano solicitado está determinado por dos rectas que se cortan en el punto dado, siendo uno de ellas perpendicular al plano dado y la otra paralela a la recta dada.

En la figura 6.17 se dan la proyección horizontal y frontal del punto P, de la recta MN y del plano ABC; se desea trazar desde el punto P un plano perpendicular al plano ABC y paralelo a la recta MN.

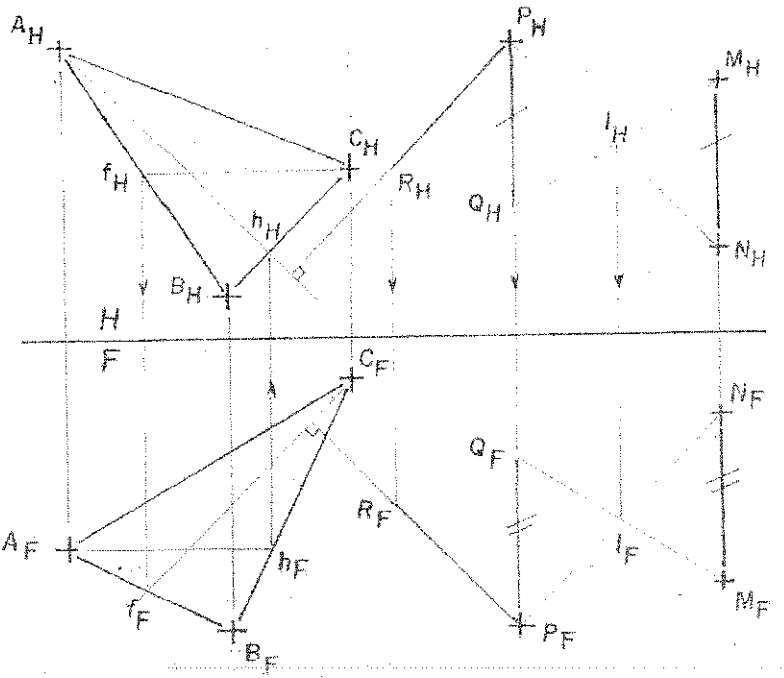


Fig. 6.17 Trazar desde un punto una recta perpendicular a un plano y paralela a una recta.

PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto P trazamos la recta PR perpendicular al plano ABC, según el método visto en el punto 6.17.
2) En el plano horizontal y desde el punto P, trazamos una recta de longitud arbitraria, paralela a la recta MN; tal como PQ.
3) Para determinar la proyección frontal del punto Q es necesario saber lo siguiente: (1°) dos rectas que se cortan determinan un plano, tal como la proyección horizontal de las rectas PN y QM; y (2°) en la proyección frontal en la recta PN localizamos el punto de corte I, luego trazamos desde M una recta que pase por I hasta que corte a la proyección de la línea de referencia del punto Q.

6.11. POR UN PUNTO TRAZAR UN PLANO PERPENDICULAR A DOS PLANOS DADOS.

El plano solicitado está determinado por dos rectas que se cortan en el punto dado, siendo cada uno de ellos perpendiculares a cada uno de los planos dados.

En la figura **6.12** se dan las proyecciones horizontal y frontal del punto P, y de los planos ABC y DEF; se desea trazar desde el punto P un plano perpendicular a los planos ABC y DEF.

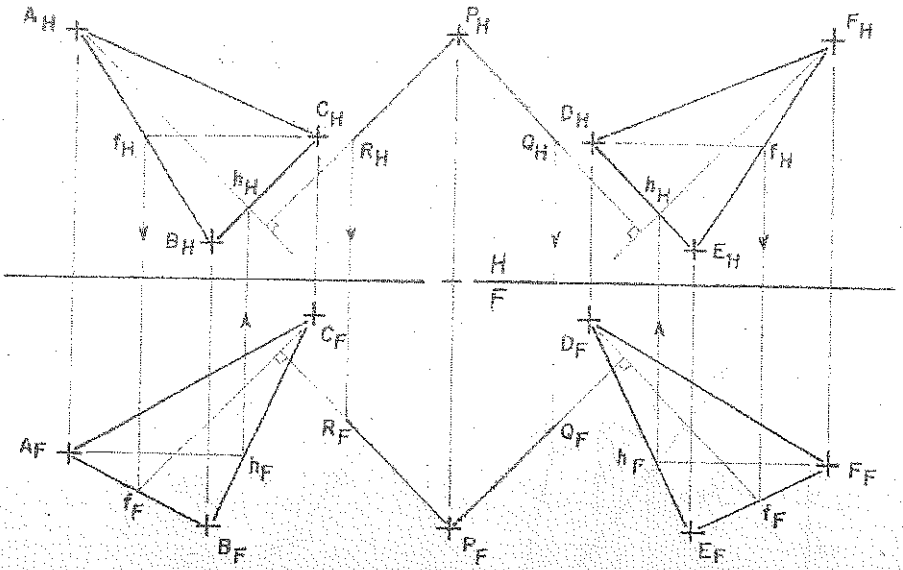


Fig. 6.18 Por un punto trazar un plano perpendicular a dos planos dados.

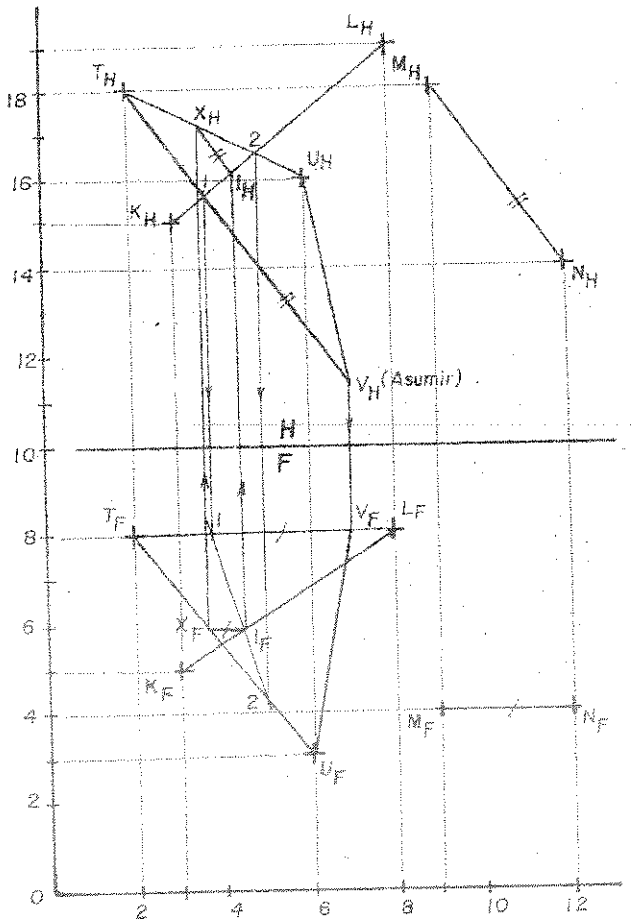
PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto P trazamos la recta PR perpendicular al plano ABC, según el método visto 6.9.
2) Desde el punto P trazamos la recta PQ perpendicular al plano DEF, según el método visto 6.9.
3) El plano PQR es el plano solicitado, perpendicular a los planos ABC y DEF.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 6.1: Determinar las proyecciones principales de una recta paralela a la recta **MN**, tal que corte a las rectas dadas **UT** y **KL** no coplanares.
M(9,4,18), N(12,4,14); T(2,8,18), U(6,3,16); K(3,5,15), L(8,8,19).

SOLUCIÓN:



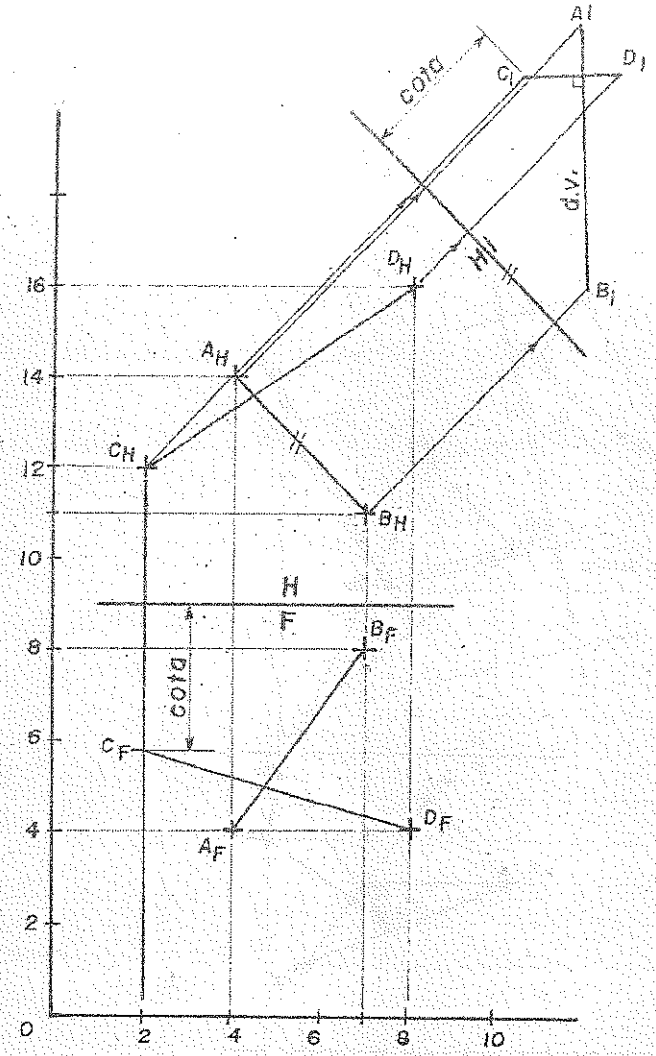
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Desde el punto T trazar una recta paralela a la recta **MN**, y sobre esta recta se asume el extremo V; siendo el plano **UTV** paralelo a **MN**.

3) Hallar el punto de intersección I, trazamos una recta paralela a la recta MN hasta que corte a la otra recta UT en el punto X.
4) La recta IX es paralela a la recta MN y corta a las rectas dadas UT y KL.

- PROBLEMA 6.2: Hallar la proyección frontal del punto C, sabiendo que la recta AB es perpendicular a la recta CD. A(4,4,14), B(7,8,11); C(2,?,12), D(8,4,16)

SOLUCIÓN:

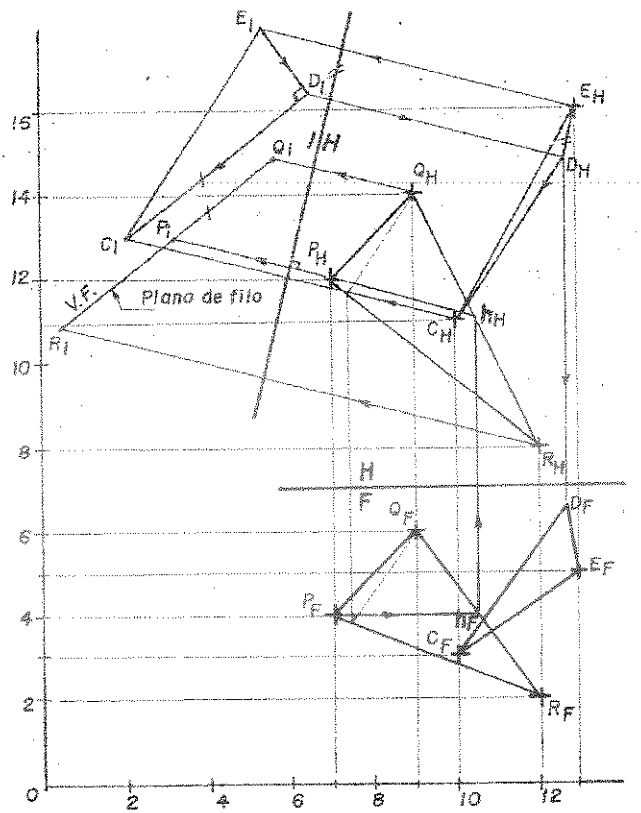


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la dimensión verdadera de la recta **AB**, trazando el plano de elevación "1" paralelo a dicha recta.
3) En el plano de elevación "1" y desde el punto **D** trazamos una recta perpendicular a la recta **AB** proyectada en dimensión verdadera; y prolongamos esta recta que corte a la línea de referencia del punto **C**.
4) Medir la cota del punto **C** en el plano de elevación y trasladar dicho valor al plano frontal, determinándose la proyección frontal de **C**.

PROBLEMA 6.3: Se da el plano **PQR** y una recta **CE** fuera de este plano, descomponer la recta **CE** en dos componentes, una paralela y otra normal al plano **PQR**.
P(7,4,12), Q(9,6,14), R(12,2,8); C(10,3,11), E(13,5,16).

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO 6.3:

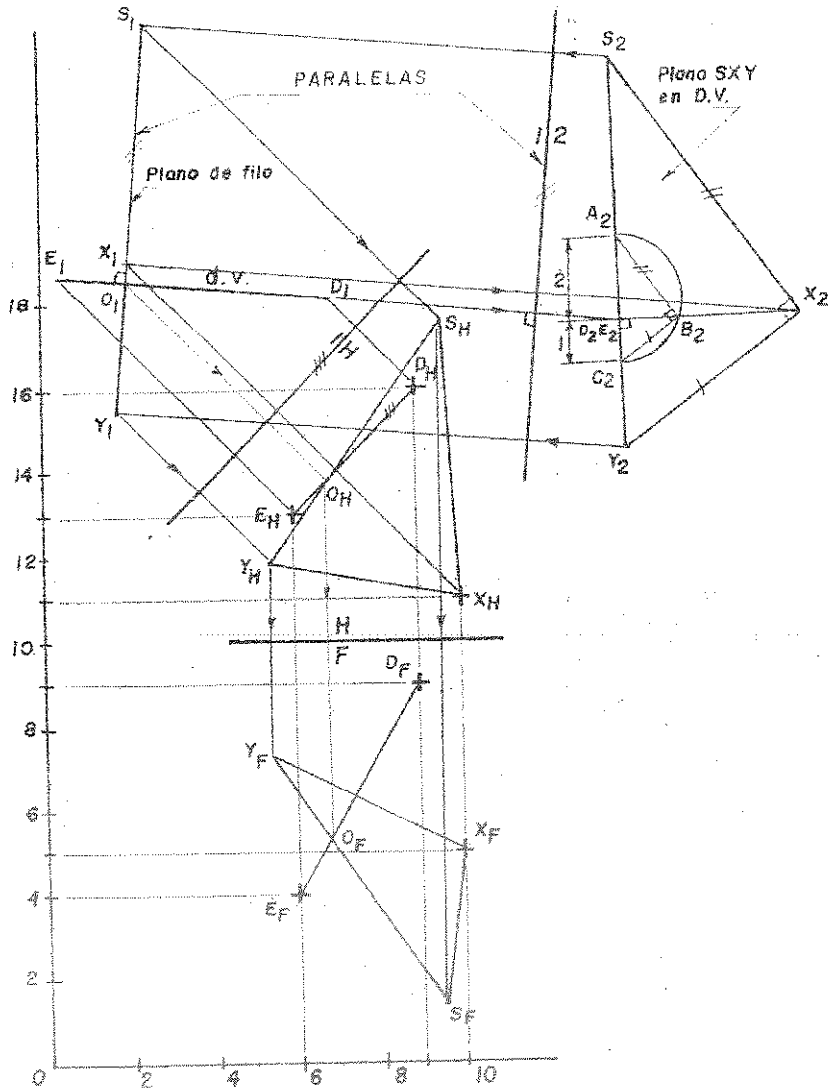
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la vista de canto del plano PQR, utilizando el plano de elevación "1".
3) En el plano de elevación descomponemos la recta CE en sus dos componentes, CD y ED; siendo CD paralelo al plano de filo PQR, y ED perpendicular (normal) a dicho plano.
4) Determinado las componentes CD y ED en el plano de elevación, trasladar dichas rectas a sus planos principales.

PROBLEMA 6.4: Por el punto X hacer pasar un triángulo rectángulo en X; SXY debe ser perpendicular a la recta ED, a la vez el lado SY debe cortar a la recta ED; y que la perpendicular trazada de X a ED sea la altura relativa a la hipotenusa que divide a ésta en dos segmentos que están entre sí como 2:1. X(10,5,11); E(6,4,13), D(9,9,16).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la proyección de punta de la recta ED, utilizando el plano de elevación "1" paralela a ED para hallar su dimensión verdadera.
3) Trazar el plano auxiliar "2" perpendicular a la recta ED para proyectar de punta a dicha recta.
4) En el plano de elevación la recta ED es perpendicular al plano de filo SXY.
5) En el plano auxiliar "2" unir los puntos X y la proyección de punta DE.
6) Trazar una recta perpendicular a la recta XDE y sobre esta recta dividir en la proporción 2 a 1 desde el centro DE.
7) Trazar una media circunferencia de radio igual a 1.5 unidades, y donde corte a la altura relativa XO formamos un triángulo rectánguio en dicho punto tal como ABC.
8) Trazar desde X dos rectas paralelas a las rectas AB y BC respectivamente, tales como XS y XY.
9) Luego proyectar S e Y al plano de elevación teniendo en cuenta que SY corta a ED en O.
10) El plano SXY se proyecta en dimensión verdadera en el plano auxiliar "2".
11) En el plano de elevación "1", el plano SXY se proyecta de canto y perpendicular a la recta ED.
12) Proyectar al plano SXY a sus vistas principales sabiendo que SY corta a ED en O.

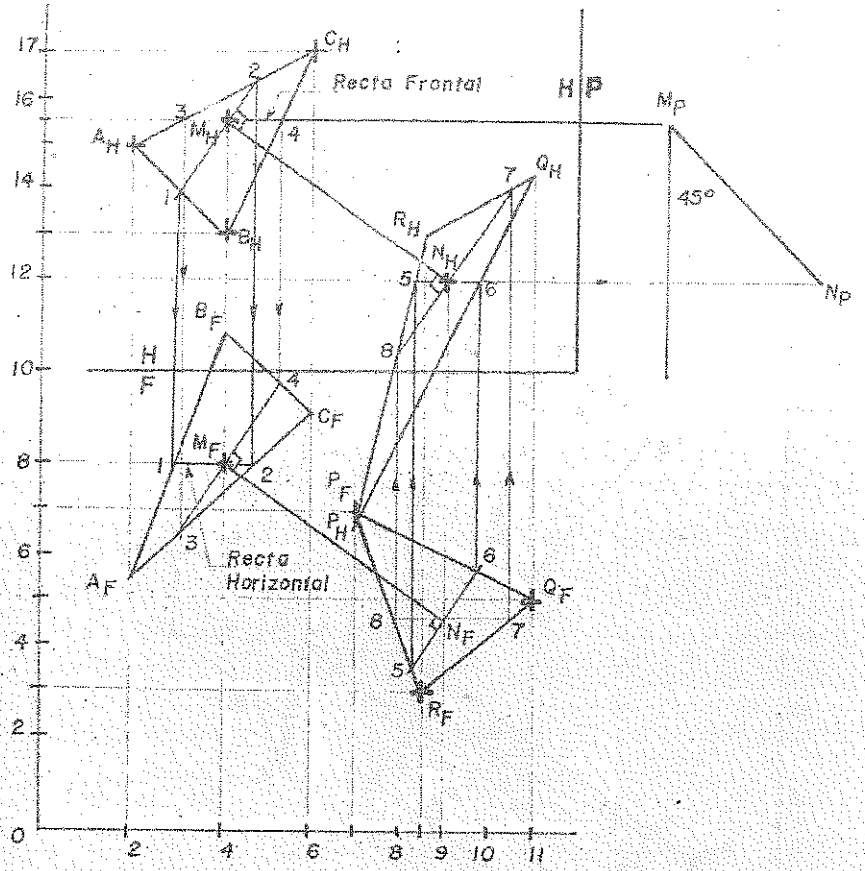
SOLUCIÓN 6.4:



PROBLEMA 6.5: Una recta se apoya en los puntos **M** y **N**, sobre el plano **ABC** y **PQR** respectivamente. Si **MN** es perpendicular a ambas y está contenida en un plano que tiene una pendiente de **45°SE**. Hallar las proyecciones que faltan de los planos **ABC** y **PQR**, utilizando solamente los planos principales. Nota: Utilizar una vista adicional para, completar la proyección que falta de la recta **MN**.

M(4,8,15.5), N(9,?,12); A(2,?,15), B(4,?,13), C(6,?,17): P(7,7,?), Q(11,5,?), R(8.5,3,?).

SOLUCIÓN 6.5:

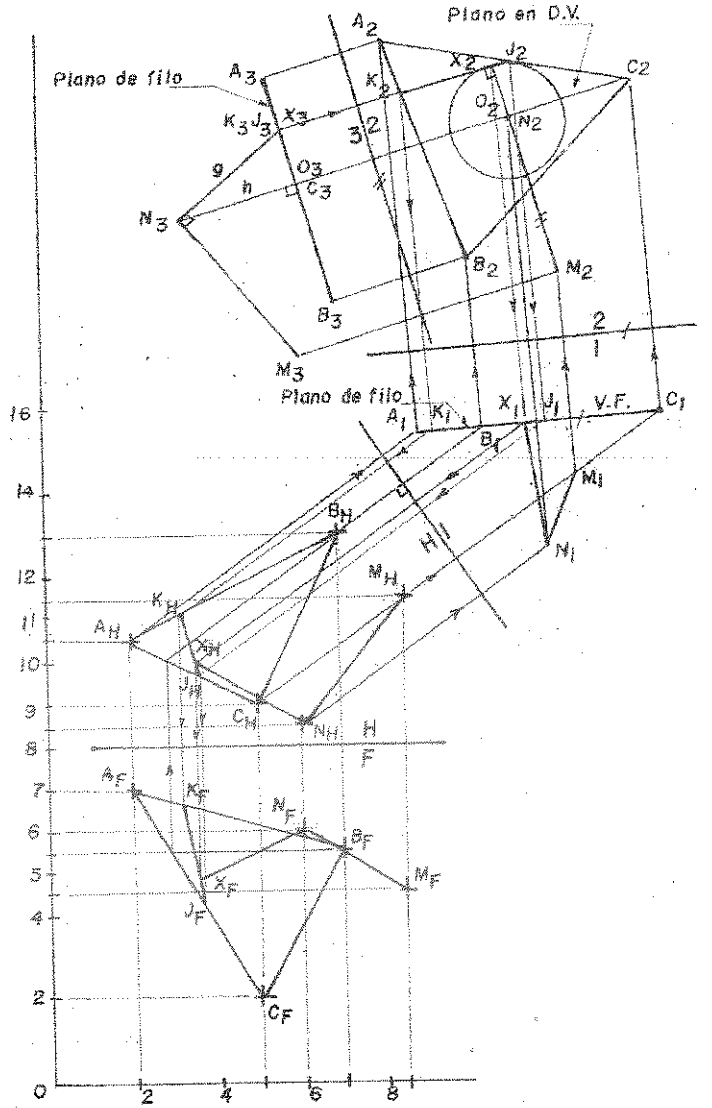


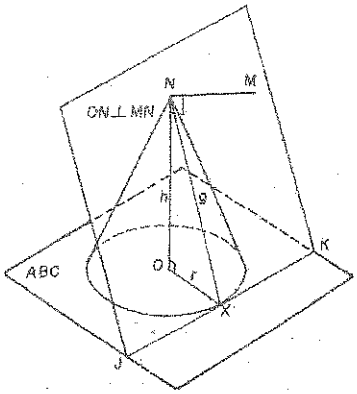
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Completar la proyección frontal de la recta **MN** utilizando el plano de perfil, este plano que contiene a la recta **MN** se proyecta de canto con una inclinación de **45°** dirigido al **SE**.
3) Trazar en el plano **ABC** la recta horizontal **12** perpendicular al a recta **MN**, en el plano frontal la recta **12** es paralela al plano de proyección y pasa por el punto **M**.
4) Trazar la recta frontal **34** en el plano **ABC**, perpendicular a la recta **MN**; en el plano horizontal la recta **34** es paralela al plano de proyección y pasa por el punto **M**. Las rectas **12** y **34** determinan la proyección frontal del plano **ABC**.
5) En forma similar para determinar la proyección horizontal del plano **PQR** se necesitan de la ayuda de dos rectas notables **56** y **78**; perpendiculares a la recta **MN** respectivamente, y que pasan por el punto **N**.

PROBLEMA 6.6: **MN** es una recta exterior al plano determinado por el triángulo **ABC**. Trazar en el plano **ABC** una recta **JK** y determinar en está un punto **X**, tal que por este punto pase la perpendicular común a esta recta **JK** y a la recta exterior **MN**; siendo **N** un punto de la mencionada perpendicular. Mostrar en los planos principales la recta **JK** y el punto **X** contenida en esta.
M(8.5,4.5,11.5), N(6,6,8.5); A(2,7,10.5), B(7,5.5,13), C(5,2,9).

SOLUCIÓN 6.6:





PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la dimensión verdadera del plano ABC.
3) Hallar la dimensión verdadera de la recta MN, utilizando la vista auxiliar "3" paralela a dicha recta.
4) Desde el extremo N en el plano auxiliar "3" trazar la recta NO perpendicular al plano ABC de filo; y la recta NX perpendicular a la recta NM, estando proyectada la recta JK de punta en el extremo X de la perpendicular NX. La recta NO y NX representan la altura y la generatriz de un cono recto respectivamente.
5) En el plano auxiliar "2" trazar un círculo con centro en O y de radio igual a OX; este círculo es tangente a la recta JK contenida en el plano ABC en el punto X.
6) Completar los planos principales de la recta JK y del punto X contenida en dicha recta.

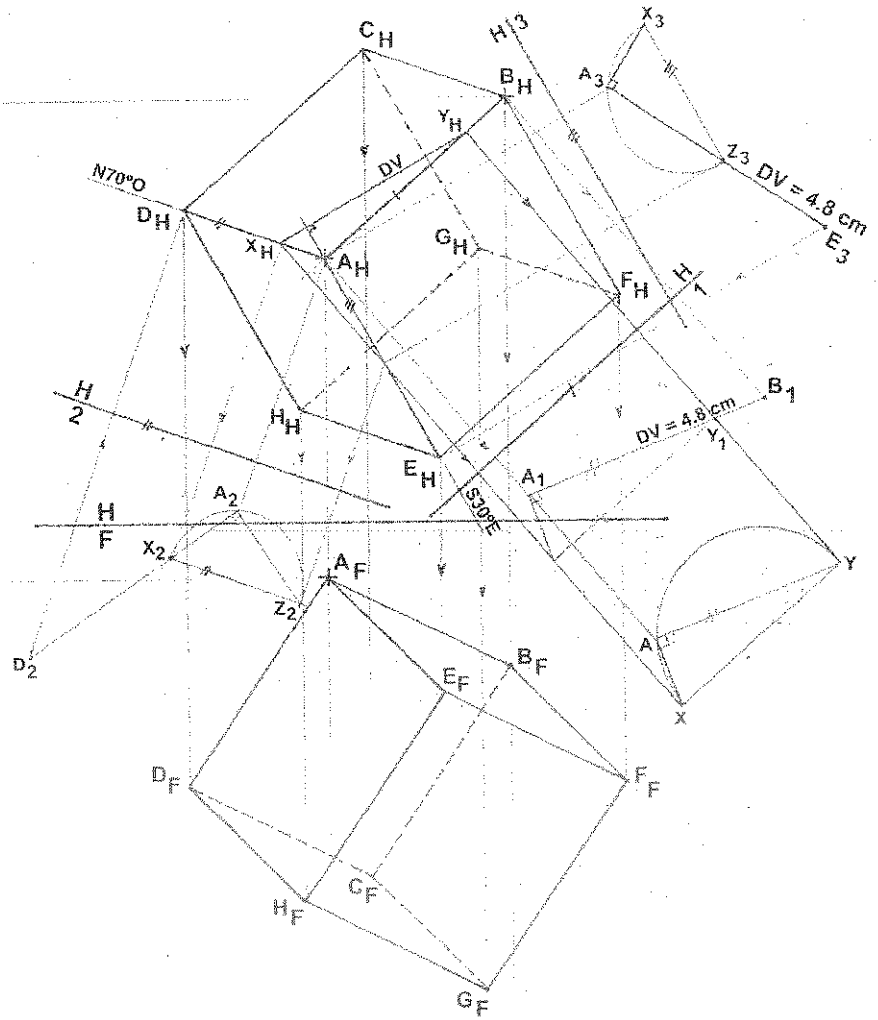
PROBLEMA 6.7: Conociendo la dimensión verdadera de una recta contenida en una cara de un cubo, tal como lo muestra la figura (a); determinar la proyección del cubo y completar la visibilidad.

PROCEDIMIENTO:

1) Conociendo AB y las direcciones de las rectas AD y BC, y una recta contenida en el plano ABCD.
2) Formar el triángulo rectángulo XAY y trazar el plano de elevación "1" paralela a la recta AB contenida en dicho plano.
3) En el plano de elevación "1" y en el punto medio O de la recta XY trazar una semicircunferencia, en donde inscribiremos al triángulo rectángulo XAY (arco capaz de 90°).
4) En el plano de elevación "1" la recta XY se proyecta paralela al plano de proyección y la recta AB se proyecta en dimensión verdadera.
5) Trazar el plano de elevación "2" paralela a la dirección AD (puede ser también BC); en este plano de proyección desde A trazar un arco de radio igual a la dimensión verdadera de AB igual a 5.5 centímetros, y donde corte a la recta AY se determina el extremo D de la recta buscada.
6) Desde el extremo A trazar una recta perpendicular a la recta en dimensión verdadera contenida en la superficie ABCD; esta recta determina la dirección de la recta AE, lado del cubo.

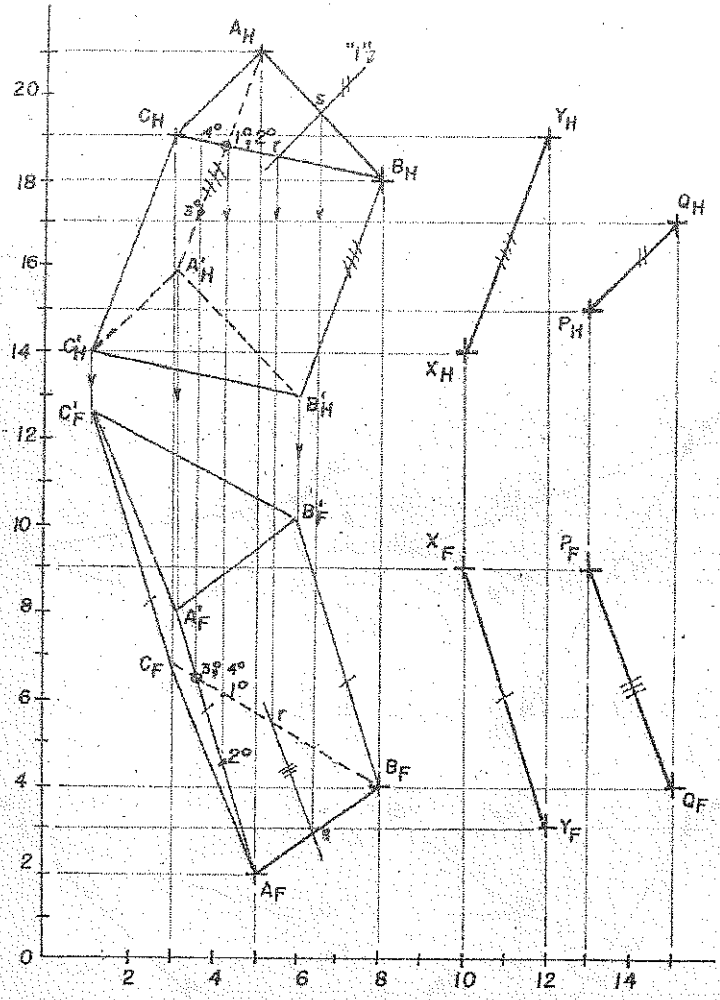
7) Trazar el plano de elevación "3" paralelo a la dirección del lado AE del cubo; ubicar AD en este plano de proyección y perpendicular a la recta AD trazar AE perpendicular al lado AD.
8) Completar los lados del cubo aplicando paralelismo.

SOLUCIÓN 6.7:



PROBLEMA 6.8: ABC es una de las bases de un prisma triangular. Si PQ es paralela a la base ABC, siendo además las aristas laterales del prisma iguales y paralelas al segmento XY; se pide completar las proyecciones del sólido y su visibilidad. No utilizar vistas adicionales.
A(5,2,21), B(8,4,18), C(3,?,19); P(13,9,15), Q(15,4,17), X(10,9,14), Y(12,3,19).

SOLUCIÓN 6.8:



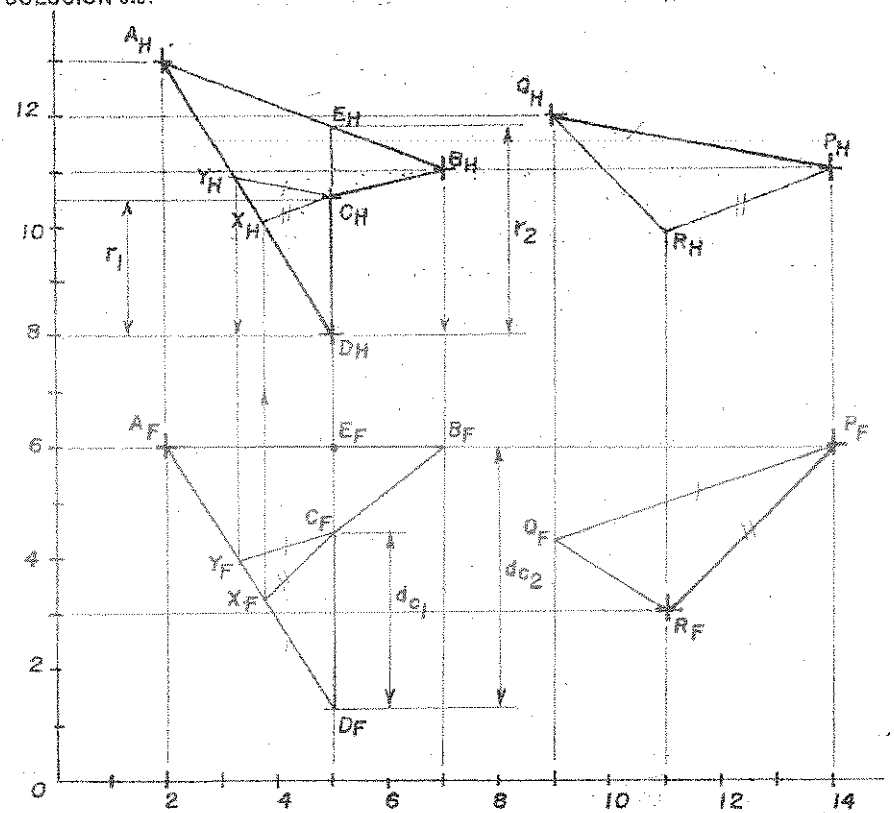
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos según sus coordenadas dadas.
2) En el plano horizontal trazar la recta "I" contenida en el plano ABC, y paralela a la recta PQ.

3) Completar la proyección frontal del plano ABC. Trazar líneas de referencia de r y s; el punto s se encuentra en AB y desde este punto trazar una recta paralela a PQ hasta que corte a la línea de referencia de r. Luego unir B y r, y la prologamos hasta cortar a la línea de referencia de C. Finalmente unir A con C.
4) Desde B trazar una recta de igual longitud y paralela a la recta XY.
5) Completar las proyecciones del prisma triangular, trazando las demás aristas y paralelas a BB'.
6) Visibilidad en H: cruce de las rectas CB y AA', en el plano frontal CB está arriba y AA', en el plano frontal CB está arriba y AA' invisible.
7) Visibilidad en F: cruce de las rectas AA' y CB, en el plano horizontal AA' está delante y CB por detrás de él; por lo tanto AA' es visible y CB invisible.

PROBLEMA 6.9: Completar las proyecciones del plano PQR, paralelo al plano ABCD; sabiendo que este plano contiene a la recta horizontal AB y al segmento CD que baja de C a D y mide 4 centímetros de longitud. P(14,6,11), Q(9,?,12), R(11,3,?), A(2,6,13), B(7,?,11), C(5,?,10.5), D(5,?,8).

SOLUCIÓN 6.9:



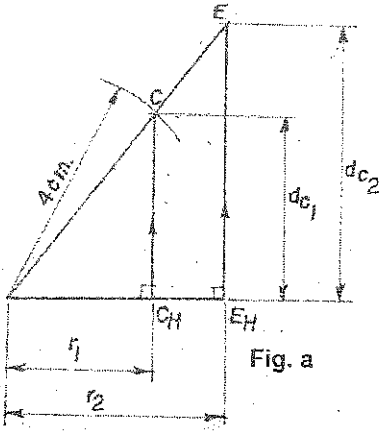


Fig. a

PROCEDIMIENTO:

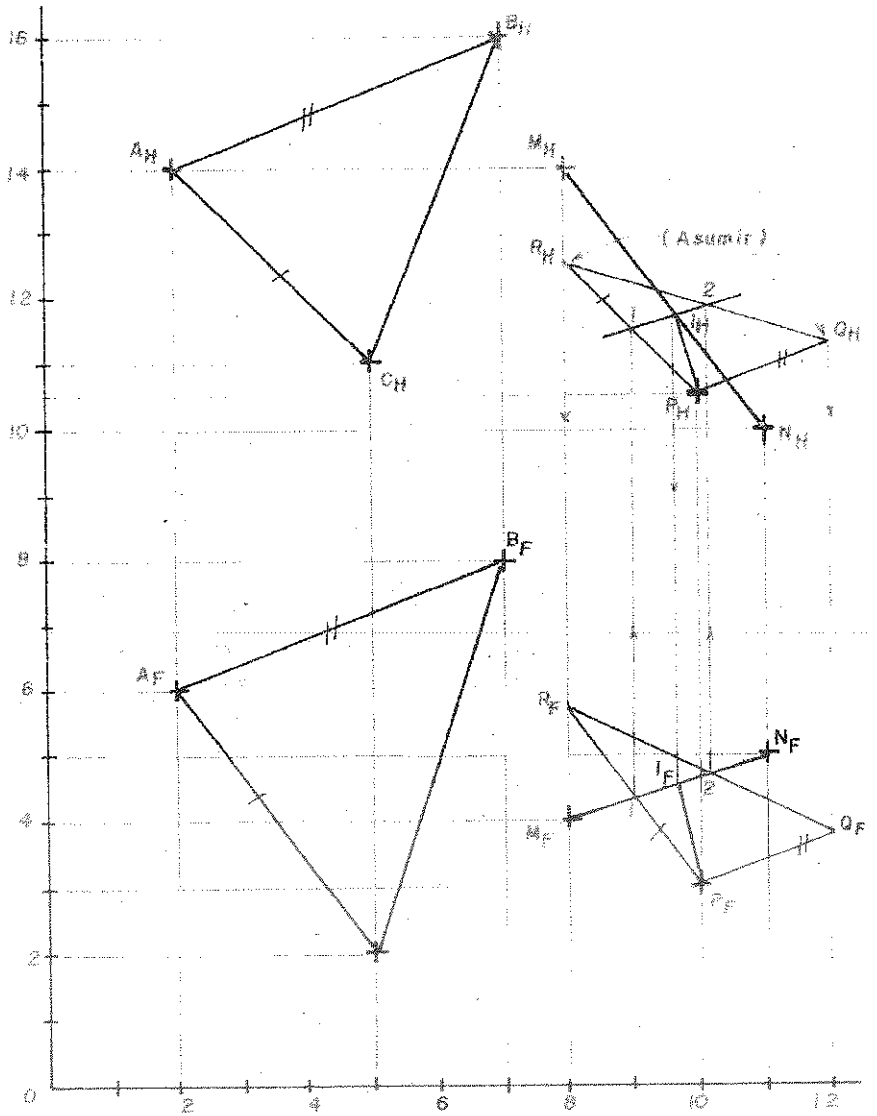
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Desde A_F trazar la recta horizontal **AB**.
3) Construir la figura **(a)** con r_1 y **CD** igual 4 centímetros de longitud y obtenemos la diferencia de cotas dc_1.
4) En el plano horizontal prolongar la recta **DC** hasta obtener el punto **E** sobre la recta **AB**. Trasladar r_2 a la figura **(a)** y obtenemos la diferencia de cota dc_2.
5) Desde el punto **E** situado sobre la recta **AB** en el plano frontal, medimos la diferencia de cota dc_2 obtenida de la figura **(a)**, y localizamos el punto **D**. Diferencia de cota entre **E** y **D**.
6) Desde D_F medir la diferencia de cota dc_1 y obtenemos C_F. Luego completar el plano **ABCD**.
7) En el plano horizontal y desde el punto **C** trazar la recta **CY** paralela a la recta **PQ**. Luego proyectar el punto **Y** al plano frontal y unimos **YC**; y desde el punto **P** trazar la recta **PQ** paralela a la recta **CY**.
8) En el plano frontal y desde el punto **C** trazar la recta **CX** paralela a la recta **PR**; proyectar el punto **X** al plano horizontal y trazar desde **P**. una recta paralela a **CX** hasta encontrar al punto **R**.
9) Completar las proyecciones principales del plano **PQR**.

PROBLEMA 6.10: Por lo punto **P** trazar una recta que sea paralela al plano **ABC** y que se corte con la recta **MN. P(10,3,10.5); A(2,6,14), B(7,8,16), C(5,2,11); M(8,4,14), N(11,5,10)**

PROCEDIMIENTO:

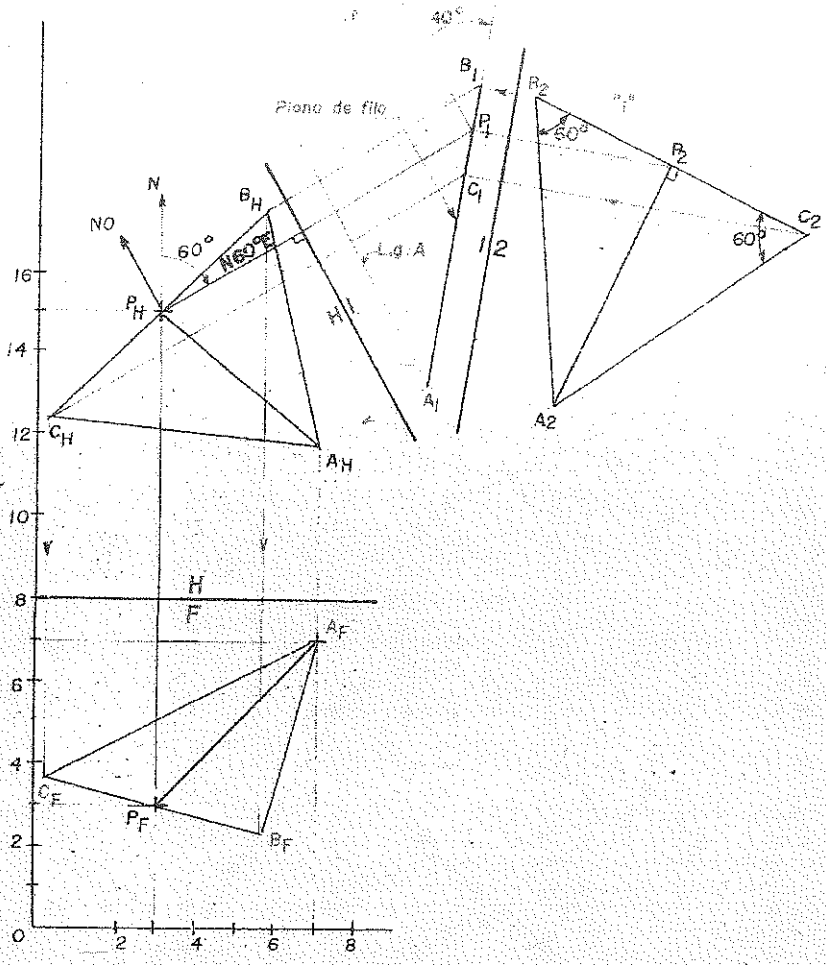
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Por el punto **P** trazar el plano **PQR** paralelo al plano **ABC**; siendo **PQ//AB** y **PR//AC**.
3) Hallar el punto de intersección **I** entre la recta **MN** y el plano **PQR**.
4) Desde el punto **P** trazamos la recta **PI** que es el segmento buscado.

SOLUCIÓN 6.10:



PROBLEMA 6.11: La recta PA es la altura de un triángulo equilátero ABC, que tiene una orientación N60°E y una pendiente de 40°NO; siendo P el pie de dicha altura. Completar las proyecciones principales del plano ABC, identificando los vértices de izquierda a derecha.
P(3,3,15), A(7,7,?).

SOLUCIÓN 6.11:



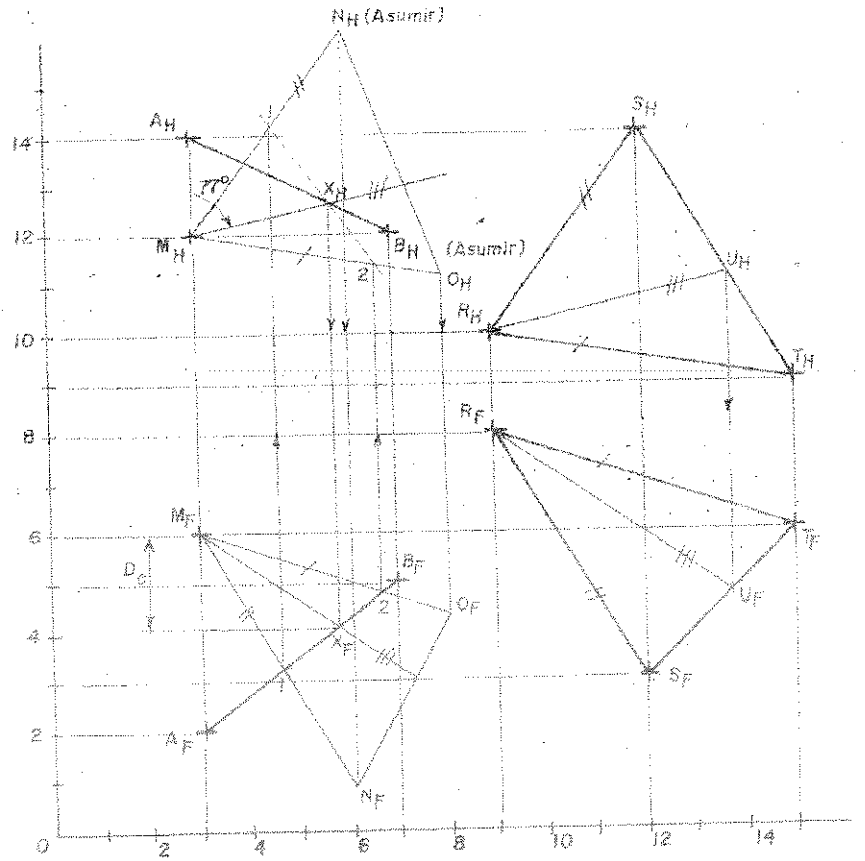
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos A y P según sus coordenadas dadas.
2) Desde P_H trazar la orientación **N60°E**.
3) Trazar el plano de elevación "**1**" perpendicular a la orientación trazada en el paso dos (recta horizontal en el plano **ABC**), para proyectar de canto al triángulo **ABC**.
4) En el plano de elevación trazar el L.g. de **A** y la pendiente de **40°NO**, dichas rectas se cortan en **A**: luego proyectamos este punto al plano horizontal.
5) Trazar el plano auxiliar "**2**" paralelo al plano de filo, en este plano de proyección hallamos los puntos **A** y **P**.

6) Por P_2 trazar la recta "1" perpendicular a la recta PA.
7) En el plano auxiliar "2" construir el triángulo equilátero ABC. Desde A trazar las rectas AB y AC que forman ángulos de 30° con la recta "1".
8) Completar las proyecciones principales del triángulo equilátero ABC.

PROBLEMA 6.12: Sin utilizar ninguna vista adicional, determinar la orientación y la pendiente de una recta MX; que además de cortarse con la recta AB sea paralela al plano RST.
M(3,6,12); A(3,2,14), B(7,5,12(; R(9,8,10), S(12,3,14), T(15,6,9).

SOLUCIÓN 6.12:



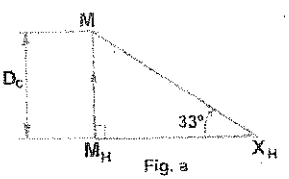


Fig. a

PROCEDIMIENTO:

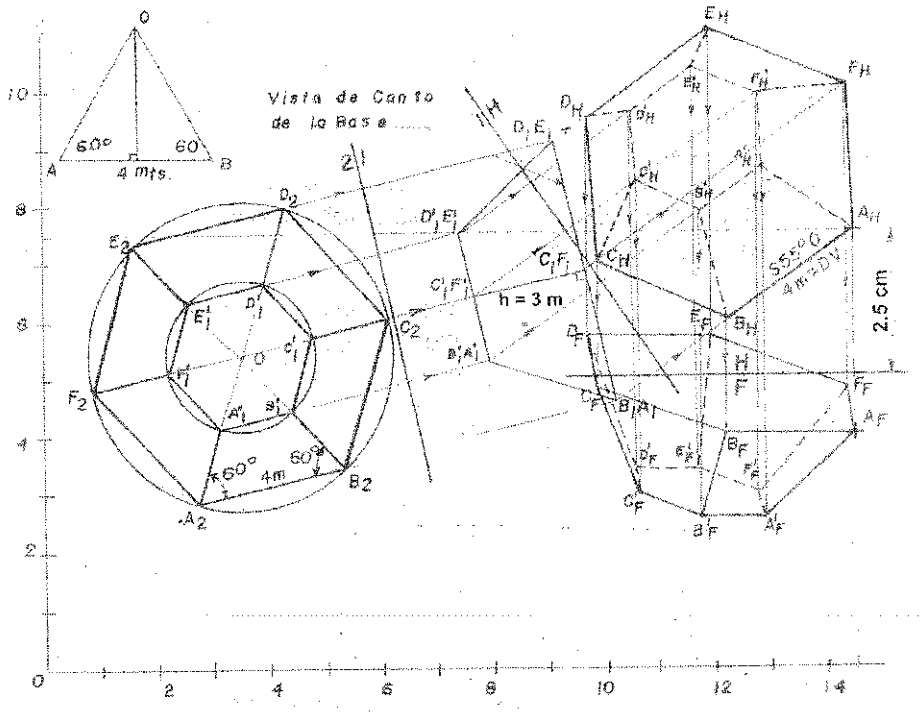
1) Graficar los puntos A y P según sus coordenadas dadas.
2) Por el punto M trazar el plano MNO paralelo al plano RST; siendo MO//RT y MN//RS.
3) Hallar el punto de intersección X entre la recta AB y el plano MNO.
4) Desde el punto M trazar la recta MX que se corta con la recta AB en X y es paralelo al plano RST. La recta MX es paralela a la recta RU contenida en el plano RST.
5) La orientación de la recta MX = N77°E.
6) Por diferencia de cota construir la figura (a), teniendo como datos la proyección horizontal de la recta MX y su diferencia de cota. En este gráfico hallamos la pendiente de la recta MX = 33°; sin utilizar ninguna vista adicional.

PROBLEMA 6.13: Hallar la visibilidad del tronco del pirámide regular cuya altura es de 3 metros. La base mayor ABCDEF y la base menor A'B'C'D'E'F', son hexágonos regulares; siendo AA' una arista lateral del tronco de pirámide. La orientación y la pendiente de la base mayor está dada por S55°O y 40°SE respectivamente. Considerar el lado de la base mayor de 4 metros y el lado de la base menor 2 metros. Todos los puntos de la base mayor están encima del lado AB, siendo B el punto de menor alejamiento. La base menor está debajo de la base mayor. Nomenclatura del tronco de pirámide, sentido horario en la vista Horizontal. Ubicar la línea de pliegue H-F, 2,5 centímetros delante de A. ESCALA: 1:125. A(14.5,4,7.5)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos A y P según sus coordenadas dadas.
2) Trazar la orientación S55°O desde el punto A y perpendicular a esta orientación trazamos el plano de elevación "1"; en donde medimos la inclinación de 40°SE.
3) Trazar el plano auxiliar "2" paralelo a la vista de canto de la base, en este plano de proyección desde A medimos hacia la derecha (sentido horario en H) 4 metros., longitud que tiene el lado mayor.
4) En el plano de proyección "2", conociendo AB, trazar un triángulo equilátero cuyos lados se cortan en O. Con centro en O y de radio igual a 4 metros, trazar la circunferencia circunscrita en el hexágono.
5) Inscribir el hexágono de base mayor en la circunferencia hallada; y con centro en O trazar la circunferencia de radio igual a 2 metros, en donde se debe inscribir la base menor del tronco de pirámide.
6) En el plano de elevación trazar la altura de 3 metros del tronco de pirámide, luego proyectar a este plano de proyección todos los puntos hallados.
7) Completar todas las proyecciones utilizadas para el tronco de pirámide, teniendo en cuenta las reglas de visibilidad.

SOLUCIÓN 6.13:

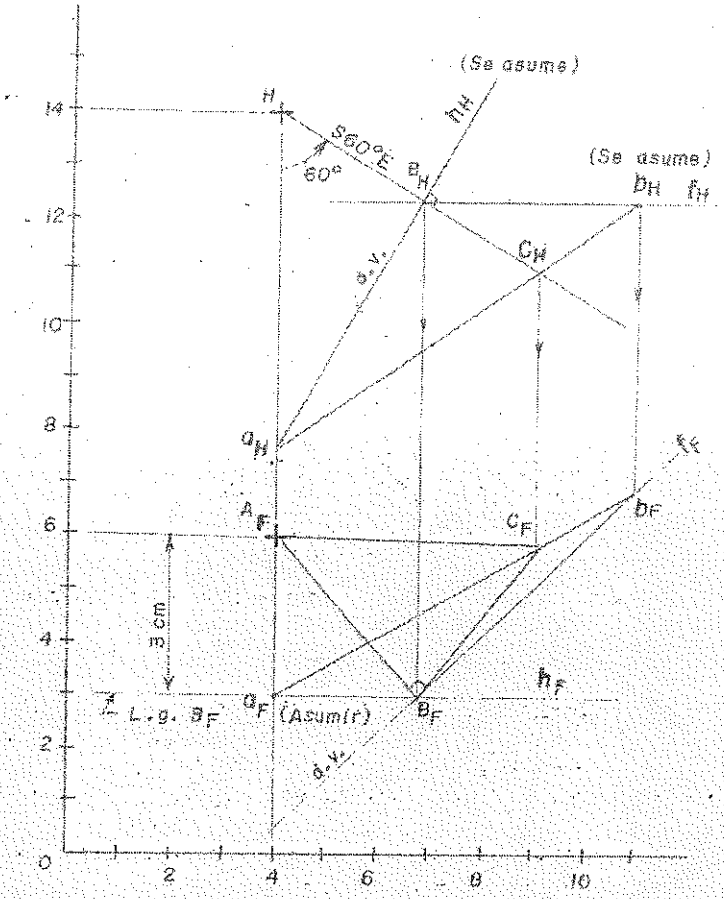


PROBLEMA 6.14: Construir un triángulo rectángulo **ABC**, recto en **B**; tal que los vértices sean colineales en una proyección. El lado **AB** tiene una orientación de **S60°E** y **B** se encuentra 3 centímetros debajo de **A**. Resolver sin vistas auxiliares. **A(4,6,14)**.

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto **A** según su coordenada dada
2) Desde el punto A_V trazar la orientación **S60E**, desde A_F y por debajo de él trazar los 3 centímetros que representa el lugar geométrico del punto **B** (recta horizontal "**h**").
3) Trazar la recta horizontal (**h**) en **d.v.** en el plano horizontal, perpendicular a la orientación; se asume una posición cualquiera para esta recta. El punto "**a**" pertenece a "**h**" y se toma donde desee.
4) La recta horizontal "**h**" corta a la orientación en **B**, por este punto pasar una recta frontal que debe ser perpendicular a la recta **AB**.
5) Asumir el punto "**b**" sobre la recta frontal, y se toma desde se desee, unir **a** con **b**; esta recta corta a la prolongación de la orientación en **C**.
6) Los puntos **a**, **b** y **B** está en el plano formado por las rectas notables "**h**" y "**f**".
7) En la proyección horizontal los puntos A, B y C son colineales y en la proyección frontal BC es perpendicular al lado AB (Condición de perpendicularidad).

SOLUCIÓN 6.14:



PROBLEMA 6.15: O es el centro de un círculo cuyo diámetro es de 4 centímetros, se sabe además que este círculo tiene una pendiente de 20°SE y una orientación de S45°O. Determinar las proyecciones del mismo, y luego inscribirlo en un triángulo equilátero que tenga uno de sus lados de perfil.

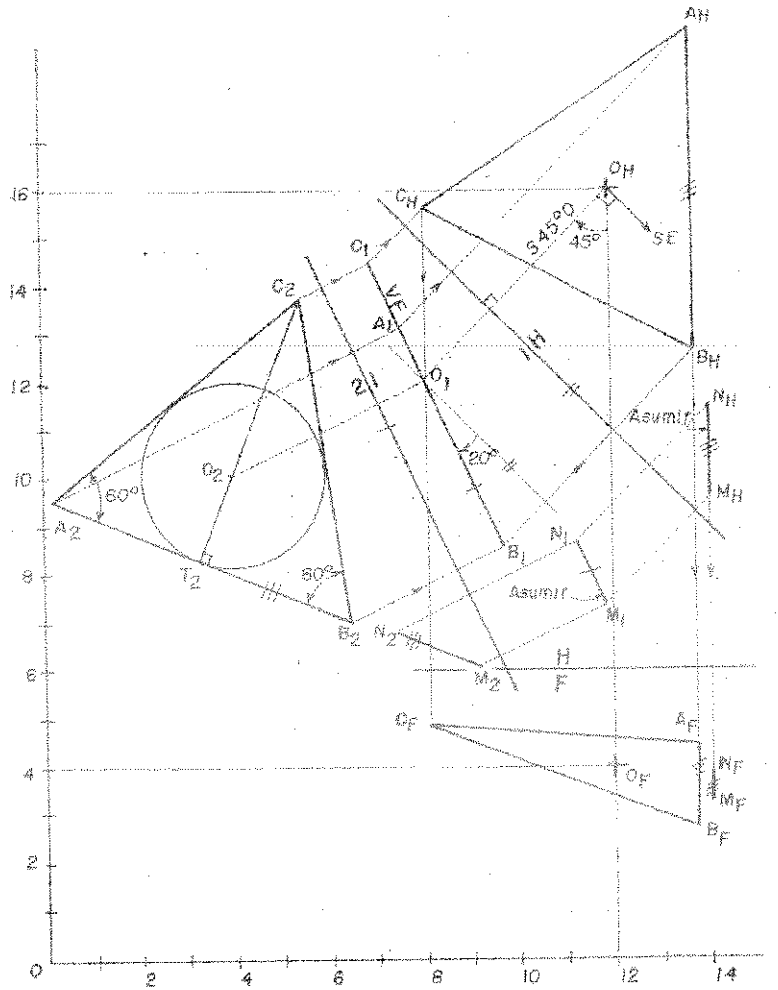
ESCALA 1:1 O(12,4,16).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto O según su coordenada dada.
2) Desde O_H trazar la orientación S45°O y perpendicular a esta orientación el plano de elevación "1" en donde medimos la pendiente de 20°SE.
3) Trazar el plano auxiliar "2" paralelo al plano del círculo proyectado de canto en el plano de elevación.

4) Asumir una recta de perfil cualquiera de longitud arbitraria en el plano horizontal, esta recta se proyecta en el plano de elevación paralelo al plano de canto (asumir cotas); completar esta recta en los planos utilizados.
5) En el plano auxiliar "2" trazar una recta "p" paralela a la recta **MN**, y tangente al círculo de radio r igual a **2** centímetros (existen dos soluciones); desde el punto de tangente T trazar la altura del triángulo equilátero y que pase por el centro **O**.
6) Trazar dos rectas tangentes al círculo y que formen un ángulo de **60°** con la recta "P", formándose el triángulo equilátero **ABC**.
7) Proyectar el plano **ABC** a todas las proyecciones utilizadas.

SOLUCIÓN 6.15:



PROBLEMA 6.16: ABCDE es un pentágono regular, base de una Pirámide regular de vértice V. Determinar las proyecciones principales de la pirámide. Mostrar la visibilidad en todos los planos de proyección utilizados. A(2,6,13), C(5,3,15); V(3,8,?).

SOLUCIÓN 6.16:

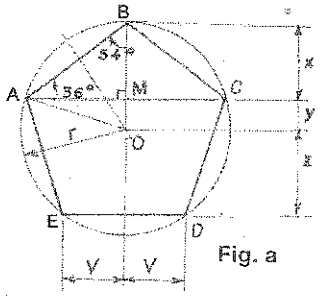


Fig. a

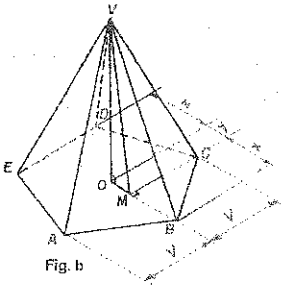
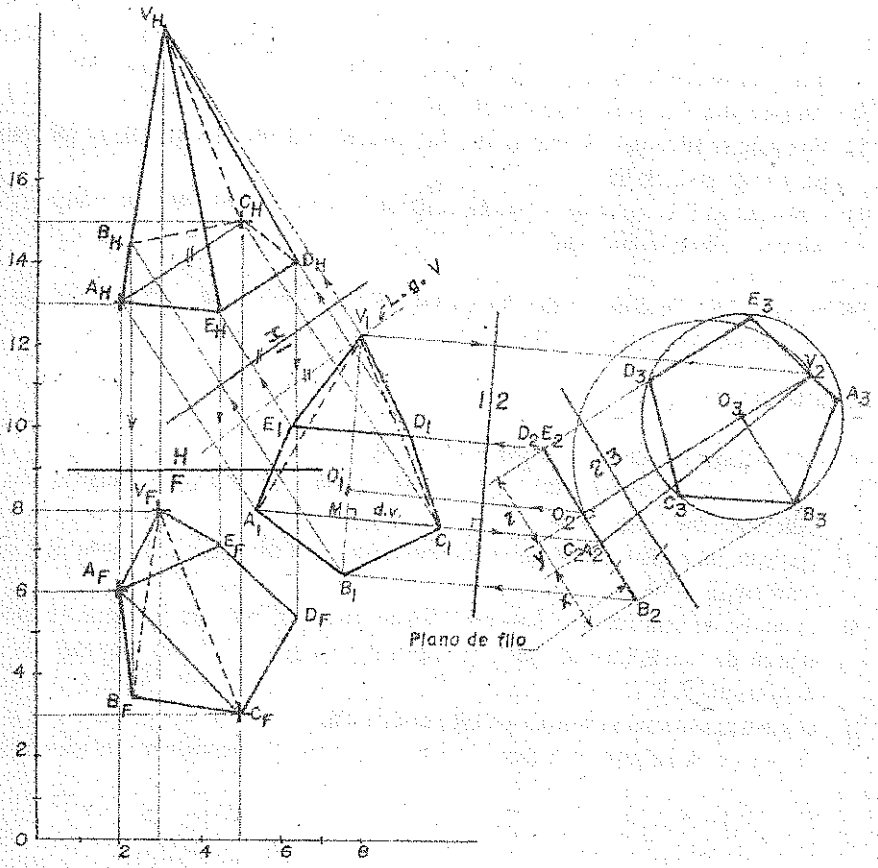


Fig. b



PROCEDIMIENTO:

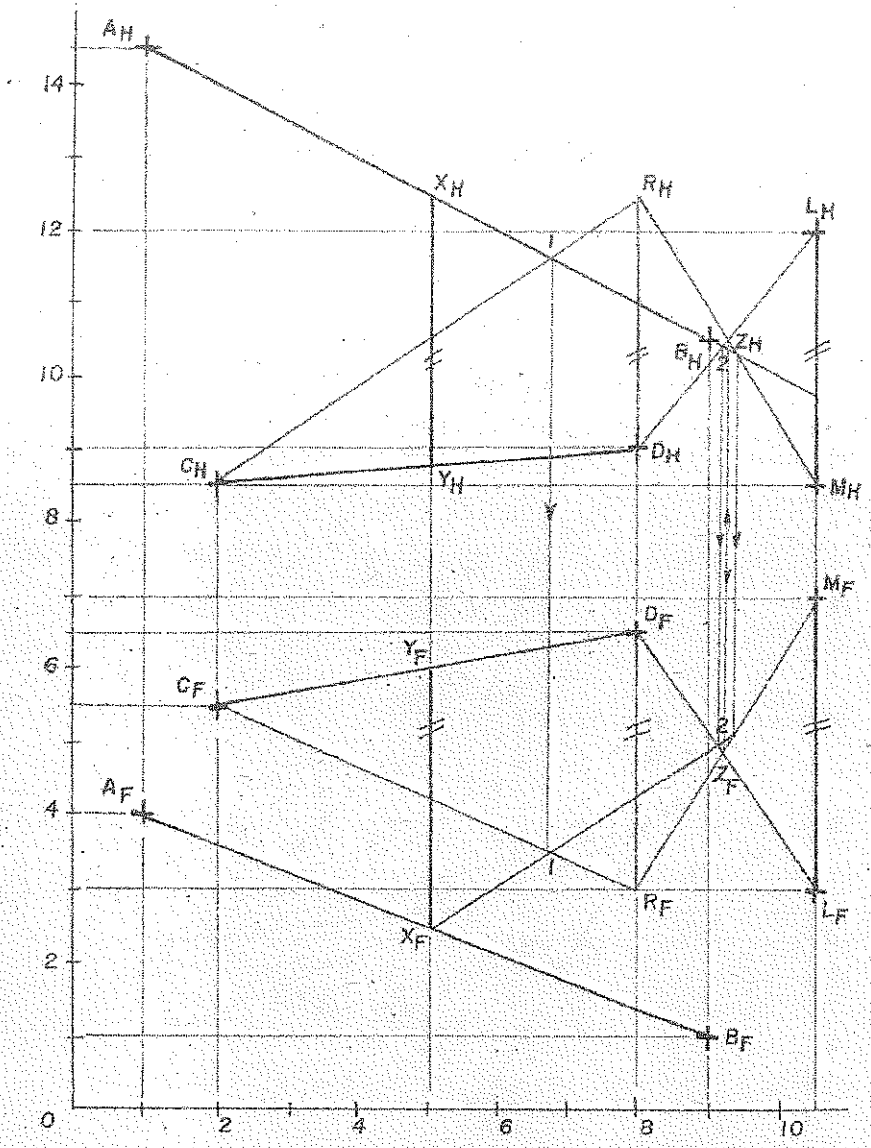
1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la d.v. de la diagonal AC, trazando el plano "1" paralelos a la recta AC. Construir las figuras a y b en base a la recta AC.
3) Hallar el punto medio de la recta AC en d.v., y pasar por M una perpendicular que corta al l.g. de V; proyectar este vértice al plano horizontal.
4) Hallar la proyección de punta de AC, la base de la pirámide se proyecta de canto en este plano de proyección.
5) En el plano auxiliar "2" trazar una semicircunferencia de diámetro CAV, e inscribir un triángulo rectángulo (VOM, ver figura b).
6) Haciendo centro en CA trazar un arco de radio igual a "y" (figura a), determinándose el centro O de la pirámide.
7) Trasladar x y z de la figura (a) a la proyección auxiliar "2", hallándose el plano ABCDE de filo.
8) Trazar el plano auxiliar "3" paralelo al plano de filo, determinar el punto O de donde trazamos una circunferencia de radio r; proyectar a este plano todos los vértices del plano ABCDE.
9) Completar todos los planos de proyección utilizados.
10) Visibilidad en H: cruce de las rectas VE y BC, en el plano frontal VE está arriba y BC debajo; por lo tanto es visible VE.
11) Visibilidad en F: cruce de las rectas AE y VC, en el plano horizontal AE está adelante y VC atrás; por lo tanto es visible AE.

PROBLEMA 6.17: Sin emplear vistas adicionales conectar las rectas AB y CD, con otra que sea paralela a la recta LM. A(1,4,14.5), B(9,1,10.5); C(2,5.5,8.5), D(8,6.5,9).

PROCEDIMIENTO:

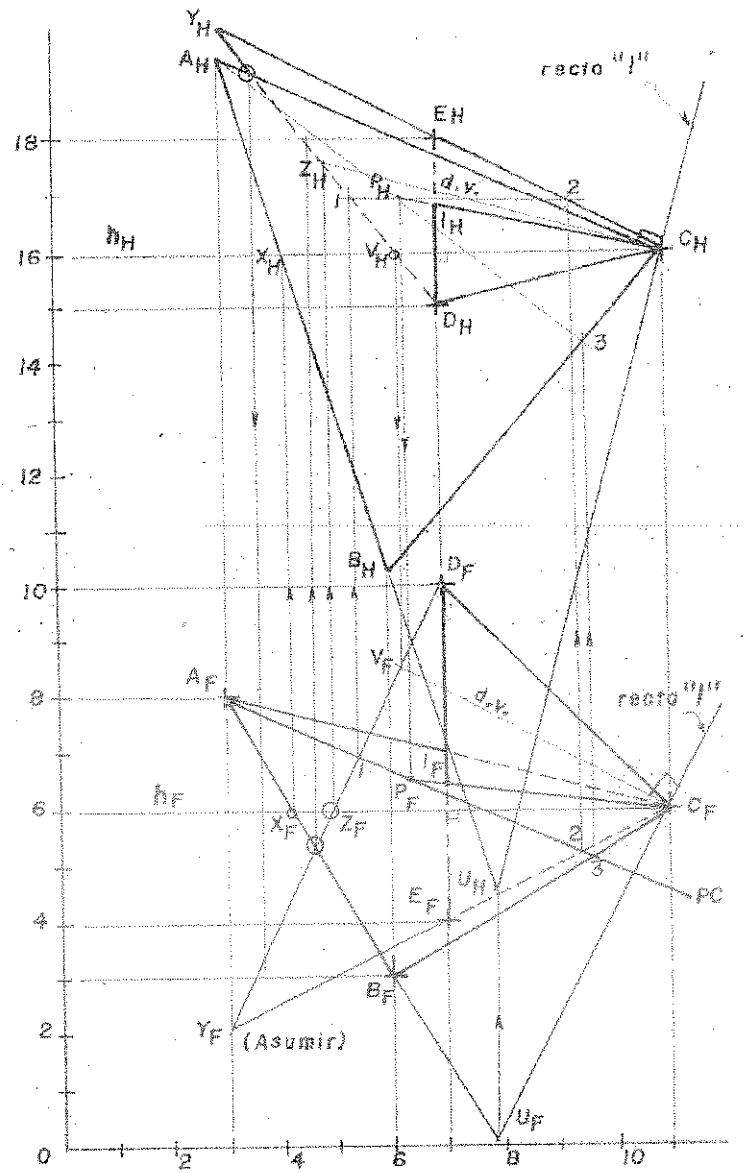
1) Graficar todos los puntos dados según coordenadas.
2) Por una de las rectas AB ó CD trazar un plano paralelo a la recta LM, por ejemplo el plano CDR siendo DR paralelo a LM.
3) Trazar las diagonales DL y RM en la proyección horizontal, estas rectas se cortan en P; por lo tanto forman un plano.
4) La proyección frontal de R se determina uniendo primero DL; segundo, proyectar a esta recta el punto de corte P, y tercero, unir L y P, y prolongamos esta recta hasta intersecar a la línea de referencia de R.
5) Hallar la intersección entre el plano CDR y la recta LM.
6) Por el punto de intersección X trazar la paralela a la recta LM, y obtendremos la solución XY.

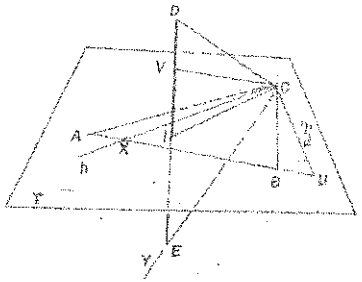
SOLUCIÓN 6.16:



PROBLEMA 6.18: Hallar la intersección entre los planos ABC y CDE; sabiendo que DE sea perpendicular al plano ABC. A(3,8,?), B(6,3,?), C(11,6,16); D(7,10,15), E(7,4,18)

SOLUCIÓN 6.18:





PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Trazar la recta horizontal "h" perpendicular a la recta DE de perfil.
3) Formar el plano YDC que contienen al a recta DE, siendo este plano perpendicular al plano ABC, se asume el punto Y.
4) Trazar desde el punto C una perpendicular al plano YDC (recta "1"), esta recta es perpendicular a las rectas horizontal ZC y frontal VC, contenidas en el plano formado.
5) Las rectas AB y "1" se cortan en U y pertenecen a un mismo plano; luego completar la proyección horizontal del plano ABC.
6) Trazar el PC – I para determinar la intersección entre los planos ABC y DCY, siendo PC la recta de intersección.
7) La intersección entre la recta DE y el plano ABC es el punto I.
8) Visibilidad en H: cruce de las rectas AC y DC; en el plano frontal AC está encima de la recta DC, por lo tanto es visible.
9) Visibilidad en F: cruce de las recta AB y DY; en el plano horizontal AB está delante de la recta DY, por lo tanto es visible.

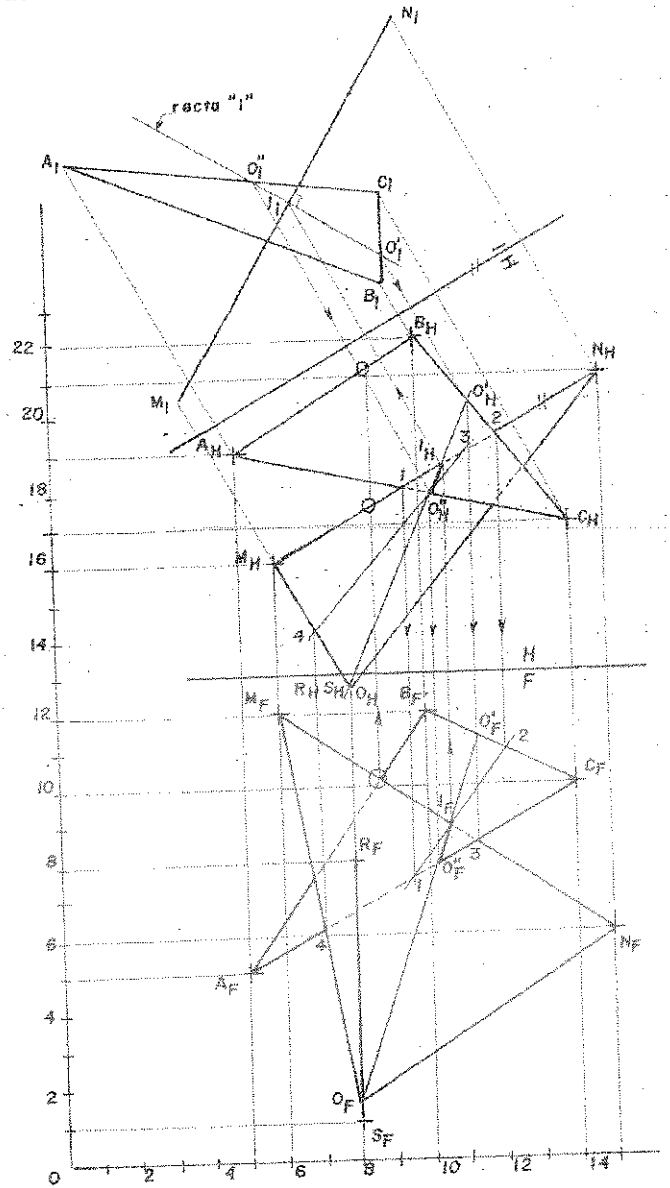
PROBLEMA 6.19: Se dan los puntos M y N, la vertical RS y el plano ABC; se desea hallar un punto O en la vertical de modo que el plano MNO corte al plano ABC, según una perpendicular a MN. Determinar la intersección entre los planos MNO y ABC. Mostrar la visibilidad.
M(6,12,16), N(15,6,21); R(8,8,?), S(8,1,?); A(5,5,19), B(10,12,22), C(14,10,17).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar el punto de intersección I de la recta MN con el plano ABC.
3) Hallar la dimensión verdadera de la recta MN, utilizando el plano de elevación "1"; y proyectar sobre esta recta el punto I hallado en el paso anterior.
4) En el plano de elevación "1" trazar la recta "1" perpendicular a la recta MN y que pase por el punto I.
5) La recta "1" corta al plano ABC en O' y O" proyectar estos puntos al plano horizontal; luego unir O' y O", y que pase por el punto I. En la prolongación de esta recta se determina la proyección de punta de la recta RS; asimismo determinamos el unto O contenida en la vertical RS. Formar el plano MNO.

6) Determinar la intersección entre los planos **MNO** y **ABC**, trazando los planos cortantes por las rectas **MN** y **AC**; que nos determinan los puntos de intersección **I** y **O"** respectivamente.
7) Por lo tanto el plano **MNO** corta al plano **ABC** según la recta **O'O"**.

SOLUCIÓN 6.19:



PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 6.1: Se dan las rectas AB y CD, trazar pasar por la recta AB un plano paralelo a CD. Verificar con una vista auxiliar el paralelismo de la recta y el plano.
A(3,7,16), B(6,4,19); C(7,4,17), D(8,9,13).

PROBLEMA 6.2: Completar las proyecciones del plano RST paralelo al plano LMN.
R(14,6,14), S(10,2,?), T(12,?,10): L(6,8,10), M(3,2,15), N(2,5,8).

PROBLEMA 6.3: Se ha realizado una perforación vertical en el punto A del terreno, y se encuentra en B un punto de la cara superior de un estrato de mineral; y en C un punto de su cara inferior, luego se efectúa en el punto D del terreno otra perforación inclinada, encontrándose en E, un punto de la cara inferior del mismo estrato y en F un punto de su cara inferior. Determinar su espesor, si las caras son paralelas.
A(5,8,15), B(5,6,15), C(5,3,15), D(12,8,17), E(10,?,13), F(9,4,11).

PROBLEMA 6.4: Dadas las rectas AB y CD concurrentes, se desea determinar una tercera recta que sea paralela a una recta cuya dirección es de N30°O y que se empalme a las dos primeras.
A(5,6,15), B(11,8,11); C(6,3,10), D(11,7,13).

PROBLEMA 6.5: Encontrar las proyecciones de un hexaedro regular que tiene una de sus caras sobre el plano RST. El punto A es un vértice del mismo y está sobre la arista más alta. Se sabe también que dicho hexaedro tiene cuatro aristas horizontales.
A(8,5.5,9); R(4,3.5,8), S(6,6,13), T(9,2,11).

PROBLEMA 6.6: Hallar las proyecciones de la recta "L", equidistante de las rectas AB, CD y EF; además que sea paralela a la recta CD.
A(1,7,9), B(7,4,12); C(6,6,8), D(10,5,10); E(11,2,11), F(14,4,8).

PROBLEMA 6.7: Hallar las proyecciones del paralelógramo TBCE, paralela al plano que pasa por el punto P con una orientación N75°E y una pendiente de 55°SE.
T(2,6,?), B(4,8,13), C(7,5,?), E(5,3,?); P(4,6,10).

PROBLEMA 6.8: Dibujar las proyecciones de una recta paralela a AB, de modo que su distancia a ésta y a RS sea de 120 cm. Además conectar las tres rectas dadas usando uniones T e indicar el sentido en que fluyen los líquidos por efecto de la gravedad, suponiendo que son los ejes de tres tuberías. ESCALA: 1:100. R(7,10,15), S(5,7,11); A(6,8,17), B(11,5,13).

PROBLEMA 6.9: Hallar las proyecciones de un prisma triangular cuya base superior PRS sea paralela a la recta MN, y cuyas aristas laterales son iguales y paralelas al segmento XY.
P(12,3,18), R(10,?,14.5), S(9,3,I?); M(10,1.5,19), N(13,2.5,17); X(6,2,17.5), Y(4,4.5,13,5).

PROBLEMA 6.10: Dadas dos rectas VF y CR que se cruzan, trazar un plano paralelo a cada una de ellas y equidistantes también de cada una de ellas.
V(3,8,17), F(11,4,14); C(3,6,13), R(10,9,18).

PROBLEMA 6.11: Trazar el segmento OX, de manera que sea paralela al plano LSD y su longitud sea de 3000 metros; además se sabe que el punto X pertenece al plano TBCE y está delante del punto O. Resolver solo utilizando los planos principales. ESCALA: 1 : 100,000.
O(11,4,18); L(6,4,15), S(9,4,16), D(9,7,19); T(2,2,20), B(13,2,20) C(11,2,14), E(4,2,14).

PROBLEMA 6.12: Hallar en el plano CDE una recta paralela a CE, sabiendo que el punto T de la recta AB dista 2cm de la recta que se quiere hallar.
C(6,5,10), D(8,3.5,14.5), E(4.5,5.5,13.5) A(3,5.5,14), B(6,1.510); T(4,4,?).

PROBLEMA 6.13: Se conoce la proyección horizontal de un paralelepipedo rectángulo y la proyección frontal de su vértice A. Determinar y medir sus tres dimensiones, y hallar su proyección frontal.
A(7,10,17), B(3,?,18.5), C(8,?,22), D(12,?,20.5); E(9,?,15), F(5,?,16.5), G(10,?,20), H(14,?,18.5).

PPOBLEMA 6.14: Se conoce la arista AD en proyección horizontal y las arietas de un cubo, AB cuya dirección es N70ºO y AE cuya dirección es S45ºE; y la proyección frontal del vértice A. Hallar las proyecciones horizontal y frontal del cubo. A(7,10,17), D(12,?,21).

PROBLEMA 6.15: Completar las proyecciones de una recta OS que mide 40 mm y es paralela a la recta CE. O(16.5,2.5,11.5), C(18,1.5,11.5), E(18,6.5,7.5).

PROBLEMA 6.16: Trazar una recta paralela a la recta EG y que intersecte que a las rectas oblicuas JK y XY. X(7.5,2.5,11.5), Y(10,5, 7.5), E(18,1.5,11.5), G(13,6.5,7.5); J(1.5,4,7.5), K(11.5, 6.5,10).

PROBLEMA 6.17: Por los cuatro puntos señalados A, B, C y E; trace cuatro planos equidistantes y paralelos, cada uno de los cuales debe contener solo uno de los puntos.
A(2.5,9,20.5), B(9,2.5,23), C(14,7.5,18), E(15.5,5,13).

PROBLEMA 6.18: Trazar una recta que pase por E, y que sea paralela al plano MON e intersecque la recta AB.
E(13,11.5,18); M(5,2.5,23), 0(1.5,10,20.5), N(6.5,7.5,17) A(7.5,1.5,13), B(13,5,15).

PROBLEMA 6.19: El segmento PQ es perpendicular a JK y OC; si JK tiene orientación S75ºE y OC tiene pendiente del 100%; completar las proyecciones que faltan, sin utilizar ninguna vista adicional.
P(10,2,9), Q(7,5,7); J(8,?,?), K(12,?,?); O(5,?,?), C(8,?,?).

PROBLEMA 6.20: El plano ABC es perpendicular a la recta MN y el punto O es común a ambas rectas. Determinar la proyección frontal del plano, sin utilizar ninguna vista adicional.
O(9,?,17.5), A(3.5,?,13), B(8.5,?,22), C(13,?,18); M(7,12.5,21.5), N(11,4.5,13).

PROBLEMA 6.21: Completar las proyecciones de las rectas AB y CD, estas rectas se cortan y son perpendiculares. A(3,13,21), B(9,?,169; C(5,5,17), D(11,?,20).

PROBLEMA 6.22: Determinar la recta CD perpendicular a la recta AB; utilizando sólo las proyecciones principales. C(13,3,9), D(13,?,17); A(5,1,9), B(5,4,6).

PROBLEMA 6.23: RS es un soporte de acero pegado al piso en R con un esquinero de 30°. Determinar la longitud del soporte y la longitud de un brazo perpendicular a él desde un punto A del piso. Dibujar las vistas frontal y horizontal de las dos barras.
ESCALA: 1:100. R (8,2,10), S(11,?,7); A(10,2,7).

PROBLEMA 6.24: Trazar un triángulo rectángulo RST, recto en S y perpendicular a la recta AB; cuya hipotenusa que mide 7cm corta a la recta AB, sabiendo además que RS mide 4cm.
A(4,5,18), B(7,3,12), R(6.5,4.5,8.5)

PROBLEMA 6.25: Complete las vistas dadas de una pirámide de base cuadrada que tiene el vértice V en su eje SV y uno de sus vértices de la base se ubica en el punto O.
S(10,5.18), V(18,5,23); O(10,1.5,20.5)

PROBLEMA 6.26: Encuentre las vistas y la longitud verdadera de la altura de la pirámide que tiene el vértice V. A(1.5,2.5,6.5), B(4,1.5,11.5), C(10,1.5,10); V(5,5,9).

PROBLEMA 6.27: Complotar las proyecciones del plano PQR perpendicular a la recta XL. Comprobar la perpendicularidad en una vista auxiliar.
P(5,4.5,12), Q(8,4,?), R(4,?,13); X(7,1,11), Y(3,4,16).

PROBLEMA 6.28: ABCDE es un pentágono regular, base de una pirámide regular de vértice V. Determinar las proyecciones de la pirámide. Mostrar la visibilidad en todas las vistas utilizadas.
A(2,6,11), C(4.5,3,12.5); V(4,7,?).

PROBLEMA 6.29: El segmento JF une los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro regular, si una de ellas está de perfil; hallar las proyecciones del tetraedro. Visibilidad.
J(15,3,14), F(13,4,11).

PROBLEMA 6.30: Ubicar en el plano TBCE un punto X que se encuentra 4 cm detrás de A y 1 cm debajo de C. T(3,5,12), B(3,9,16), C(9,7,18), E(9,3,14)

PROBLEMA 6.31: Determinar en el plano LSD un punto P que se encuentra 2cm delante de L y que equidiste de los puntos S y D. L(3,4,14), S(5,7,11), D(7,5,12).

PROBLEMA 6.32: Completar las proyecciones del plano PQR perpendicular a la recta AB. No utilizar ninguna vista adicional. P(4,8,?), Q(10,3,?), R(13,8,13); A(9,9,11), B(9,5,15).

PROBLEMA 6.33: Sin utilizar vistas adicionales, determinar la orientación y la pendiente de la recta AB que es perpendicular a JK. Además completar las proyecciones de dicha recta, sabiendo que tiene la misma longitud de JK; y que los puntos más bajos de ambas tengan igual cota.
J(10,9,15), K(10,3,11); A(13,?,12).

PROBLEMA 6.34: Una recta se apoya en los puntos P y Q sobre los planos LSD y TBC respectivamente; si PQ es perpendicular a ambos planos y esta contenido en un plano que tiene una pendiente de 100%SE, hallar las proyecciones que faltan de los planos LSD y TBC, y de PQ; utilizando sólo una vista adicional para la recta PQ.
L(6,?,9), S(9,?,10), D(8,?,8.5); T(9.5,3.5,?), B(11,1.5,?), C(12,3.5,?); P(8,4,9), Q(11,?,7.5).

PROBLEMA 6.35: El plano **LMN** es perpendicular al plano **ABC** y su distancia al punto **S** es de **1cm**. Si el punto **N** esta a una distancia de 1cm.; completar las proyecciones del plano **LMN**.
L(16,?,17), M(12,6,12); A(11,9,16), B(7,5,14), C(9,7,13); S(15,7,14)

PROBLEMA 6.36: **AB** es una arista de un tetraedro, el plano mediatriz de la arista opuesta contiene al punto **P** y a la arista **AB**. Sabiendo que las caras que se cortan según la arista opuesta **CD** son iguales y perpendiculares entre si; completar las proyecciones del tetraedro conociendo además que la longitud de **AB** es igual a la de **CD**. **A(3,5,14.5), E(5.5,8,11); P(1,9,10.5).**

PROBLEMA 6.37: Se sabe que el espesor de un estrato de mineral es uniforme, y al hacer perforaciones se encontró que los puntos **A** y **B** pertenecen a la cara superior; y los puntos **R** y **S** a la cara inferior de dicho estrato. Hallar su pendiente y su espesor.
A(3,5,11.5), B(6,1,14); R(2,1,14), S(7.5,3,10).

PROBLEMA 6.38: Utilice tan sólo los planos principales para determinar el haz reflejado, cuando se dan la superficie del espejo **ABCE** y el haz de luz **XY**.
A(7.5,10,24 B(12.5,10,20.5), C(10,4,15.5), E(5,4,19); X(5,12.5,14), Y(7.5,10.5,16.5)

PROBLEMA 6.39: **AD** es una diagonal mayor de un hexágono regular vertical que es la base posterior de un prisma recto de **2cm** de altura; además también es la base de una pirámide recta de **3cm** de altura. Dibujar las proyecciones del prisma y la pirámide con su respectiva visibilidad.
A(6,7,13), D(3,3,17).

PROBLEMA 6.40: Los puntos **A** y **B** son los centros de las bases paralelas de un prisma oblicuo cuya forma es pentagonal regular de **2cm** de lado; uno de cuyos vértices está situado **1cm** debajo y a la izquierda de su respectivo centro. Completar la proyección horizontal y frontal del prisma, sabiendo que la orientación de las bases es **S70ºE** y su pendiente **75ºSE**.
ESCALA: 1:1. A(3,4,14), B(8,3,15).

PROBLEMA 6.41: **O** es el centro de gravedad de un triángulo equilátero de lado igual a **3cm**., que es la base de una pirámide regular de **4 cm** de altura. Hallar las proyecciones de la pirámide sabiendo que un lado de la base tiene orientación **N50ºE**, dicha base está contenida en un plano de orientación **S60ºE** y pendiente **20ºSO**.Considerar al vértice de la pirámide debajo de **C**.
ESCALA: 1:1. O(4,6,11).

PROBLEMA 6.42: Las caras superior e inferior de un exaedro regular son **ABCD** y **EFGH** respectivamente. La arista **AE** tiene orientación **S45ºO** y un ángulo de declinación de **30°**. Hallar las proyecciones principales del exaedro sabiendo que el lado **AB** es frontal y el punto **X** pertenece al plano de la cara **EFGH**. Considerar el vértice **A**, el de mayor alejamiento. Mostrar la visibilidad en todas las proyecciones utilizadas. **ESCALA: 1:1. A(6.5,5.5,12.5); X(7,2,10.5)**

PROBLEMA 6.43: Completar las proyecciones principales de la pirámide **V-ABCD** de **3.5 cm** de altura, cuya base **ABCD** es un rombo situado en un plano de orientación **S60ºE** e inclinación **0ºSO**; sabiendo que la longitud de los lados (del rombo) es media proporcional entre las longitudes de la altura de la pirámide y la diagonal **AC**. Mostrar la visibilidad en todas las proyecciones utilizadas.
ESCALA: 1:1. V(2,4,9); A(4.5,1.5,11), C(6,?,9.5)

PROBLEMA 6.44: Completar usando sólo los planos principales las proyecciones del paralelepipedo ABCD-EFGH; estando C entre B y X, y G entre H e Y; siendo CG paralela a la recta MN. Visibilidad.
B(11,4,12), H(2,2,9); X(6,2,15), Y(2,5,14); M(8,5,7), N(12,4,9)

PROBLEMA 6.45: Completar las proyecciones principales de la pirámide V---ABCD, cuya base ABCD es un cuadrado situado en un plano de orientación S65°E, cuya inclinación es de 30ºSO; estando CD detrás do AB y sabiendo que los diedros AB y CD miden 60°; y que las caras VBC y VAD forman un ángulo diedro de 45º, estando V debajo de ABCD y a la izquierda de C. Mostrar la visibilidad.
A(3,4,9), B(6,?,10)

PROBLEMA 6.46: Hallar las proyecciones principales del tronco de prisma ABCD-EFGH, sabiendo que el plano que contiene a ABCD es vertical y tiene una orientación S75ºO; que el plano que contiene a EFGH tiene orientación S60°O y de inclinación 30ºSE; que AE es una arista lateral; que la sección recta del tronco de prisma es cuadrada y que la arista opuesta a AE, que es CG, pasa por X. Mostrar la visibilidad en todas las proyecciones utilizadas.
A(16.5,5.5,10.5); E(14,2,14); X(13.5,5.5,13)

PROBLEMA 6.47: Trazar el segmento XY de 1 metro de longitud, perpendicular al plano PQR, estando Y en dicho plano y X en la recta AB. ESCALA: 1:100
P(3,3.5,10), Q(7.5,5.5,11), R(5,2.5,8), A(2,4,7.5), B(6.5,5,10)

CAPITULO 7:

MENOR DISTANCIA

7.1 MENOR DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

La distancia más corta de un punto a una recta, es la distancia perpendicular trazada desde ese punto a la recta proyectada en dimensión verdadera. Sea P un punto dado y AB la recta en dimensión verdadera y PX la menor distancia; tal como se muestra en la figura 7.1.

Para determinar esta menor distancia y su longitud utilizaremos dos métodos:

a) METODO DE LA RECTA:
Su construcción se refiere a utilizar a la recta dada.

b) METODO DEL PLANO:
Su construcción se refiere a utilizar al plano formado.

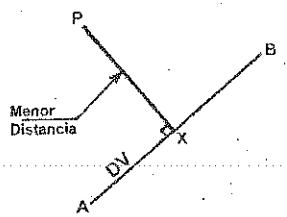


Fig. 7.1 Menor distancia de un punto a una recta.

En la figura 7.2 se muestra las proyecciones principales de un punto P y de la recta AB; se desea determinar la longitud de la distancia más corta del punto P a la recta AB, utilizando los métodos mencionados. P(1,1,7); A(2,4,9), B(5,2,9)

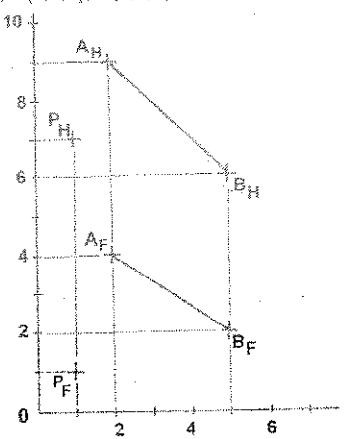


Fig. 7.2 Un punto y una recta.

7.1.1 METODO DE LA RECTA.

Para determinar la distancia más corta, debemos proyectar a la recta AB en dimensión verdadera; en este plano de proyección y desde el punto P trazar la menor distancia perpendicular a la recta AB. Si se proyecta a la recta AB de punta, la menor distancia aparecerá en dimensión verdadera; véase la figura 7.3.

SOLUCIÓN:

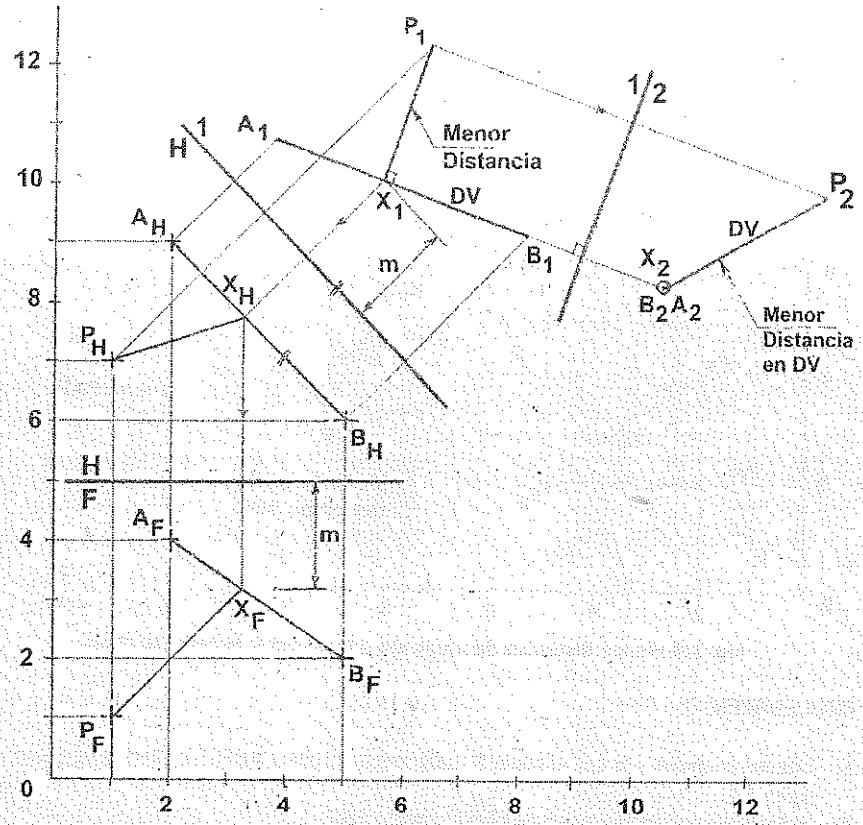


Fig. 7.3 Menor distancia de un punto a una recta: Método de la Recta.

PROCEDIMIENTO:

1) Hallar la dimensión verdadera de la recta AB.
2) En el plano de elevación "1" y desde el punto P, trazar una recta perpendicular a la dimensión verdadera de la recta AB; tal como PX (menor distancia buscada).
3) Proyectar la menor distancia hallada PX a sus planos principales.
4) Para determinar la dimensión verdadera de la menor distancia, proyectar a la recta AB de punta; utilizando el plano de proyección "2" perpendicular a la recta AB.

7.1.2 METODO DEL PLANO

Para determinar la distancia más corta, debemos proyectar en dimensión verdadera el plano formado con el punto P y la recta AB; en este plano de proyección la menor distancia aparece en dimensión verdadera y se obtiene trazando desde el punto P una recta perpendicular a la recta AB; ver la figura 7.4.

SOLUCIÓN:

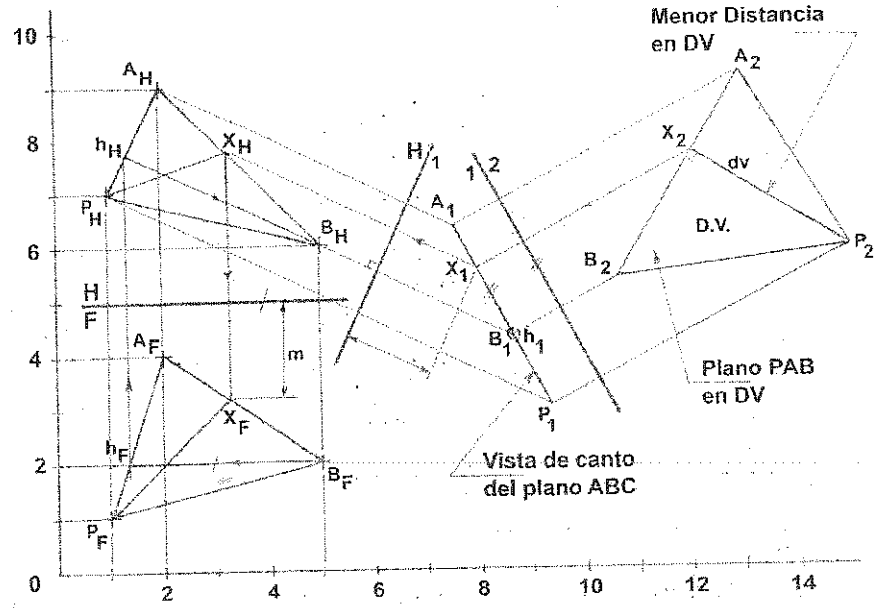


Fig. 7.4 Menor distancia de un punto a una recta: Método del Plano.

PROCEDIMIENTO:

1) Unir los puntos A y B con el punto P, para formar el plano ABP, tal como se observa en la figura 7.4.
2) Hallar la dimensión verdadera del plano formado ABP.
3) En el plano auxiliar "2", trazar una perpendicular a la recta AB desde el punto P; tal como PX (menor distancia).
4) En el plano auxiliar "2", PX es la dimensión verdadera de la distancia más corta desde el punto P a la recta AB; luego proyectar esta menor distancia a sus planos principales.

7.1.3 METODO DEL PLANO, SIN VISTAS AUXILIARES.

Para determinar la distancia más corta de un punto a una recta por el método del plano sin vistas auxiliares, se debe trazar un plano que pase por el punto P y perpendicular a la recta AB. Luego intersectar a la recta AB con el plano formado, siendo X el punto de intersección y PX la menor distancia; ver la figura 7.5.

SOLUCIÓN:

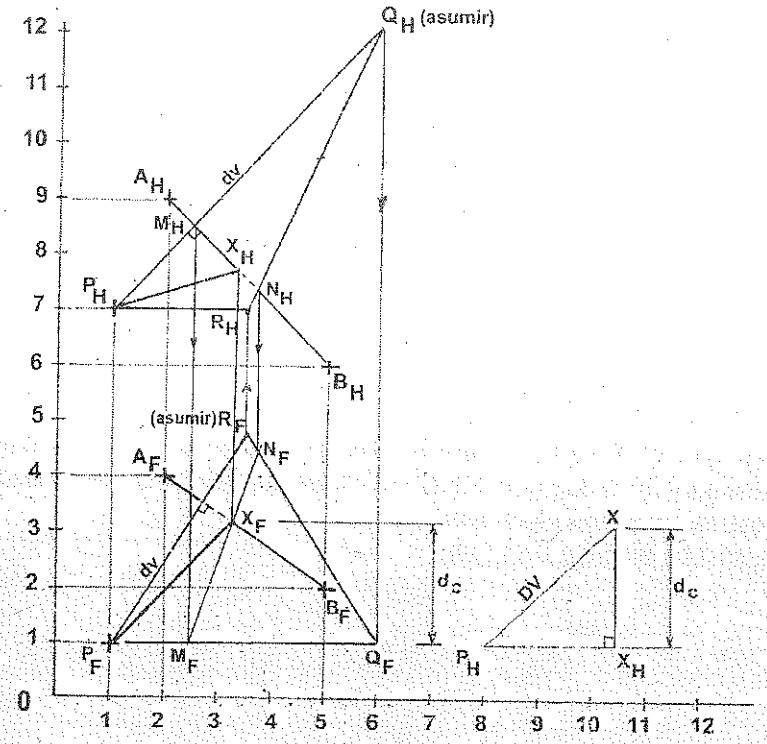


Fig. 7.5 Menor distancia por el Método del Plano, sin vistas auxiliares.

PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto P, trazar la recta PQ (asumir el punto Q), perpendicular a la recta AB. La recta PQ es una recta horizontal.
2) Desde el punto P trazar la recta PR (asumir el punto R), perpendicular a la recta AB. La recta PR es una recta frontal.
3) Formar el plano PQR perpendicular a la recta AB, ver la figura 7.5.
4) Intersección de la recta AB con el plano PQR, siendo X el punto de intersección.
5) Unir los puntos P y X, siendo PX la menor distancia.
6) Para determinar la dimensión verdadera de la menor distancia PX, utilizamos el método de diferencia de cotas.

7.2 MENOR DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.

La menor distancia de un punto a un plano, es la distancia perpendicular trazado desde ese punto al plano. La figura 7.6 muestra un punto P en el espacio desde el cual se ha trazado una recta perpendicular al plano dado ABC; tal como PQ.

Para determinar la mínima distancia PQ y su dimensión verdadera utilizaremos dos métodos:

a) Método de la vista de canto.
b) Método de las rectas Notables.

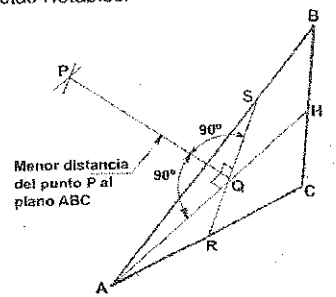


Fig. 7.6 Menor distancia de un punto a un plano.

En la figura 7.7 se dan las proyecciones principales de un punto P y del plano oblicuo ABC; se desea determinar la dimensión verdadera de la distancia mínima PQ del punto P al plano ABC, utilizando los dos métodos mencionados.

P(4,3,11.5); A(1,4,11), B(3,2.5,8), C(5,5.5,10)

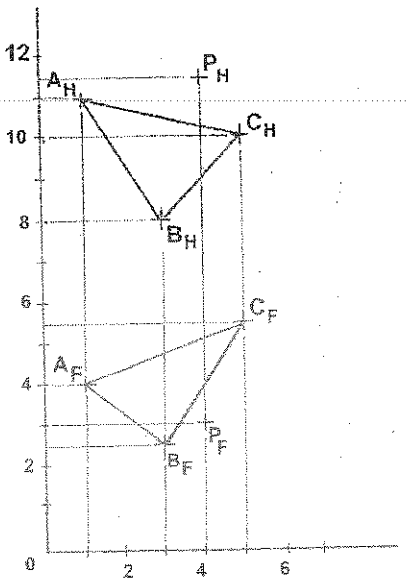


Fig. 7.7 Un punto y un plano.

7.2.1 METODO DE LA VISTA DE CANTO.

Para determinar la menor distancia, debemos proyectar al plano dado de canto, y desde el punto P trazar la distancia más corta perpendicular al plano de filo; véase la figura 7.8.

SOLUCIÓN:

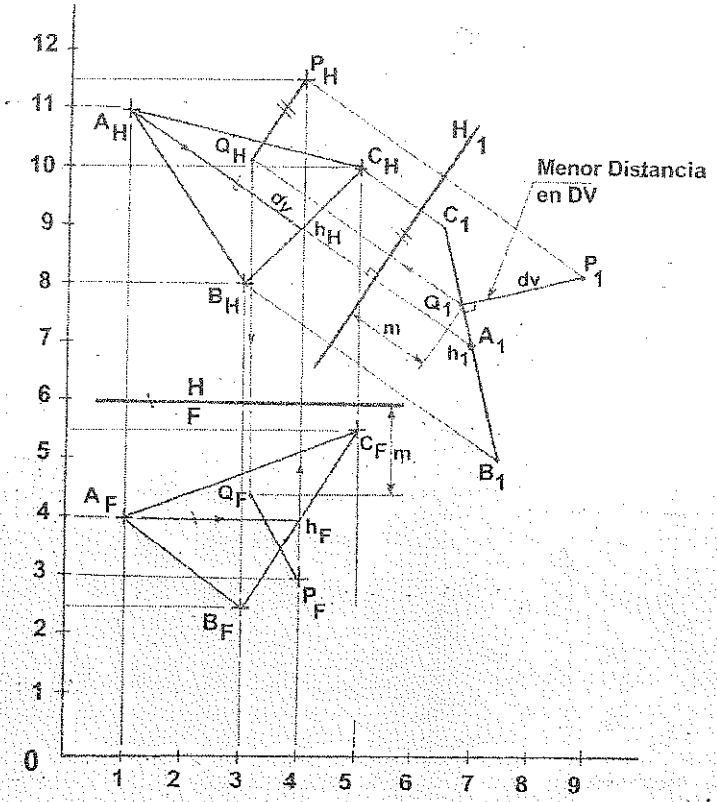


Fig. 7.8 Menor distancia de un punto a un plano.

PROCEDIMIENTO:

1) Proyectar de canto al plano **ABC**, usando la recta horizontal **Ah**, tal como se observa en la figura 7.8.
2) En el plano de elevación **"1"** trazar desde el punto **P** una recta perpendicular a la vista de canto del plano **ABC**; siendo el punto **Q** el pie de la perpendicular.
3) Proyectar el punto **Q** a sus planos principales, y para encontrar este punto en el plano horizontal, la dirección de **PQ** debe ser perpendicular a la recta horizontal contenida en el plano **ABC**.
4) Proyectar de canto al plano **ABC**, usando la recta horizontal **Ah**, tal como se observa en la figura 7.8.
5) En el plano de elevación **"1"** trazar desde el punto **P** una recta perpendicular a la vista de canto del plano **ABC**; siendo el punto **Q** el pie de la perpendicular.
6) Proyectar el punto **Q** a sus planos principales, y para encontrar este punto en el plano horizontal, la dirección de **PQ** debe ser perpendicular a la recta horizontal contenida en el plano **ABC**.

7.2.2 METODO DE LAS RECTAS NOTABLES.

Para determinar la menor distancia, debemos trazar desde el punto P la distancia más corta perpendicular a dos rectas que se cortan y contenidas en el plano **ABC**; ambas rectas proyectadas en dimensión verdadera; tal como se observa en la figura **7.9**.

SOLUCIÓN:

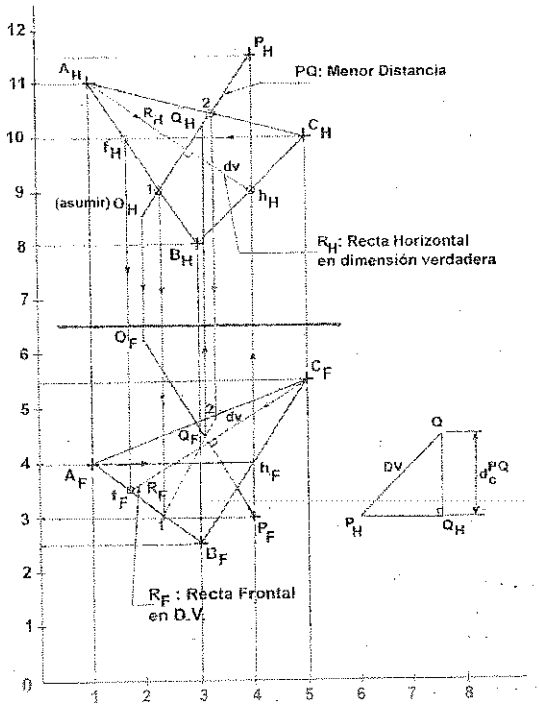


Fig. 7.9 Menor distancia de un punto a un plano: Método de las Rectas ó sin vistas auxiliares.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar las rectas notables horizontal **Ah** y frontal **Cf** en el plano **ABC**, tal como se observa en la figura 7.9.
2) Desde el punto **P** trazar una recta perpendicular a la recta horizontal **Ah**, tal como **PO** (asumir el punto O).
3) En el plano frontal y desde el punto **P** trazar la recta **PO** perpendicular a la recta frontal **Cf**.
4) Hallar el punto de intersección **Q** entre la recta **PO** y el plano **ABC**, trazando un Plano Cortante que pase por la recta **PO**.
5) Mostrar la visibilidad de la intersección. En **H**: cruce de las rectas **PQ** y **AB**, es visible **PQ** porque está encima de **AB**. En **F**: cruce de las rectas **PQ** y **AC**, es visible **AC** porque está delante de **PQ**.
6) La recta **PQ** representa la menor distancia desde el punto **P** al plano **ABC**. Por diferencia de cotas hallamos la dimensión verdadera de **PQ**.

En la figura 7.10 se dan las proyecciones principales de un punto P y del plano oblicuo ABC. P(2,5,13); A(1,4,8), B(4,2,13), C(6.5,6,10). Se desea determinar:

a) La Menor Distancia es Horizontal,
b) La Menor Distancia es con pendiente ascendente de 30°.

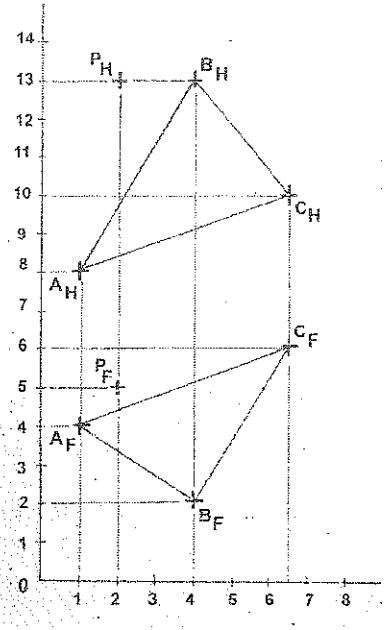


Fig. 7.10 Vistas Principales de un punto y una recta.

7.2.3 MENOR DISTANCIA HORIZONTAL

A) METODO DEL PLANO DE FILO.-

Para determinar la Menor Distancia Horizontal debemos proyectar al plano dado en vista de filo, y desde el punto P trazar una recta paralela al plano horizontal hasta que corte al plano ABC proyectado de filo en el punto Horizontal; ver la figura 7.11.

PROCEDIMIENTO:

1) Hallar la vista de canto del plano ABC, utilizando la recta horizontal Ah; tal como se observa en la figura 7.11.
2) En el plano de elevación "1" trazar desde el punto P una recta paralela al plano horizontal hasta que corte al plano ABC proyectado de filo en el plano H.
3) La menor distancia horizontal PH se proyecta en dimensión verdadera en el plano de elevación "1" y en el plano horizontal; luego proyectar el punto H a sus planos principales.
4) Para determinar el punto H en el plano horizontal, la dirección de PH debe ser perpendicular a la recta horizontal Ah contenida en el plano ABC, y la prolongamos hasta que corte a su línea de referencia trazada desde el plano de elevación.

SOLUCIÓN:

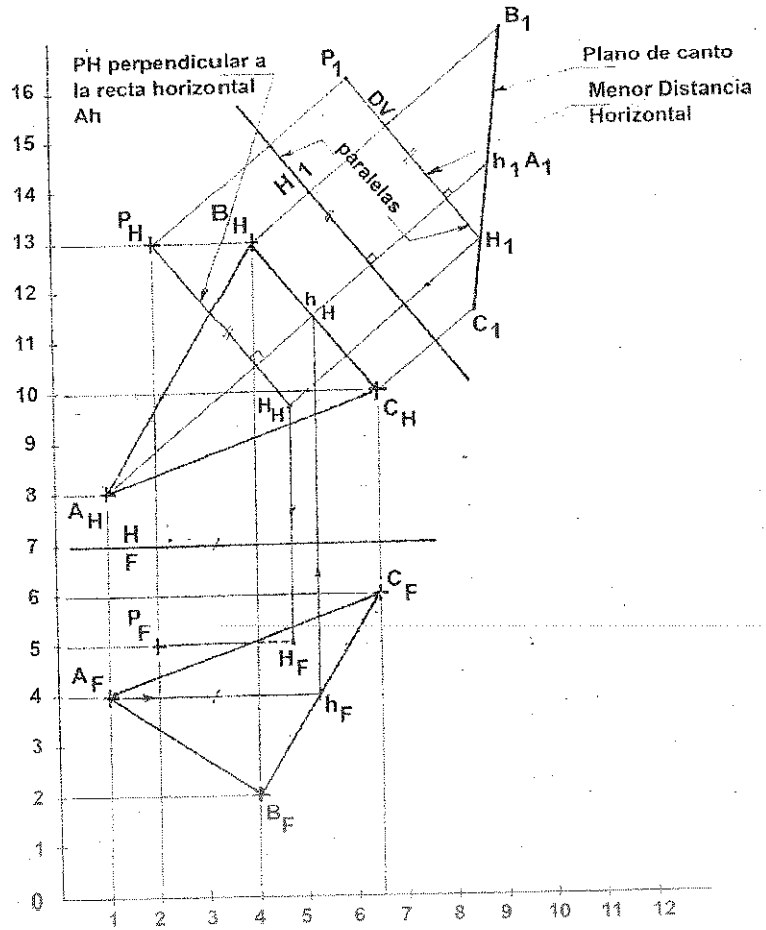


Fig. 7.11 Distancia horizontal de un punto a un Plano. Método del plano de filo.

B) METODO DEL PLANO, SIN VISTAS AUXILIARES.-

Para determinar la menor distancia horizontal sin utilizar vistas auxiliares, trazar desde el punto P una recta horizontal perpendicular al plano **ABC**; tal como **PO**. Luego intersectar el plano **ABC** con la recta horizontal **PO**; siendo **H** el punto de intersección y **PH** la menor distancia horizontal, ver la figura **7.12**.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar las rectas notables horizontal **Ah** y frontal **Cf** en el plano **ABC**; tal como se observa en la figura **7.12**.

2) Desde el punto P trazar una recta perpendicular a la recta horizontal Ah; tal como PO (asumir el punto O)
3) En el plano frontal y desde el punto P trazar la recta horizontal (PO) hasta encontrar el punto O, cuando se intersectan con su línea de referencia trazada desde el plano horizontal.
4) Determinar el punto de intersección H, entre la recta PQ y el plano ABC, trazando un plano cortante que pase por la recta PQ.
5) Mostrar la visibilidad de la intersección. En H: cruce de las rectas PH y AB, es visible PH porque está encima de AB. En F: cruce de las rectas PH y AC, es visible AC porque esta delante de PH.
6) La recta PH representa la menor distancia horizontal desde el punto P al plano ABC.

SOLUCIÓN:

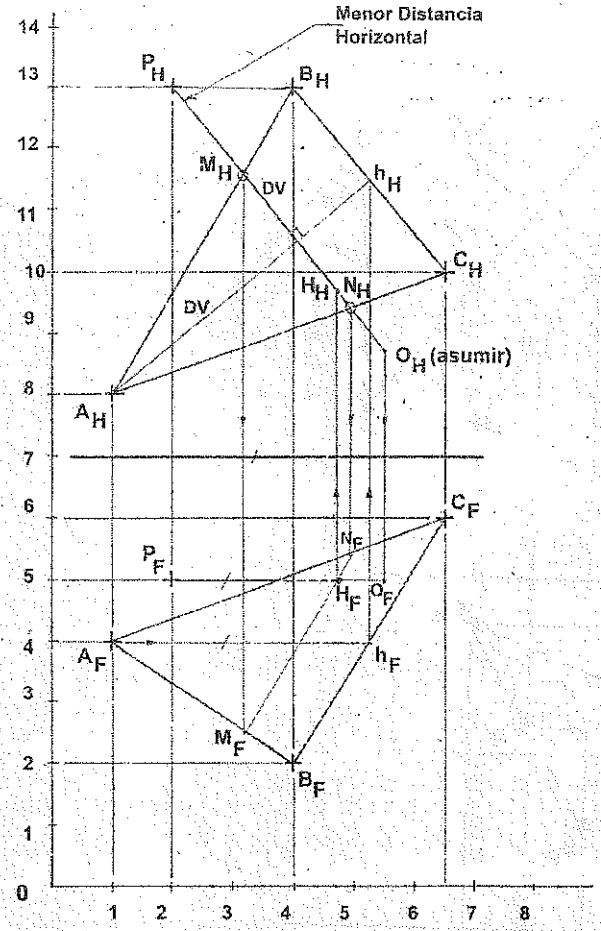


Fig. 7.12 Distancia horizontal de un punto a un Plano. Método del plano sin vistas auxiliares.

7.2.4 MENOR DISTANCIA CON PENDIENTE DADA.

A) METODO DEL PLANO DE FILO.

Para determinar la Menor Distancia con pendiente Dada, debemos proyectar al plano dado en vista de filo y desde el punto P trazar una recta que tenga la inclinación dada con respecto a una recta horizontal trazada desde el punto hasta que corte al plano ABC proyectado de filo en el punto D; ver la figura 7.13:

SOLUCIÓN:

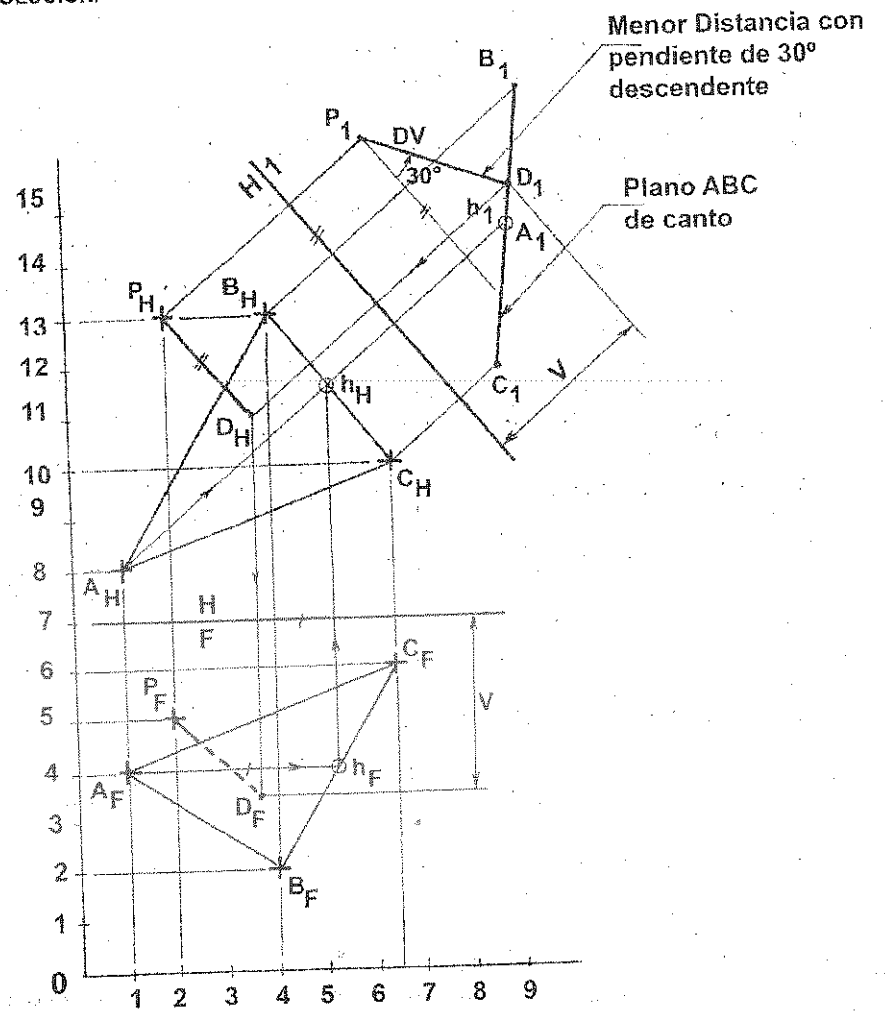


Fig. 7.13 Distancia con pendiente dada de un punto a un Plano. Método del plano de filo.

PROCEDIMIENTO:

1) Proyectar de canto al plano ABC, utilizando la recta horizontal Ah, tal como se observa en la figura 7.13.
2) En el plano de elevación "1" trazar desde el punto P una recta que forme un ángulo de 30° (pendiente descendente), con respecto a otra recta (horizontal) trazada desde el mismo punto, hasta que corte al plano ABC proyectado de filo; en el punto D.
3) La distancia PD con pendiente dada se proyecta en dimensión verdadera en el plano de elevación "1", luego proyectar al punto D a sus planos principales.
4) Para determinar el punto D en el plano horizontal, la dirección de PD debe ser perpendicular a la recta horizontal Ah contenida en el plano ABC o paralela al plano de elevación "1"; y la prolongamos hasta que corte a su línea de referencia trazada desde el plano de elevación.

B) METODO DEL PLANO, SIN VISTAS AUXILIARES.

Para determinar la menor distancia con una inclinación dada sin utilizar vistas auxiliares, trazar desde el punto P una recta perpendicular al plano ABC; tal como PO. Intersectar el plano ABC con la recta PO, siendo D el punto de intersección y PD la menor distancia con pendiente dada; ver la figura 7.14.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazar las rectas notables horizontal Ah y frontal Cf en la plano ABC, tal como se observa en la figura 7.14.
2) Desde el punto P trazar una recta perpendicular a la recta horizontal Ah, tal como PO (asumir el punto O).
3) Determinar entre los puntos P y O la diferencia de altura "d_c" utilizando el método de diferencia de cotas.
4) En el plano frontal y desde el punto P trazar por debajo de él la diferencia de cota "d_c", determinándose una recta (L.g. de O) que al intersecarse con la línea de referencia trazada desde el plano horizontal localiza la proyección frontal del punto O. Unir los puntos P y O.
5) Hallar el punto de intersección D entre la recta PO y el plano ABC, trazando un plano cortante que pase por la recta PO.
6) Mostrar la visibilidad de la intersección. En H: cruce de las rectas PD y AB, es visible PD porque está encima de AB.
7) En F; Cruce de las rectas PD y AC, es visible AC porque está delante de PD.
8) La recta PD representa la menor distancia con pendiente descendente de 30° desde el punto P al plano ABC.
9) La dimensión verdadera de la menor distancia PD la determinamos, utilizando el diagrama de diferencia de cotas; tal como se observa en la figura 7.15.

SOLUCIÓN:

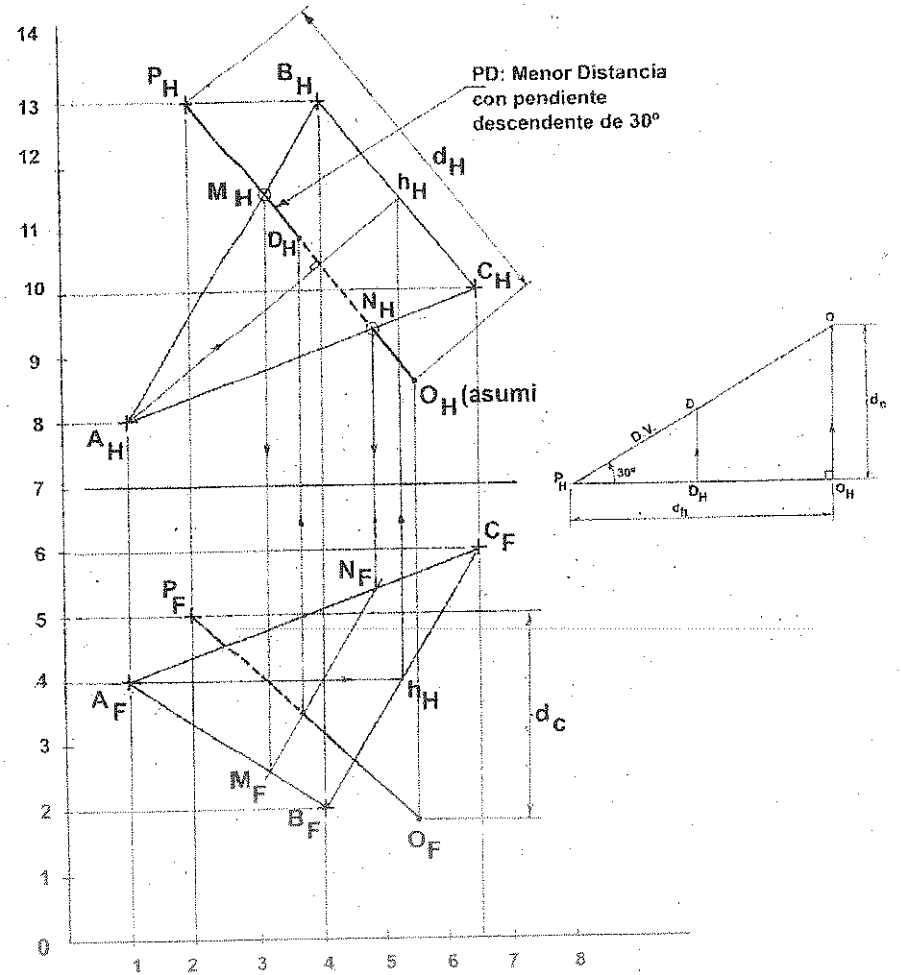


Fig. 7.14 Distancia con pendiente dada de un punto a un Plano.
Método del plano sin vistas auxiliares.

7.3 MENOR DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

La menor distancia entre dos rectas que se cruzan es el segmento perpendicular a cada una de las rectas dadas. Para determinar dicha distancia tenemos dos métodos:

a) Método de la recta.
b) Método del plano.

7.3.1 METODO DE LA RECTA.

La distancia solicitada tiene que ser perpendicular a ambas rectas, si una de ellas se representa en su dimensión verdadera y luego ésta en un punto.

Dos rectas que se cruzan **AB** y **CD** se dan en la vista horizontal y frontal, tal como se observa en la figura **7.16**; se desea encontrar la menor distancia entre estas rectas.

SOLUCIÓN:

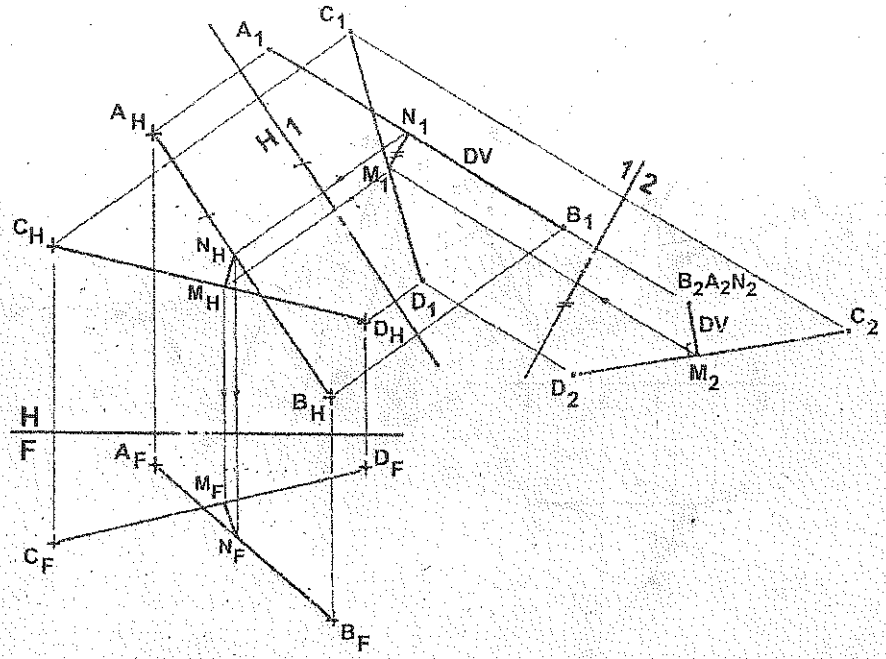


Fig. 7.16 Menor Distancia entre dos rectas que se cruzan.

PROCEDIMIENTO:

1) Determinamos una vista auxiliar en donde una de las rectas dadas, se proyecte una punta y la otra en una posición arbitraria.
2) En la vista auxiliar "**2**" trazamos una recta perpendicular, desde la recta **AB** proyectada de punta a la otra recta dada; ésta recta será la dimensión verdadera de la menor distancia pedida, la que completamos en las demás vistas.
3) En el plano de elevación "**1**" la recta **MN** (menor distancia) debe ser paralela a la línea de referencia "**12**"; para que la recta **MN** se proyecte en dimensión verdadera en la vista "**2**".

7.3.2 METODO DEL PLANO.

Se pasa un plano por una de las rectas y que sea paralelo a la otra recta dada, la distancia más corta entre las dos rectas que se cruzan, será la distancia perpendicular que hay entre la recta y el plano paralelo.

En la figura **7.17** se dan las vistas horizontal y frontal de dos rectas que se cruzan; se desea encontrar la distancia más corta que una las rectas dadas **AB** y **CD**.

SOLUCIÓN:

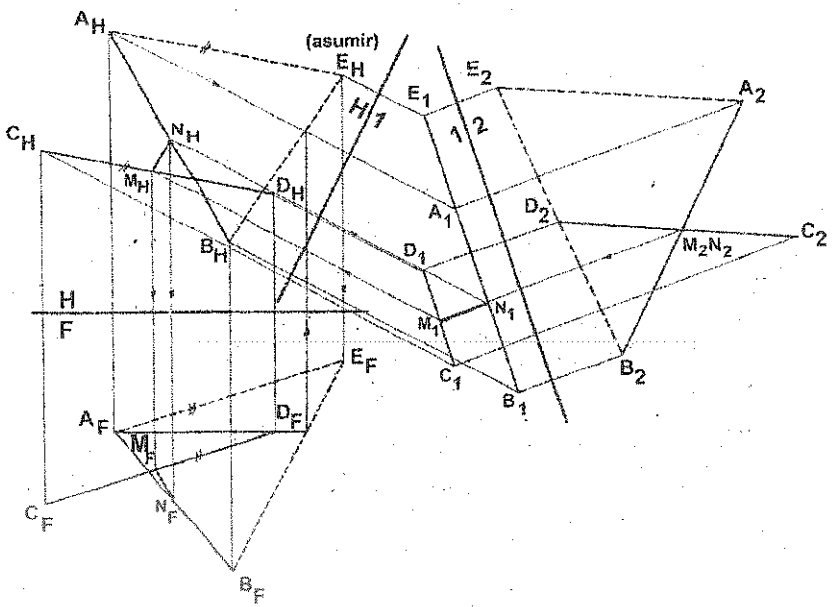


Fig. 7.17 Menor Distancia entre dos rectas que se cruzan.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazamos un plano que contenga una de las rectas (AB) y sea paralela a la otra (CD).
2) Proyectamos el plano formado, de canto y luego en su dimensión verdadera.
3) En la vista auxiliar "2" la distancia pedida aparecerá proyectada de punta, en el punto de cruce de las rectas dadas, con lo que tenemos su ubicación exacta, la que completamos en sus planos principales.

NOTA: Obsérvese que en la vista horizontal la recta XY será paralela a la línea de pliegue H – 1, debido a que la dimensión verdadera de XY se muestra en la vista de elevación "1".

7.4 MENOR DISTANCIA HORIZONTAL ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

La distancia horizontal más corta entre dos rectas que se cruzan aparecerá en su dimensión verdadera, cuando el plano que contiene a una de las rectas dadas y que es paralelo a la otra recta dada, se proyecte de filo.

En la figura 7.18 se dan las vistas horizontal y frontal de dos rectas que se cruzan; se desea encontrar la recta horizontal más corta que una las rectas dadas AB y CD.

7.4.1 METODO DEL PLANO.

SOLUCIÓN:

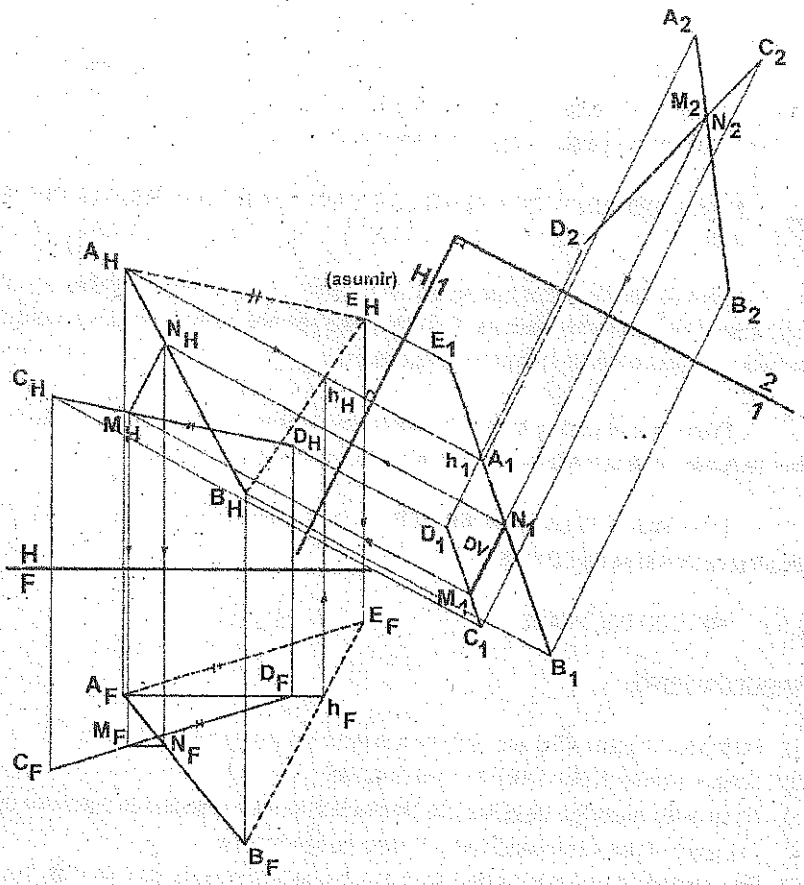


Fig. 7.18 Distancia horizontal más corta entre dos rectas que se cruzan.

PROCEDIMIENTO:

1) Se traza el plano ABE de modo que contenga a la recta AB, la cual es paralela a la recta CD.
2) Proyectamos la vista de elevación donde el plano formado ABE se proyecte de canto y la recta CD paralela a él.
3) La distancia horizontal más corta, es la distancia horizontal entre el plano de canto y la recta paralela, esta distancia horizontal es paralela a H – 1;
4) El plano 1 – 2 nos determina la localización exacta de la recta horizontal de punta en el punto de cruce de AB y CD, al que denominamos como Xh.
5) Proyectar la proyección de punta Xh, a los planos de proyección utilizados.

NOTA:
No se puede utilizar el método de la recta, porque en este método la vista que muestra la recta pedida en su dimensión verdadera, muestra también una recta inclinada de punta y por tanto esa vista no puede ser una vista de elevación.

7.5 MENOR DISTANCIA CON PENDIENTE DADA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Si por una de las rectas que se cruzan hacemos pasar un plano paralelo a la otra recta, establecerá todas las rectas mínimas. Y si este plano aparece de filo la recta más corta tiene que ser la que se represente en su dimensión verdadera.

Puesto que el plano y la recta aparecen paralelos en una vista de elevación, la recta pedida se puede trazar con el ángulo de pendiente determinada.

En la figura 7.19 las rectas AB y CD se cruzan, determinar la menor distancia con pendiente α descendente de CD a AB.

7.5.1 METODO DEL PLANO.

PROCEDIMIENTO:

1) Formamos un plano ABE que contiene a la recta AB y es paralela a la recta CD.
2) Luego proyectar al plano ABE en vista de canto.
3) En un punto cualquiera de la línea de pliegue H/1, se mide el ángulo de pendiente α.
4) Trazamos el plano 2 perpendicular a la recta de pendiente α.
5) En este plano de proyección (H-2) la distancia que buscamos la encontramos en el cruce de las rectas AB y CD.
6) Luego proyectamos la recta XY a todas las proyecciones, su dimensión verdadera se encuentra en el plano 1.

SOLUCIÓN:

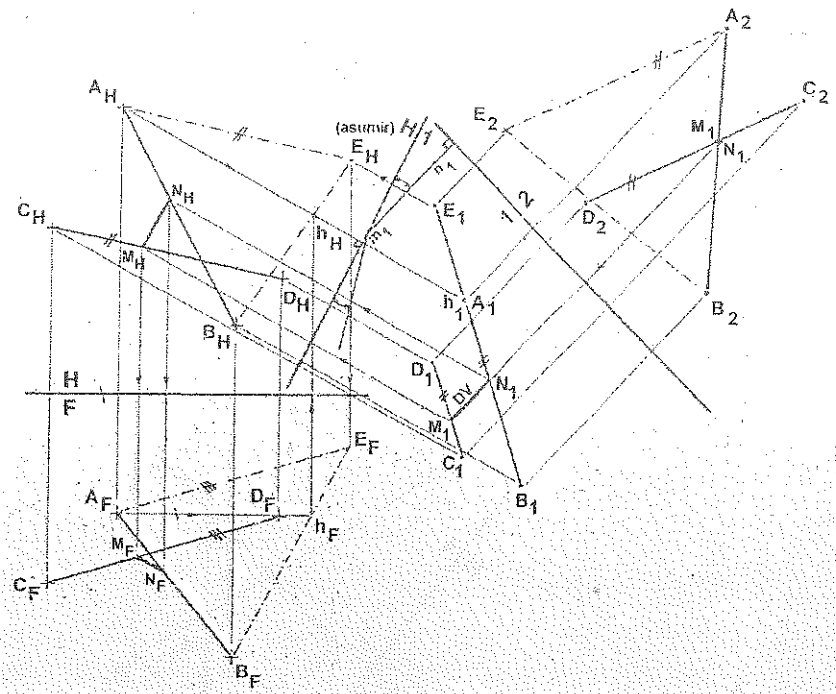


Fig. 7.19 Menor Distancia horizontal con pendiente dada entre dos rectas que se cruzan.

7.6 DISTANCIA PARALELA A UNA DIRECCIÓN DADA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Si se tiene dos rectas que se cruzan y se tiene una tercera recta con dirección dada, solo existe una recta paralela y que tiene la misma dirección de la tercera recta.

7.6.1 METODO DE LA RECTA.

En la figura 7.20 se dan las proyecciones horizontal y frontal de las rectas que se cruzan **AB** y **CD**, y de la recta **MN** con una dirección dada; se desea hallar la distancia entre ellas y que sea paralela a **MN**.

PROCEDIMIENTO:

1) Hallar la vista de punta de la recta **MN**.
2) En el plano **2** se proyecta de punta la recta **MN** con dirección dada, en este plano de proyección la distancia buscada la encontramos en el cruce de las rectas **AB** y **CD**.
3) Luego proyectamos la recta **XY** paralela a una dirección dada en todas las proyecciones; su dimensión verdadera se encuentra en el plano **1**.

SOLUCIÓN:

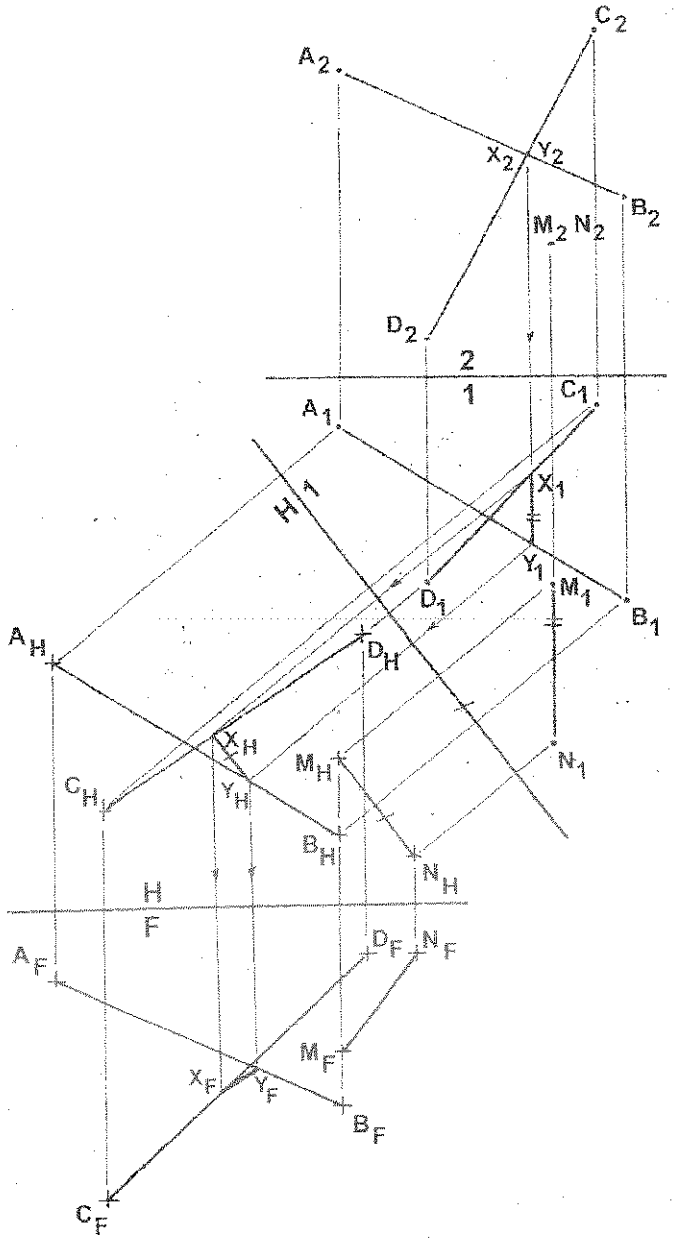


Fig. 7.20 Distancia paralela a una dirección dada entre dos rectas que se cruzan.

7.6.2 METODO DEL PLANO.

Para determinar la distancia paralela a una dirección dada entre dos que se cruzan por el método del plano, debemos trazar un plano que contenga a una de las rectas dadas y que sea paralela a la dirección dada; la mínima distancia la encontraremos en la recta que parte desde el punto de intersección entre el plano formado y la otra recta dada, hasta encontrar a la otra recta dada (por esta recta pasa el plano formado) y paralela a la dirección.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazamos un plano que contenga a la recta AB y que sea paralelo a la dirección MN, tal como se observa en la figura 7.21.
2) Desde el extremo B se traza la recta BE (asumir el punto E) que sea paralela a la dirección de la recta MN, para formar el plano ABE.
3) Determinar el punto de intersección X entre la recta CD y el plano ABE.
4) Trazar un plano cortante que contenga a la recta CD y que corte al plano ABE, en las aristas a AB y BE, y en los puntos "1" y "2" respectivamente; proyectando estos puntos al plano frontal y que al unirlos cortan a la recta CD en X.
5) Desde el punto de intersección X contenida en la recta CD, trazamos la recta XY paralela a la dirección MN, hasta cortar al a recta AB en el punto Y.
6) La recta XY es la distancia mínima y paralela a la dirección MN.
7) La Visibilidad de la intersección de la recta CD con el plano ABE la encontramos de la siguiente manera:
   En H: cruce de las rectas AB y CD, siendo AB visible porque en el plano frontal AB está encima y CD por debajo de dicha recta.
   En F: Cruce de las rectas AE y CD, siendo CD visible hasta el punto de intersección, porque en el plano horizontal CD está delante y AB por detrás de dicha recta.

SOLUCIÓN:

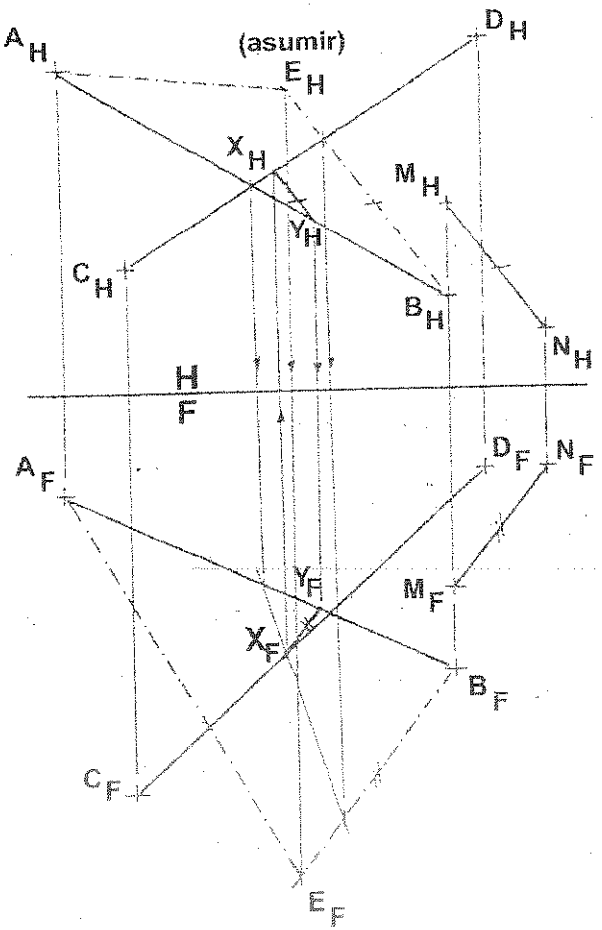
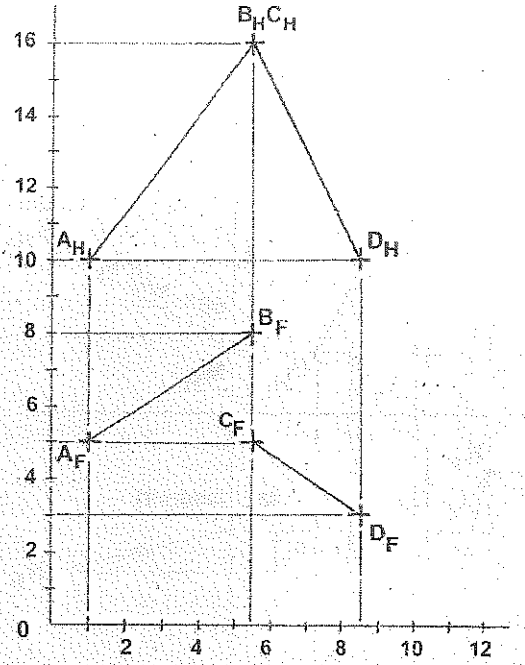


Fig. 7.21 Distancia paralela a una dirección dada entre dos rectas que se cruzan.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 7.1: Se dan los ejes rectilíneos AB y CD de dos túneles de carbón. Se trata de conectarlos por medio de un tercer túnel que tenga una dirección N60°E y una pendiente descendente de 20%. Resolver sin utilizar vistas auxiliares. ESCALA: 1:1.
A(1,5,10), B(5.5,8,16); C(5.5,5,16), D(8.5,3,10)

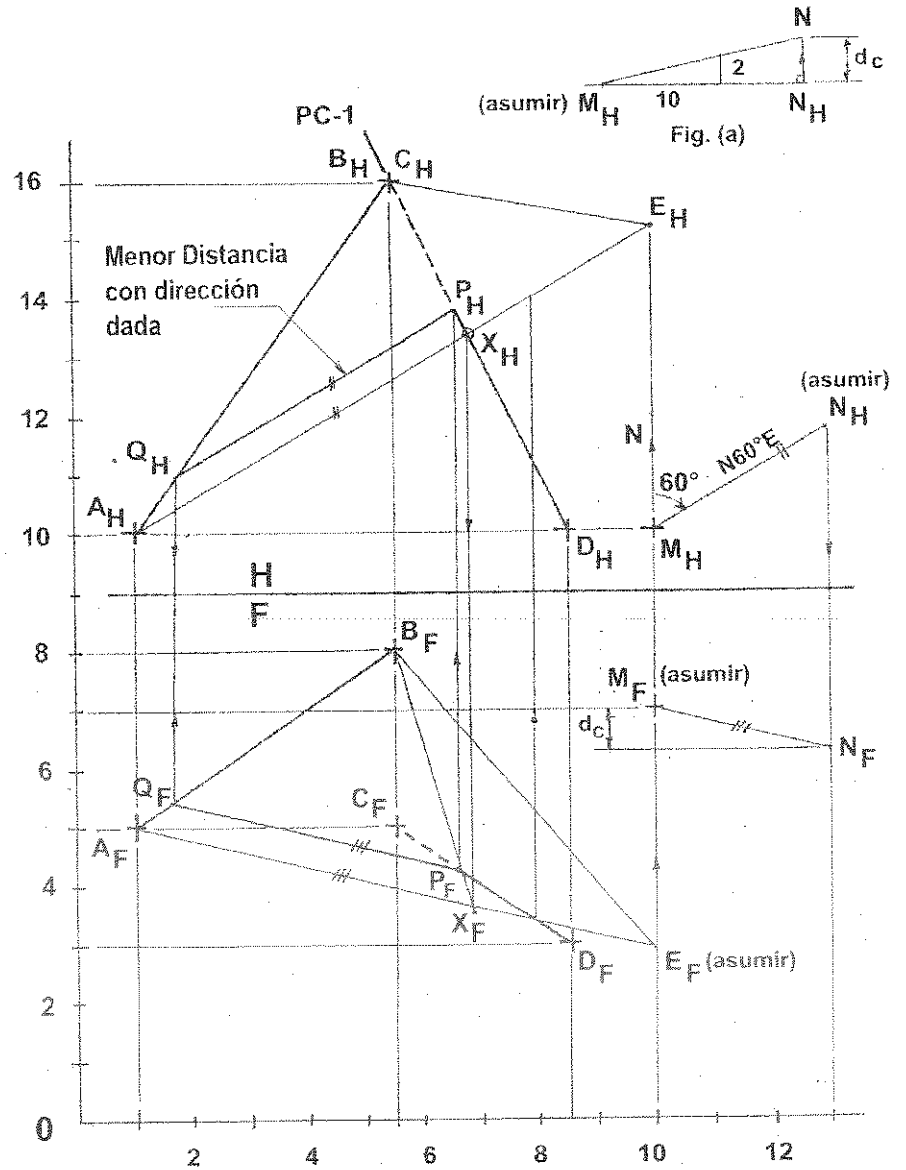
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

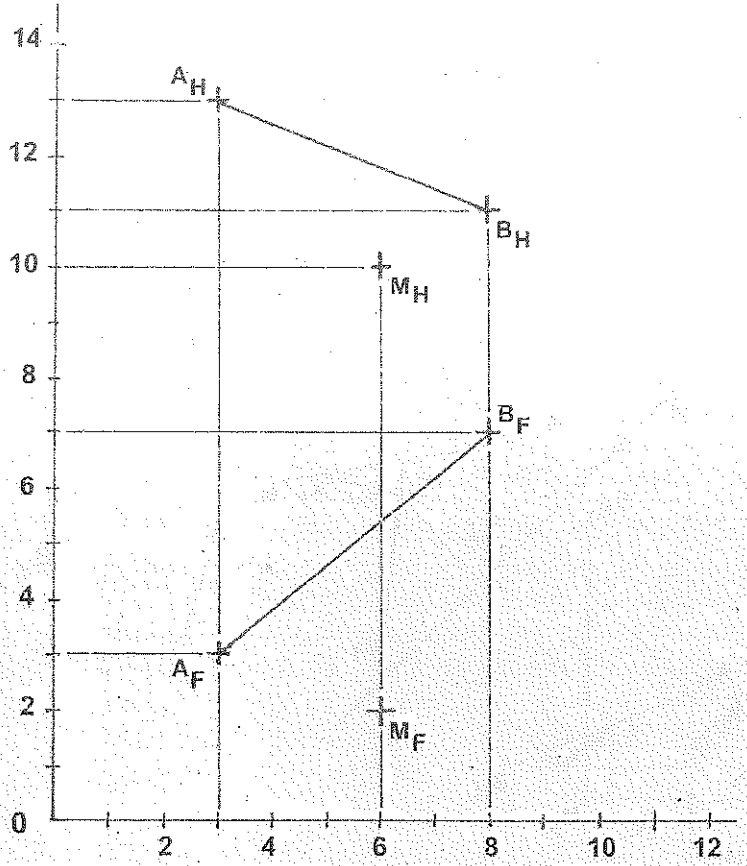
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas, y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Construir la recta **MN** con dirección **N60°E** y pendiente descendente del **20%**, utilizando el Método de Diferencia de Cotas. (Figura "a").
3) Trazar el plano **ABE** que contenga a la recta **AB** y que sea paralela a la dirección **MN**. Desde el extremo **A** se traza la recta **AE** (asumir el punto **E**), que sea paralela a la recta **MN**, para formar el plano **ABE**.
4) Determinar el punto de intersección **P** entre la recta **CD** y el plano **ABE**, utilizando el Plano Cortante **PC-I**.
5) Desde el punto de intersección "P" contenida en la recta **CD**, trazamos la recta **PQ** (distancia con dirección dada) paralela a la recta **AE**, hasta cortar a la recta **AB** en el punto "**Q**".
6) La recta **PQ** es la distancia buscada, paralela a la dirección dada "**MN**".

SOLUCIÓN 7.1:



PROBLEMA 7.2: Se da una recta **AB** y un punto exterior **M**. Trazar por el punto **M** una recta de perfil y perpendicular a la recta **AB**; luego unir las dos rectas por una tercera recta, de dirección **N43°O** y de pendiente descendente de **60°**.
A(3,3,13), B(8,7,11); M(6,2,10).

DATOS DEL PROBLEMA:



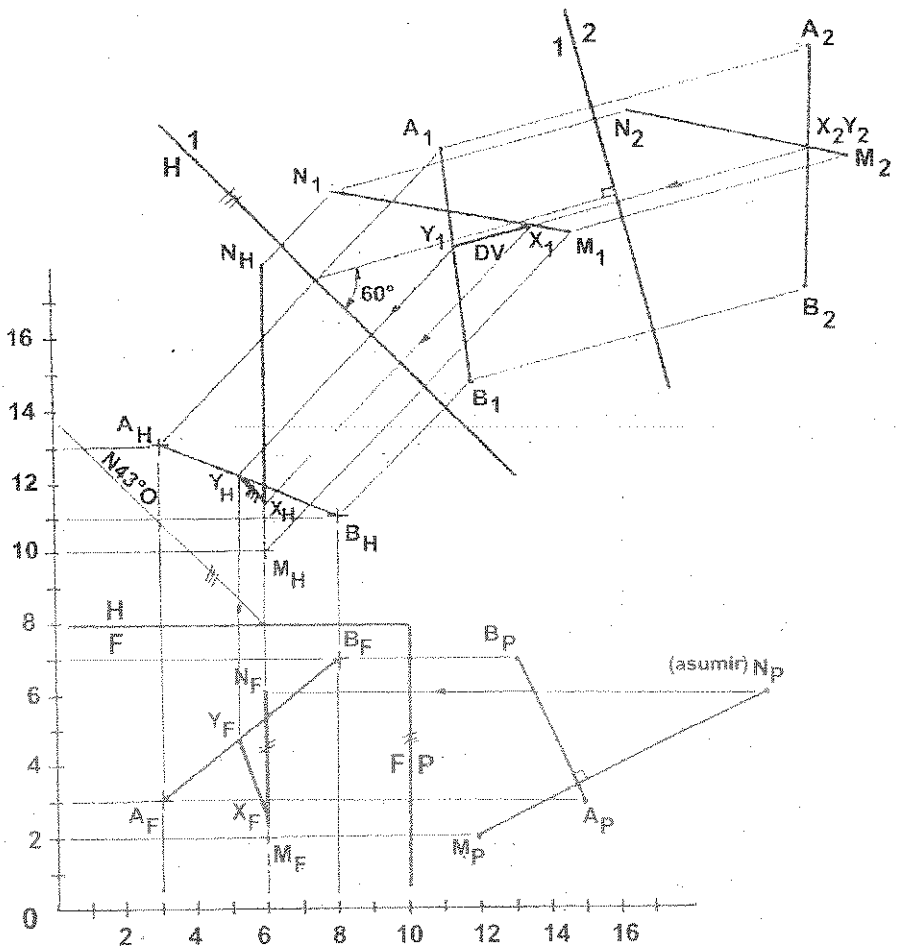
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas y unir los untos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Hallar la dimensión verdadera de la recta de perfil que parte del punto **M**, utilizando el Plano de Perfil;
3) En el plano de perfil la recta que parte del punto **M** y perpendicular a la recta **AB**, tal como **MN** (asumir del unto **N**).
4) Trazar la orientación **N54°O**, asumir un punto cualquiera en el plano horizontal,
5) Luego trazar el plano de elevación "1" paralelo a la orientación trazada, luego proyectar a este plano de proyección las rectas **AB** y **MN**.
6) Trazar en el plano de elevación "1" la pendiente descendente de **60°** en un punto cualquiera de este plano de proyección.
7) Trazar el plano auxiliar "2" perpendicular a la recta de pendiente descendente de **60°**.

8) En este plano de proyección las rectas **AB** y **MN** se cruzan, siendo el punto de cruce la recta **XY** la que proyectamos a todos los planos de proyección utilizados.

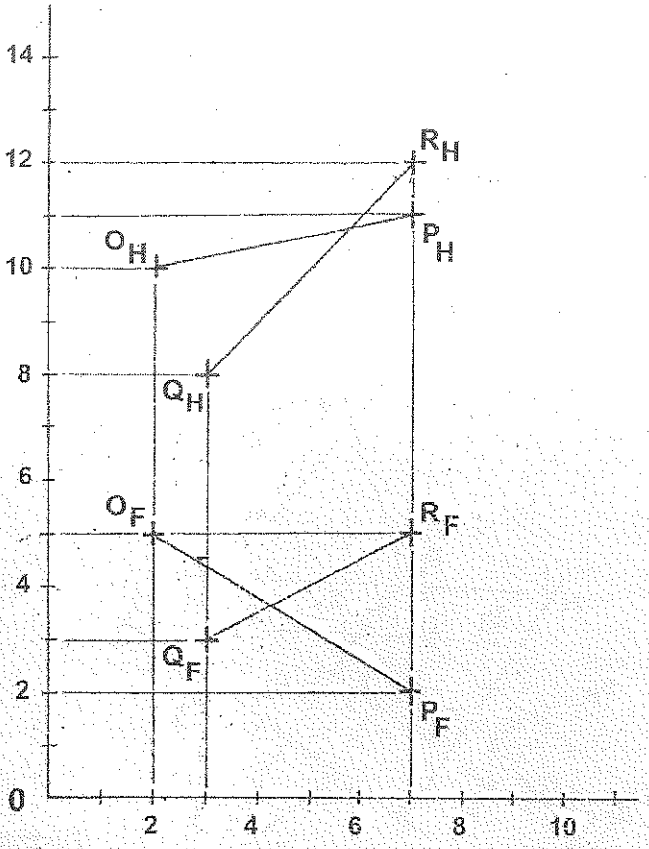
9) La recta **XY** es la tercera recta que une a las rectas **AB** y **MN**, que tiene la dirección **N43°O** y de pendiente descendente de **60°**; su dimensión verdadera se muestra en el plano de elevación "1".

SOLUCIÓN 7.2:



PROBLEMA 7.3: Hallar la perpendicular común y la menor distancia horizontal entre las rectas OP y QR.
O(2,5,10), P(7,2,11); Q(3,3,8), R(7,5,12).

DATOS DEL PROBLEMA:



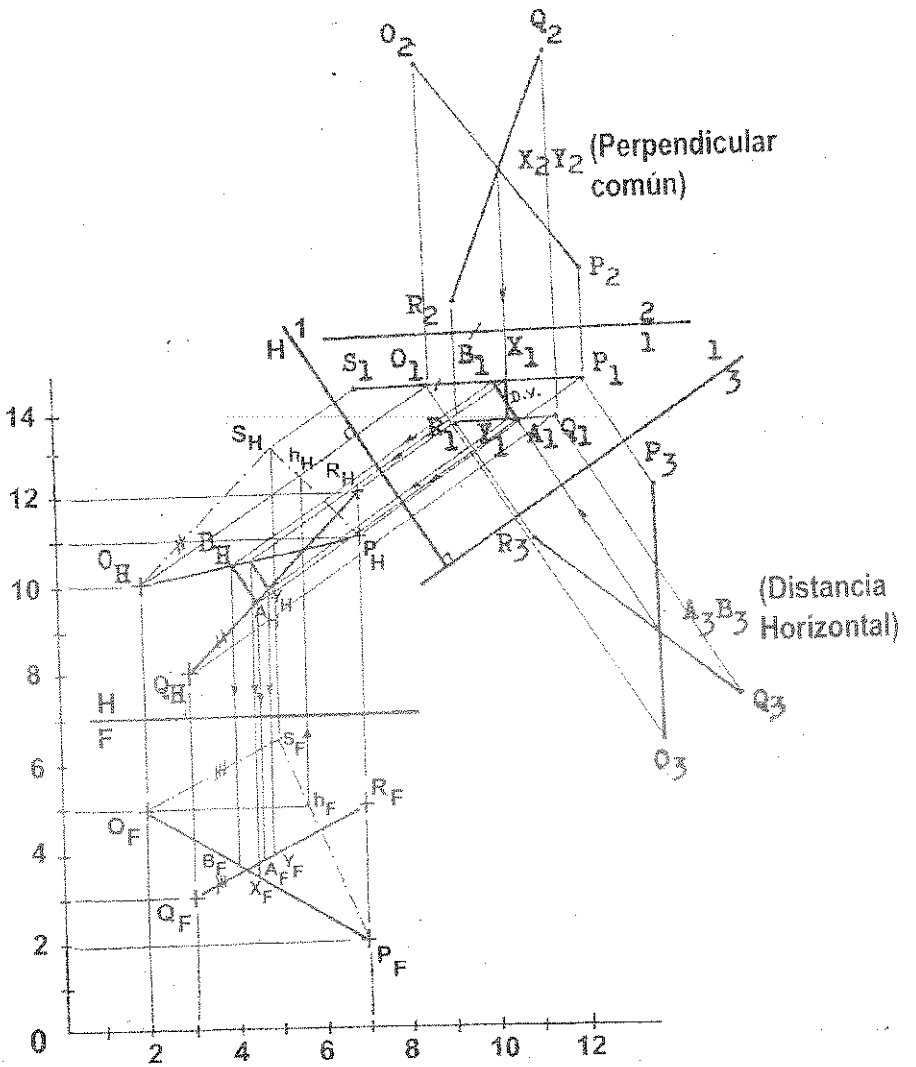
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas, y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Trazar un plano que contenga a la recta OP y sea paralela a la recta QR. Desde el extremo O de la recta OP trazamos la recta OS (asumir el punto S) paralela a la recta QR, formándose el plano paralelo a la recta QR, tal como OPS.
3) Hallar la vista de canto del plano formado OPS, utilizando el plano de elevación "1" perpendicular a la recta horizontal Oh contenida en este plano.
4) En el plano de elevación "1" la vista de canto del plano OPS se proyecta paralelo a la recta QR.
5) Para determinar la perpendicular común XY hallamos la dimensión verdadera del plano OPS, utilizando el plano auxiliar "2" paralela a la vista de canto.
6) En este plano de proyección las rectas OP y QR se cruzan, siendo el punto de cruce la recta XY, la que proyectamos a los planos utilizados.

7) Para determinar la menor distancia horizontal AB, trazamos el plano auxiliar "3" perpendicular al plano horizontal; en este plano de proyección las rectas OP y QR se cruzan, siendo este punto de cruce, la proyección de punta de la recta AB, la que proyectamos a todos los planos utilizados.

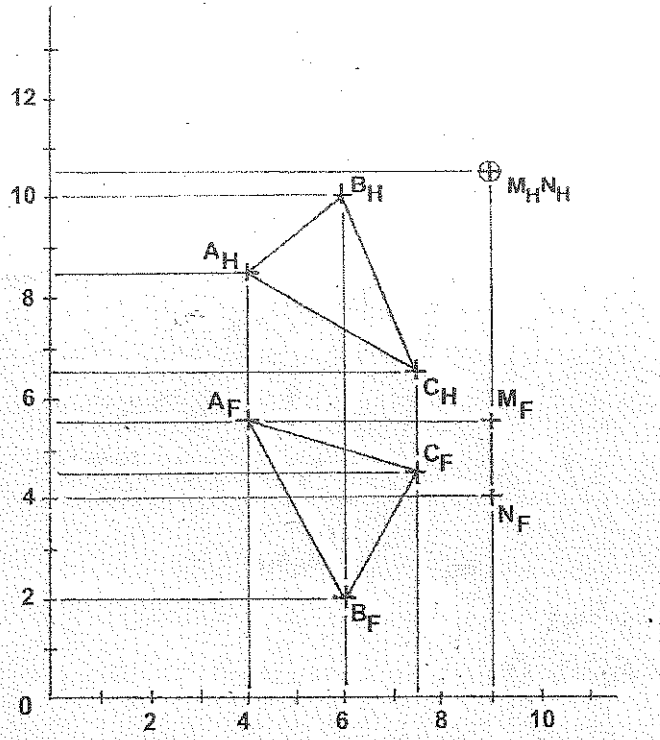
8) La perpendicular común y la menor distancia horizontal son las rectas XY y AB respectivamente, proyectándose ambas rectas en dimensión verdadera en el plano de elevación "1".

SOLUCIÓN 7.3:



PROBLEMA 7.4: Desde el punto R (que usted asumirá) del plano ABC, se desea tener un cable rectilíneo situado en dicho plano y que pase a una distancia de 4.5 metros del extremo superior del poste MN.
A(4,5.5,8.5), B(6,2,10), C(7.4,4.5,6.5); M(9,5.5,10.5), N(9,4,10.5); ESCALA 1:100

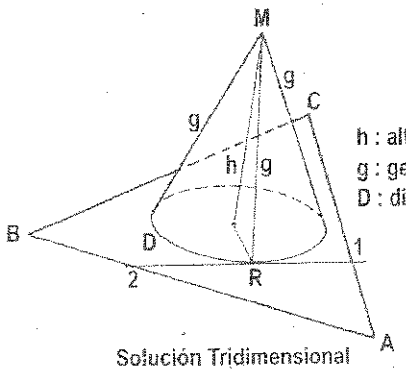
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

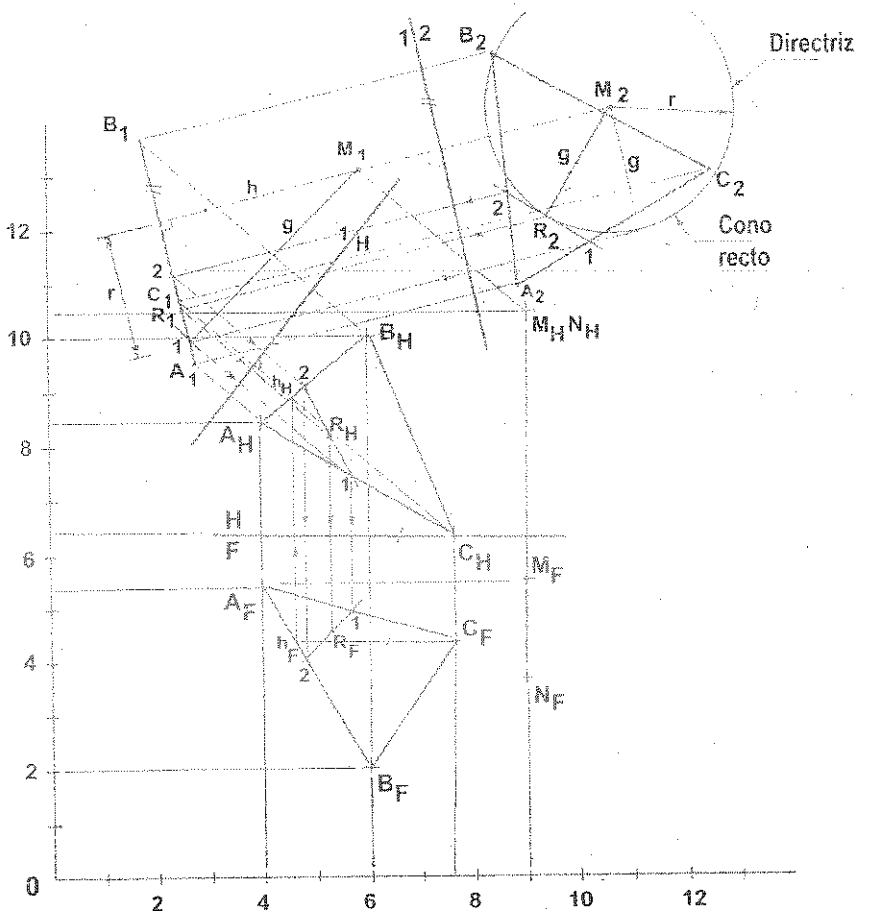
1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Hallar la vista de canto del plano **ABC**, utilizando el plano de elevación "1" perpendicular a la recta horizontal **Ch**.
3) Hallar la dimensión verdadera del plano **ABC**, utilizando el plano auxiliar "2" paralela a la vista de canto del plano **ABC**.
4) En el plano de elevación "1" y desde el punto **M** trazamos la altura **h** y la generatriz **g** igual a 4.5 metros, de un cono recto cuya base esta de canto y contenida en el plano **ABC**.
5) En el plano auxiliar "2" y des del punto **M** (proyección de punta de la altura del cono), trazamos la directriz de la base del cono de radio "r" obtenida en el plano de elevación"1".
6) En el plano auxiliar "2" y desde el punto **R** (asumir) contenida en del plano **ABC**, trazar una recta cualquier tangente a la directriz del cono; la cual dista 4.5 metros del extremo **M**.

SOLUCIÓN 7.4:



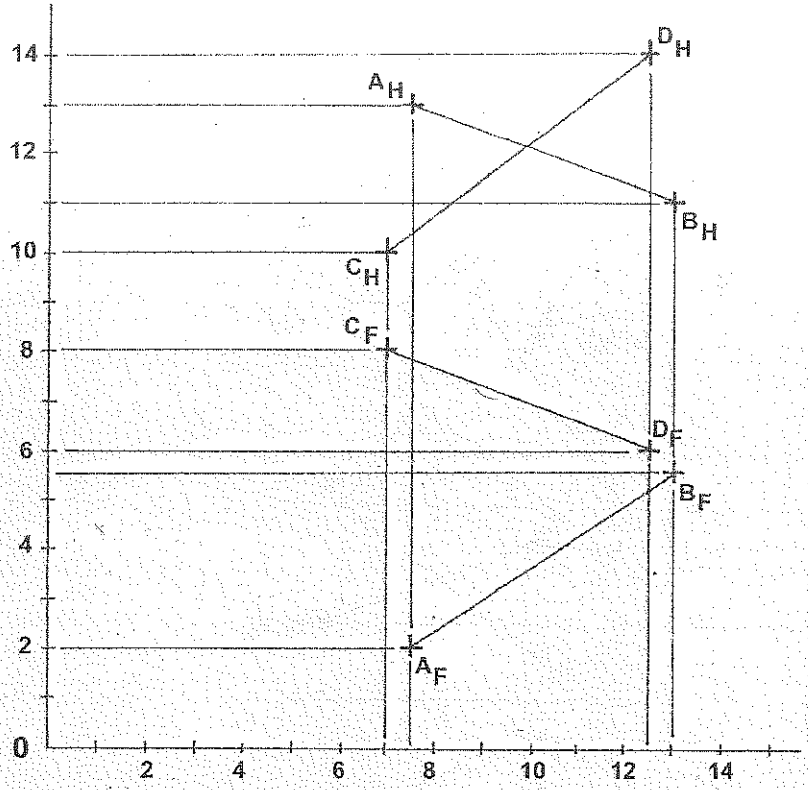
h : altura del cono
g : generatriz (4.5 mts)
D : directriz

Solución Tridimensional



PROBLEMA 7.5: La luz libre entre los dos cables de alta tensión mostrados, debe ser mantenida a 1.8 metros. Si la actual mínima distancia es insuficiente, el punto B de la línea AB debe desplazarse verticalmente hasta lograr la separación mínima requerida (la longitud de AB variará). Mostrar la nueva posición del punto B en todas las proyecciones utilizadas. Escala 1:50.
A(7.5,2,13), B(13,5.5,11); C(7,8,10), D(12.5,6,14)

DATOS DEL PROBLEMA:

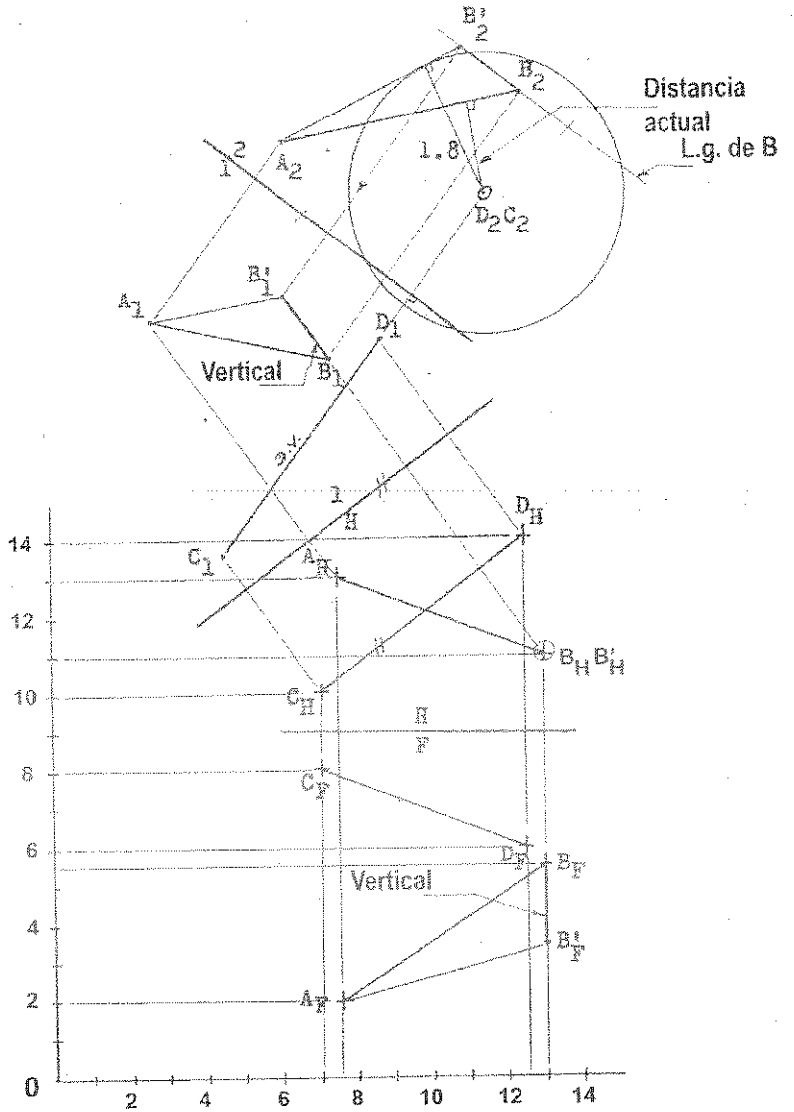


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Hallar la proyección de punta de la recta CD, utilizando el plano de elevación "1" paralela a la recta CD; y el plano auxiliar "2" perpendicular a la dimensión verdadera de la recta CD.
3) En el plano auxiliar "2" y con centro en CD, trazamos una circunferencia de 1.8 metros de radio.
4) Luego desde el punto A trazamos una recta tangente a la circunferencia hallada y la prolongamos hasta que corte al lugar geométrico del punto B (paralela al plano "1") determinándose el punto "B", que la proyectamos a los planos utilizados.

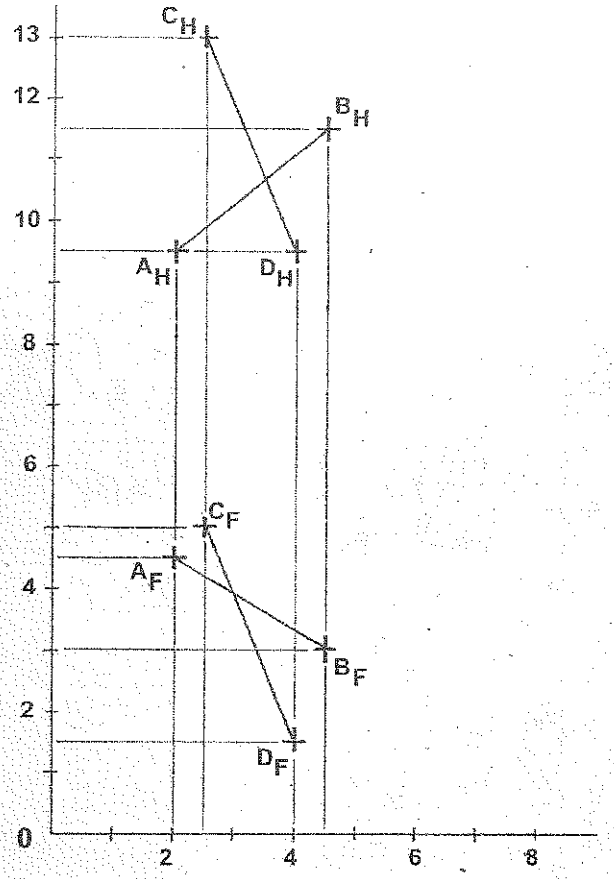
5) En el plano de elevación "1" la recta **BB'** debe estar en dimensión verdadera y perpendicular al plano horizontal; en el plano horizontal y frontal se proyecta de punta y en dimensión verdadera respectivamente.
6) En el plano auxiliar "2" la perpendicular trazada desde **CD** hacia la recta **AB**, representa la actual distancia.

SOLUCIÓN 7.5:



PROBLEMA 7.6: Desplazar el punto D paralelamente a una recta de orientación N35°E y de pendiente ascendente del 50%, hasta D', de tal manera que la minima distancia entre las rectas AB y CD' sea de 2.5 centímetros. Hallar las proyecciones principales del punto D'.
ESCALA: 1:1 A(2,4.5,9.5), B(4.5,3,11.5); C(2.5,5,13), D(4,1.5,9.5)

DATOS DEL PROBLEMA:

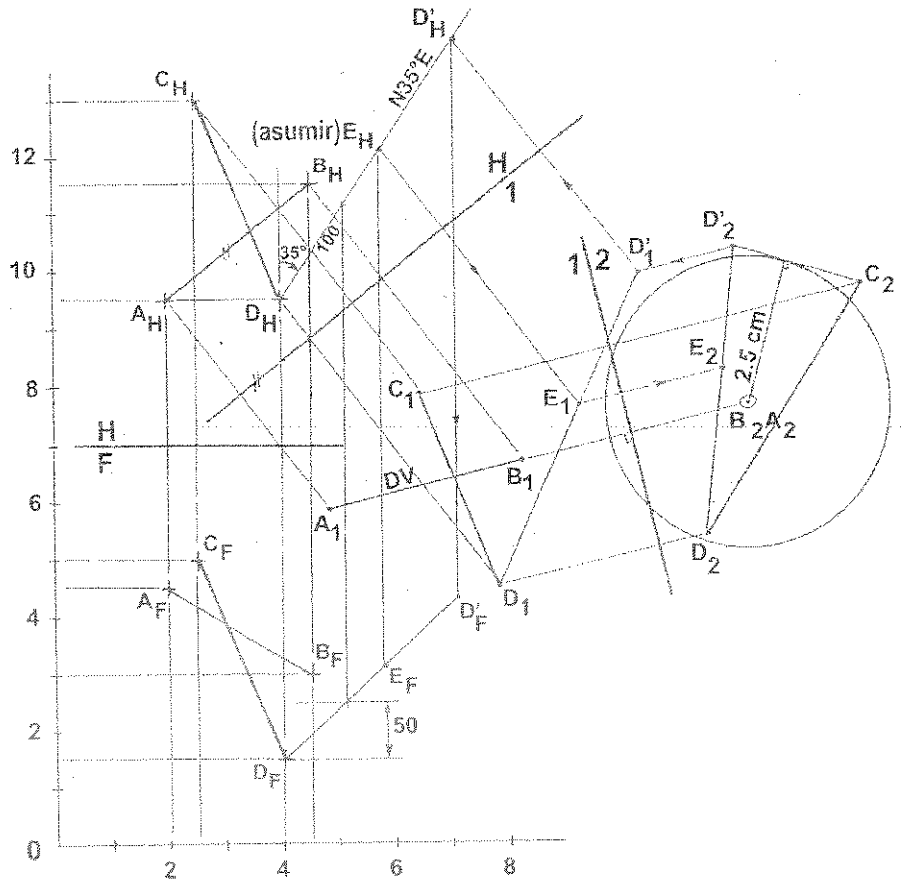


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Trazar desde el punto D la orientación N35°E de una recta con pendiente ascendente del 50%.
3) Hallar la proyección de punta de la recta AB, utilizando los planos auxiliares "1" y "2"; paralelo y perpendicular respectivamente a la recta AB.

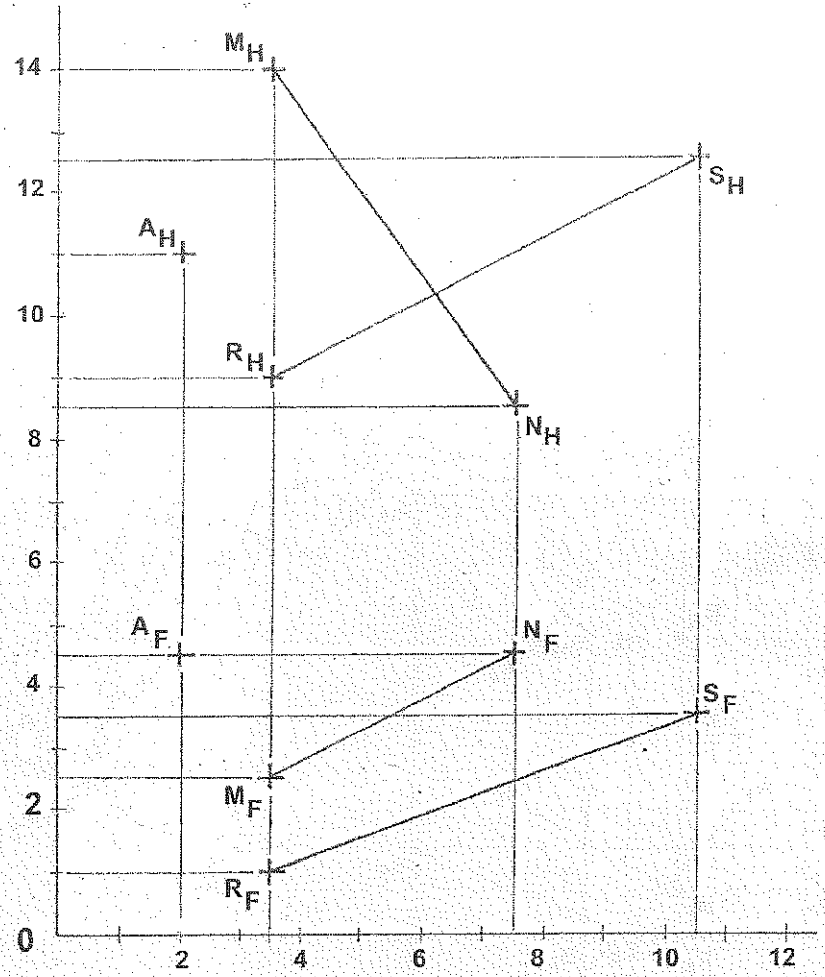
4) En la recta con orientación N35°E, asumir el punto E, y proyectar a este punto a los planos auxiliares "1" y "2" respectivamente.
5) En el plano auxiliar "2" y con centro en AB, trazamos una circunferencia de radio igual a 2.5 centímetros.
6) En el plano auxiliar "2" y desde el punto C, trazar una recta tangente a la circunferencia trazada; prolongamos a esta recta hasta que corte a la prolongación de la recta DE en el punto D'.
7) La recta CD' equidista de la recta AB, 2.5 centímetros, luego proyectar al punto D' a todos los planos de proyección utilizados.

SOLUCIÓN 7.6:



PROBLEMA 7.7: Trazar desde el punto A una recta que pase a 2 centímetros de la recta MN, y que corte a la recta RS. ESCALA: 1:1.
A(2,4.5,11); R(3.5,1,9), S(10.5,3.5,12.5); M(3.5,2.5,14), N(7.5,4.5,8.5)

DATOS DEL PROBLEMA:

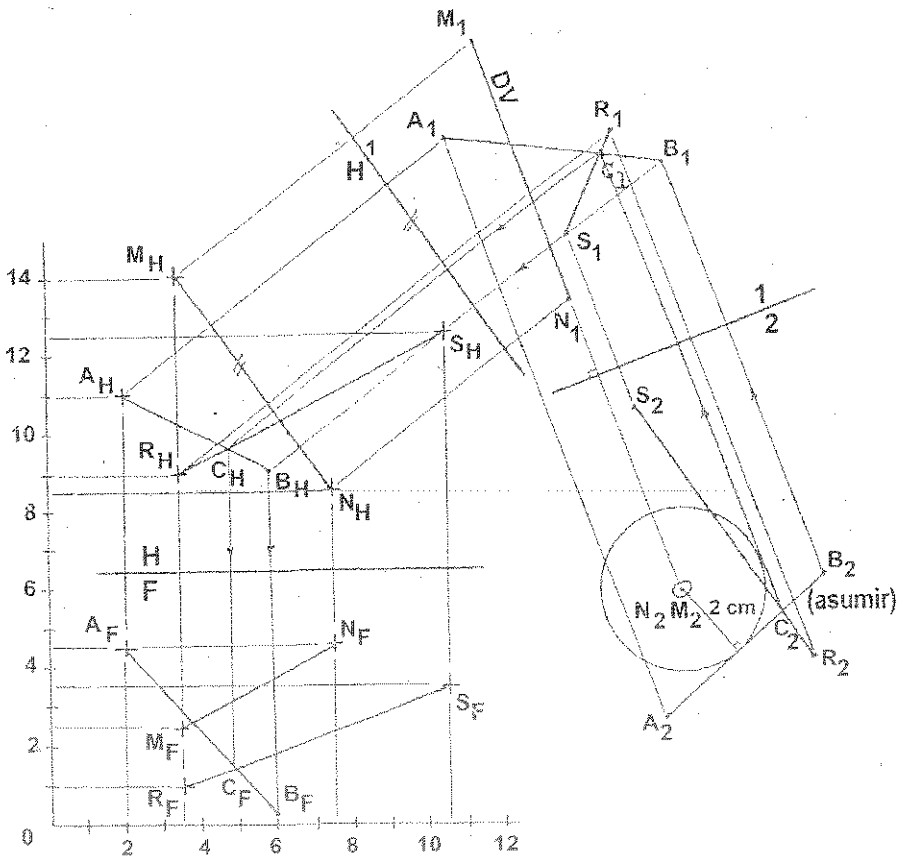


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Hallar la dimensión verdadera de la recta **MN**, luego proyectarla de punta, utilizando el plano auxiliar "**2**" perpendicular a su dimensión verdadera.
3) En el plano auxiliar "**2**" y con centro en la proyección de punta de la recta **MN**, trazamos una circunferencia de **2** centímetros de radio.
4) En el plano auxiliar "**2**" y desde el punto **A** trazamos una recta de longitud arbitraria, tal como **AB** (asumir el punto **B**).

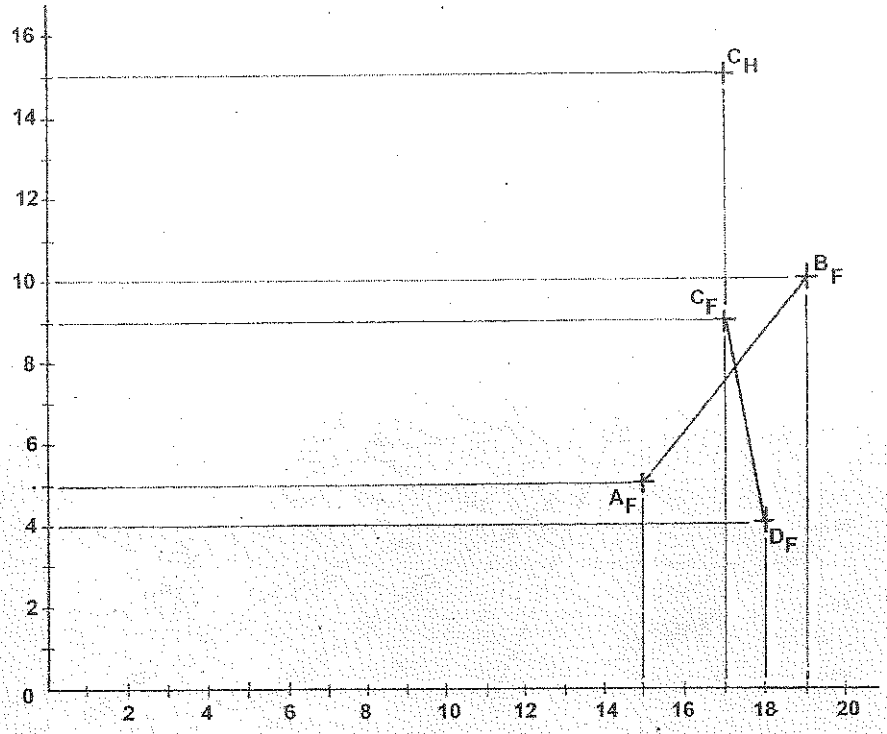
5) La recta AB debe ser tangente a la circunferencia trazada en el paso anterior y que corte a la recta SR en el punto C.
6) La recta AB trazada en el paso anterior, pasa a 2 centímetros de la recta MN y corta a la recta RS en el punto C.
7) Luego proyectar a la recta AB a todos los planos de proyección utilizados.

SOLUCIÓN 7.7:



PROBLEMA 7.8: La mínima distancia con pendiente de 30° entre las rectas AB y CD es MN; esta recta tiene una orientación de S35°O y una longitud de 4 centímetros. La perpendicular común a las rectas AB y CD, tiene una pendiente descendente de 20°; determinar las proyecciones principales utilizadas para la mínima distancia con pendiente dada.
A(15,5,-), B(19,10,-); C(17,9,15), D(18,4,-)

DATOS DEL PROBLEMA:



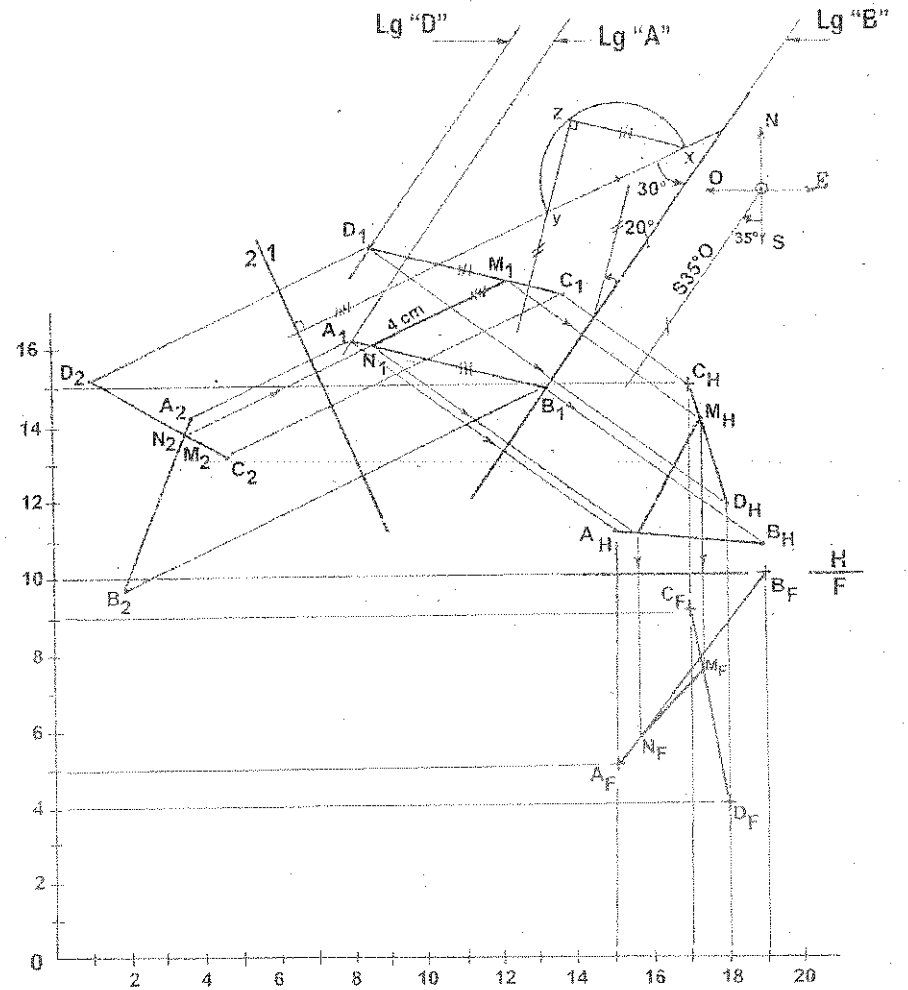
PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los untos dados según enunciado del problema.
2) Desde un punto arbitrario (asumir) trazamos la orientación S35°O.
3) Luego trazamos el plano auxiliar de elevación "1", paralela a la orientación trazada, a donde trasladamos para cada punto sus cortas del plano principal frontal.
4) En el plano de elevación "1" se traza la pendiente de 30°, en dicha reta se toma un punto X; a partir de este punto medimos los 4 centímetros.
5) Al trazar los 4 centímetros, ubicamos el punto Y; luego trazamos una semicircunferencia que pasa por dichos puntos.
6) En el plano de elevación "1", se traza la pendiente de 20° de la perpendicular común.
7) Desde el punto Y trazamos una paralela a la pendiente trazada y la prolongamos hasta cortar a la semicircunferencia en el punto Z.
8) En el plano de elevación y desde C trazamos una paralela al cateto XZ hasta que corte al lugar geométrico del punto D.

9) En el plano de elevación trazamos una recta paralela a la recta C_1D_1 y a una distancia de 4 centímetros y que corte a los lugares geométricos de A y B; luego la proyectamos al plano horizontal.

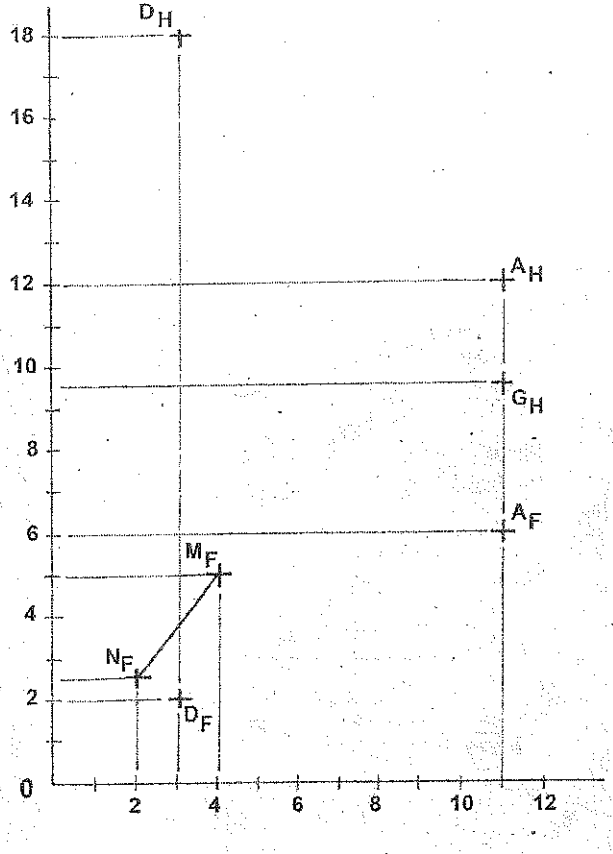
10) Trazar el plano auxiliar "2" perpendicular a la recta con pendiente de 30°, y en el cruce de las proyecciones de las rectas AB y CD, determinamos la perpendicular común MN; la que proyectamos a todos los planos utilizados.

SOLUCIÓN 7.8:



PROBLEMA 7.9: Determinar la trayectoria ABCD recorrida por un rayo de luz, que incide primero en el espejo plano vertical "X", que parte del punto G, siendo su dirección N55°O; y luego en el espejo plano normal "Y", cuya dirección está determinada por la recta MN, de tal manera que el punto inicial es A, B pertenece al espejo "X", C pertenece al "Y" y D es el punto final. ESCALA 1:1
A(11,6,12), D(3,2,18); G(11,-,9.5); M(4,5,-), N(2,2.5,-)

DATOS DEL PROBLEMA:



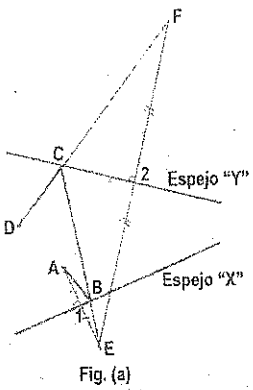


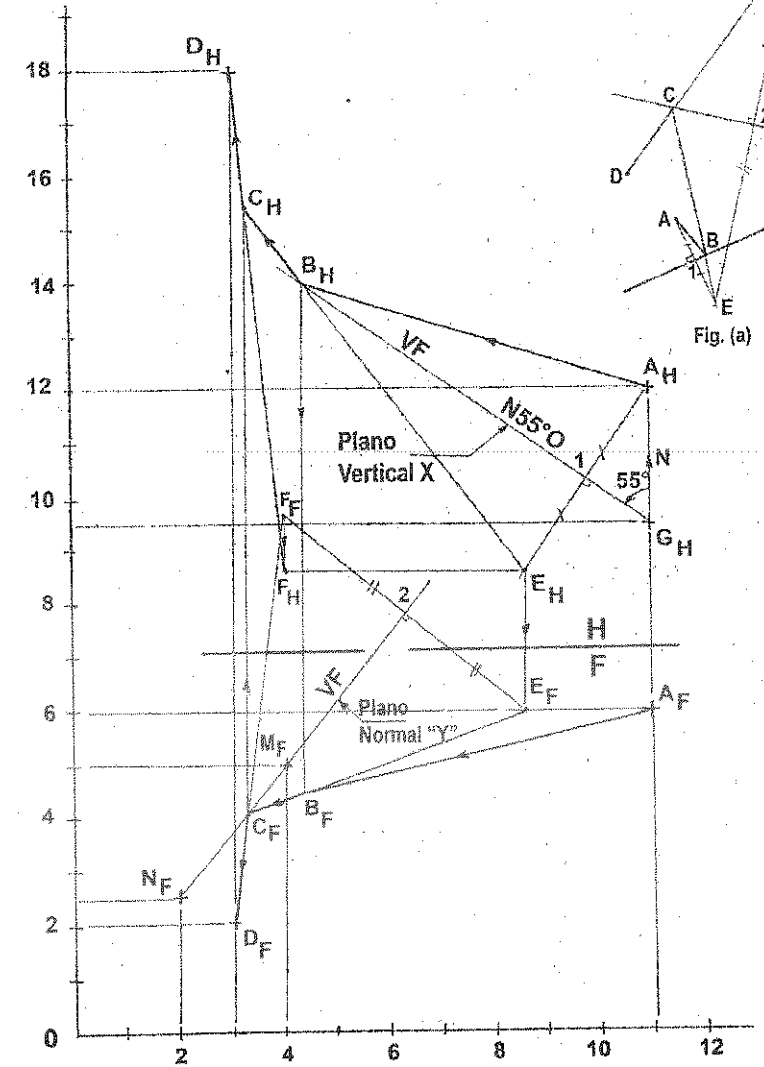
Fig. (a)

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos dados según enunciado del problema.
2) En la figura (a) observamos que el rayo de luz que parte de A, incide en el Espejo "X" en B, luego se refleja al Espejo "Y" en C; y finalmente sale por D.
3) En el plano horizontal, trazamos desde el punto "G" la orientación N55°O, y desde el punto A trazamos una perpendicular a esta orientación, en donde A1 debe ser igual a 1E (asumir el punto E); luego el punto E la proyectamos al plano frontal, siendo la recta AE horizontal.

4) En la vista frontal el plano normal "Y" se proyecta de canto y está determinada por la recta MN; luego desde el punto E trazamos una perpendicular a esta recta, en donde E2 debe ser igual a 2F (asumir el punto F); luego el punto F la proyectamos al plano horizontal.
5) Unir F con D, y corta al plano normal "Y" en el punto C; este punto la proyectamos al plano horizontal.
6) Unir E con C, y corta al plano vertical "X" en el punto B; este punto la proyectamos al plano frontal, completándose la trayectoria del rayo de luz.

SOLUCIÓN 7.9:



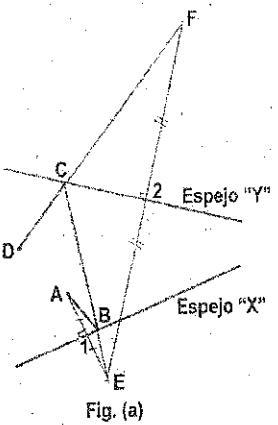
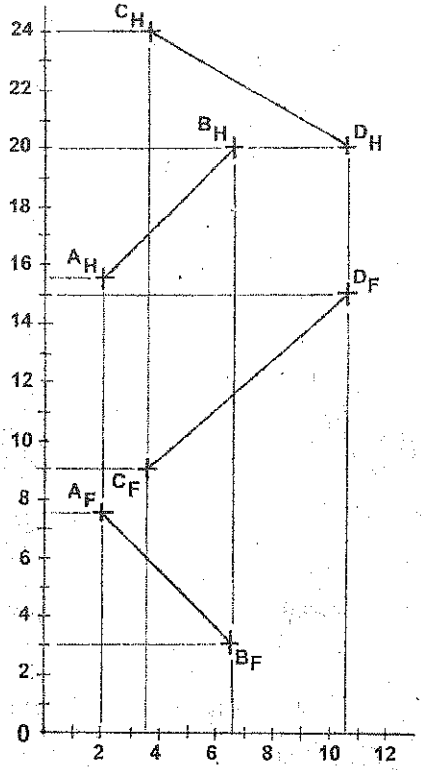


Fig. (a)

PROBLEMA 7.10: Se dan las proyecciones de las rectas AB y CD. Se pide determinar la minima distancia entre las rectas dadas. Resolver sin utilizar vistas auxiliares.
A(2,7.5,15.5), B(6.5,3,20); C(3.5,9,24), D(10.5,15,20)

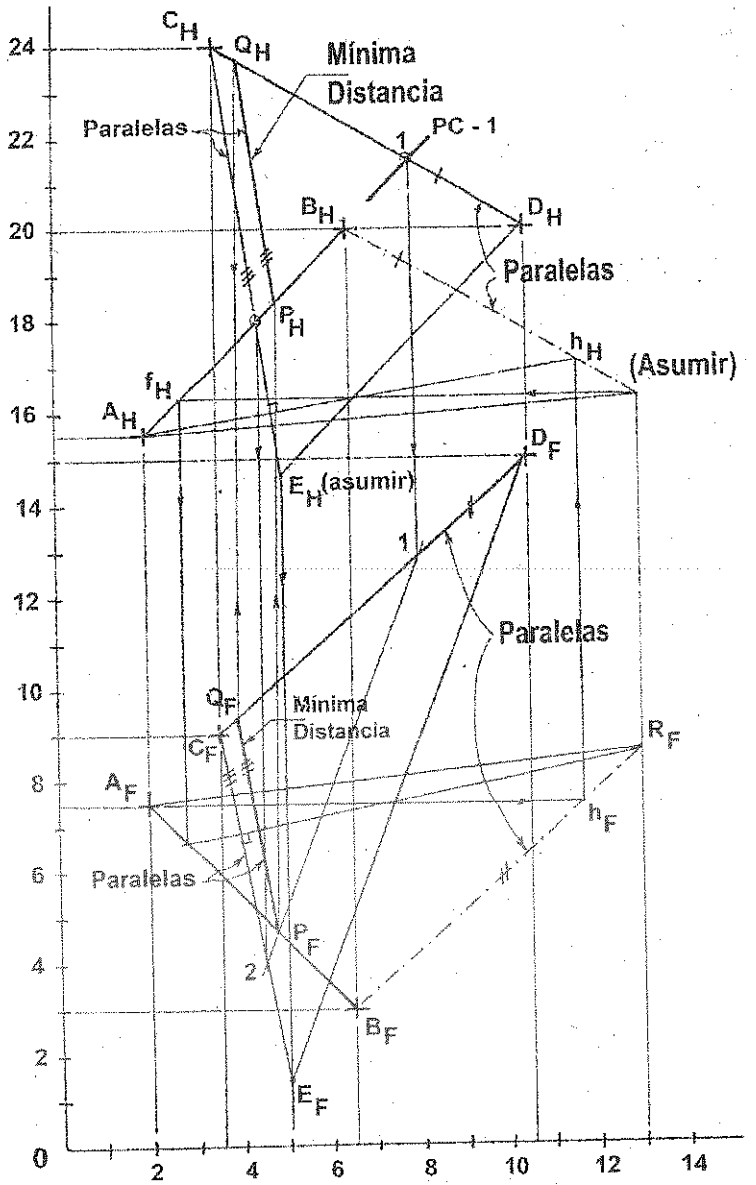


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos dados según enunciado del problema.
2) Trazar el plano ABR que contenga a la recta AB y que sea paralela a la recta CD. Desde el extremo B se traza la recta BR (asumir el punto R), que sea paralela a la recta CD, para formar el plano ABR.
3) Trazar en el plano formado ABR sus rectas notables horizontal (Ah) y frontal (Rf).
4) Trazar el plano CDE que contenga a la recta CD y que sea perpendicular al plano ABR. Desde el extremo C se traza la recta CE (asumir el punto E) perpendicular a las rectas notables Ah y Rf del plano ABR.
5) Determinar el punto de intersección P entre la recta AB y el plano CDE, utilizando el Plano Cortante PC-1 que corta a este plano en los puntos 1 y 2; al unir estos puntos corta a AB en P.

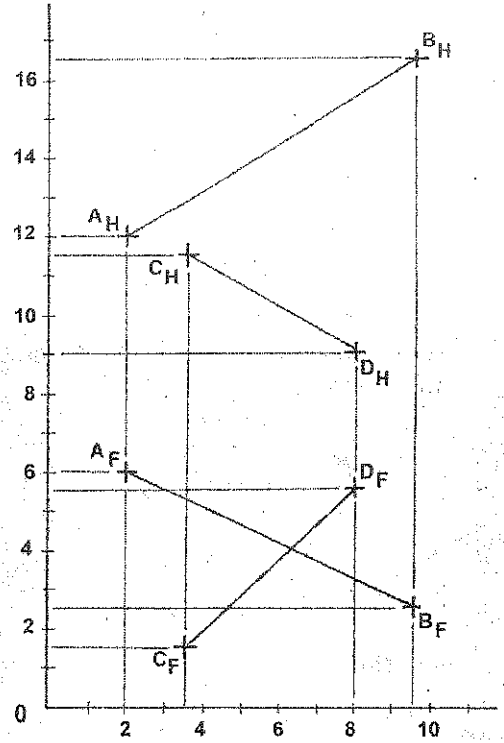
6) Desde el punto de intersección P contenida en la recta AB, trazamos la recta PQ (Menor Distancia) paralela a la recta CE, hasta cortar a la recta CD en el punto Q; siendo la recta PQ la mínima distancia buscada.

SOLUCIÓN 7.10:



PROBLEMA 7.11: Se dan las proyecciones de las rectas AB y CD, se pide determinar la menor distancia horizontal PQ entre las rectas dadas. Resolver sin vistas auxiliares.
A(2,6,12), B(9.5,2.5,16.5); C(3.5,1.5,11.5), D(8,5.5,9)

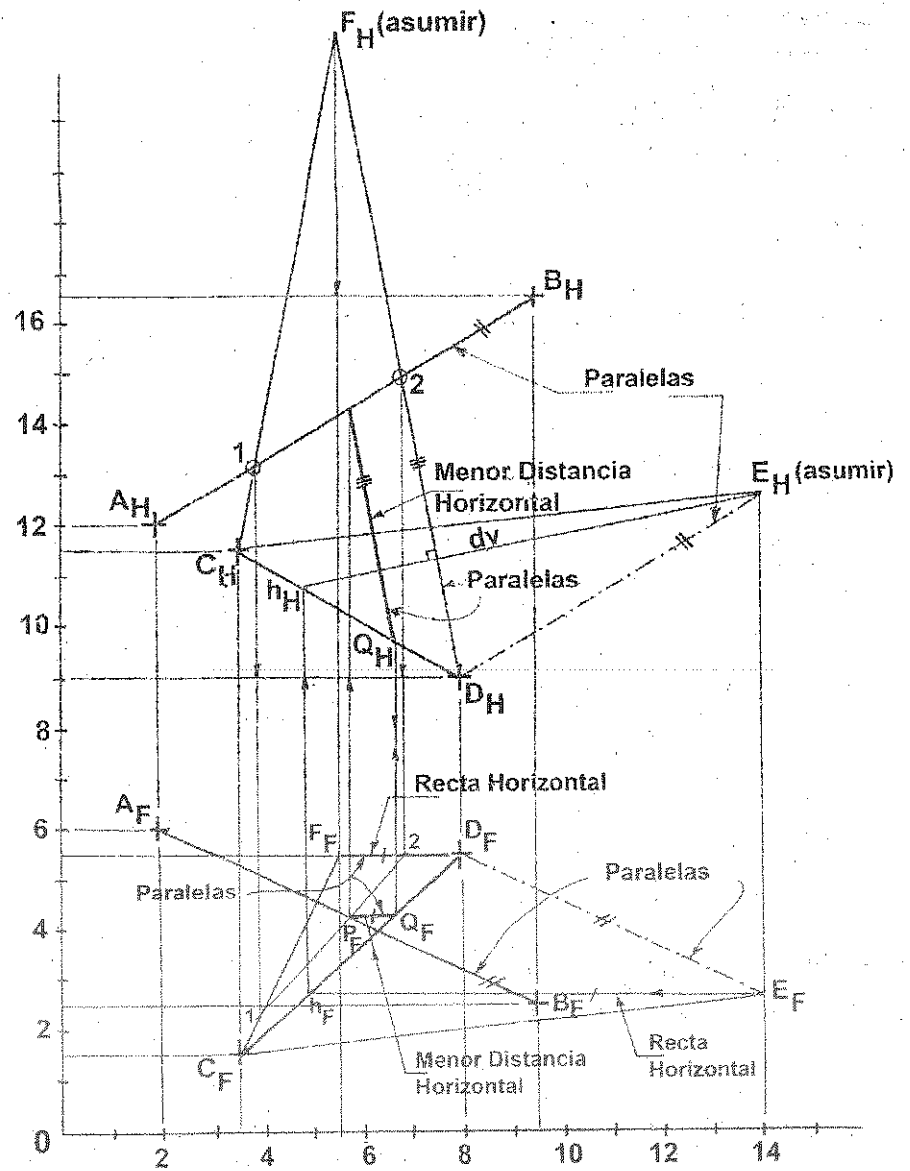
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

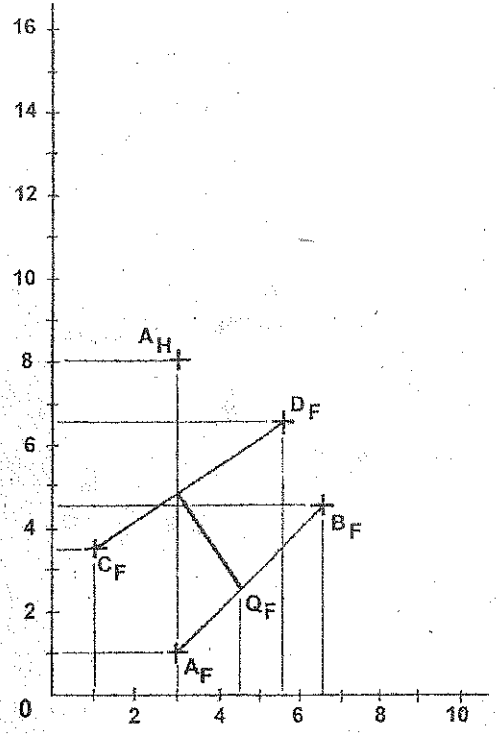
1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos dados según enunciado del problema.
2) Trazar el plano CDE que contenga a la recta CD y que sea paralela a la recta AB. Desde el extremo D se traza la recta DE (asumir el punto E), que sea paralela a la recta AB, para formar el plano CDE.
3) Trazar la recta horizontal Eh en el plano CDE.
4) Trazar el plano CDF que contenga a la recta CD y que sea perpendicular a la recta horizontal Eh. Desde el extremo D se traza la recta horizontal DF (asumir el punto F) que sea perpendicular a la recta horizontal Eh, para formar el plano CDF.
5) Determinar el punto de intersección P entre la recta AB y el plano CDF.
6) Desde el punto de intersección P contenida en la recta AB, trazamos la recta PQ (Menor Distancia Horizontal) paralela a la recta horizontal DF, hasta cortar a la recta CD en el punto Q; siendo la recta PQ la Menor Distancia Horizontal buscada.

SOLUCIÓN 7.11:



PROBLEMA 7.12.- Las tuberías AB y CD deben conectarse por una tercera tubería PQ de mínima longitud, con pendiente de 30° entre CD y AB. Sabemos que la perpendicular que conecta AB y CD mide 2.5 cm. Determinar la longitud de la tubería PQ y completar las proyecciones que faltan. Considerar a Q delante y al Este de P. ESCALA: 1:100.
A(3,1,8), B(6.4,4.5,-); C(1,4,-), D(5.5, 6.5,-); P(3,-,-), Q(4.5,-,-)

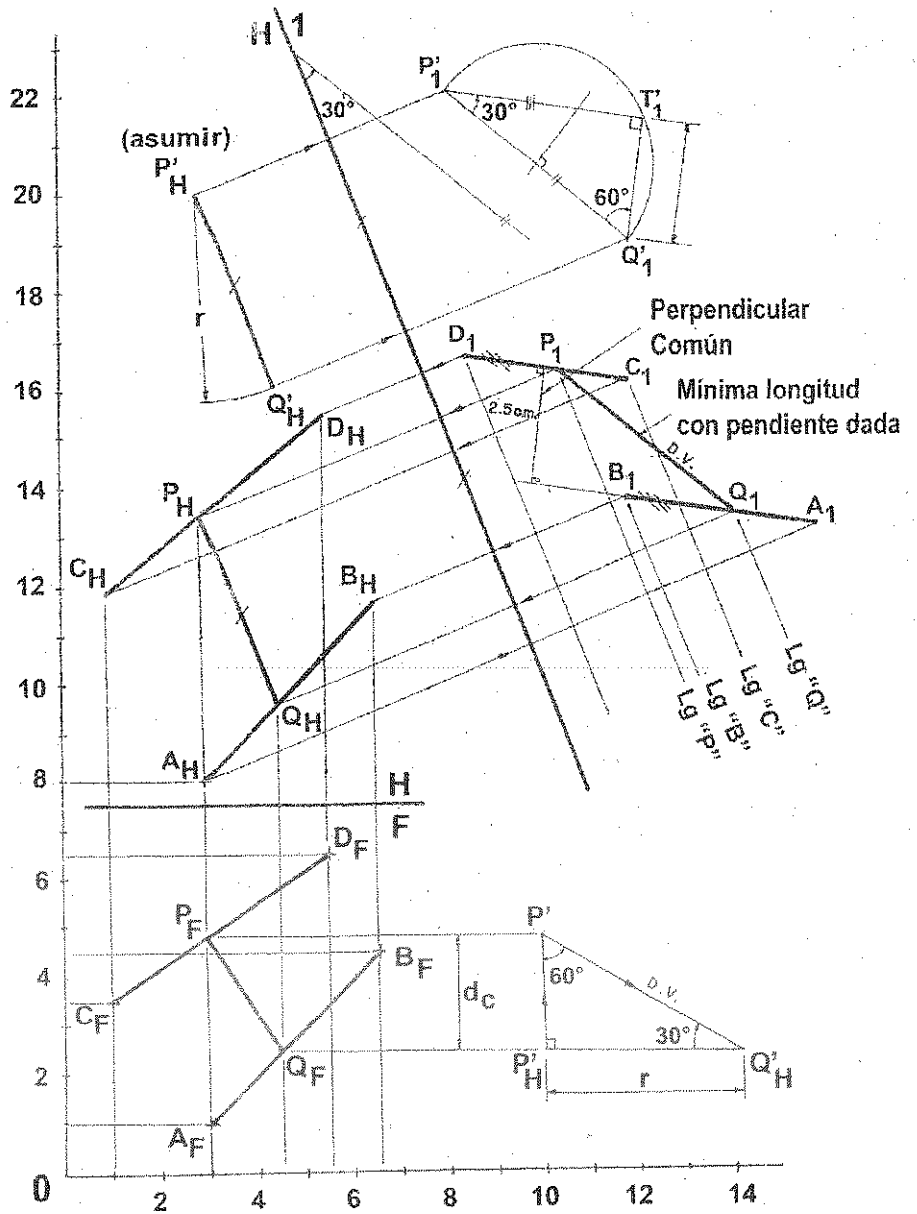
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

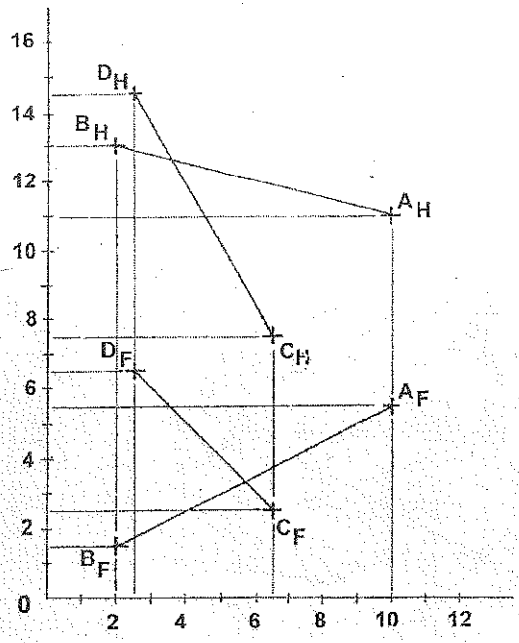
1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos dados según enunciado del problema.
2) Conociendo la diferencia de cotas entre P y Q, y su pendiente de 30° hallamos el radio r (asumir P').
3) En las mismas líneas de referencia de P y Q; en el plano horizontal desde P' (asumir) trazamos un arco de radio r, hallándose Q', luego trazar el plano de elevación "1" paralelo a P'Q'.
4) En el plano de elevación trazar P'Q' con pendiente de 30° y Q'T' mide 2.5 centímetros; luego desde A trazamos una paralela P'T' hasta determinar B, perpendicular a esta recta medimos los 2.5cms para determinar CD.
5) Las AB y CD en el plano de elevación, determinan los puntos P y Q respectivamente; la que proyectamos al plano horizontal.

SOLUCIÓN 7.12:



PROBLEMA 7.13: Se dan las proyecciones principales de las tuberías AB y CD; se desea conectar dichas tuberías por una tercera tubería RS de mínima longitud, pero que tenga una pendiente ascendente de 60° de AB a CD. Resolver sin vistas auxiliares.
A(10,5.5,11), B(2,1.5,13); C(6.5,2.5,7.5), D(2.5,6.5,14.5)

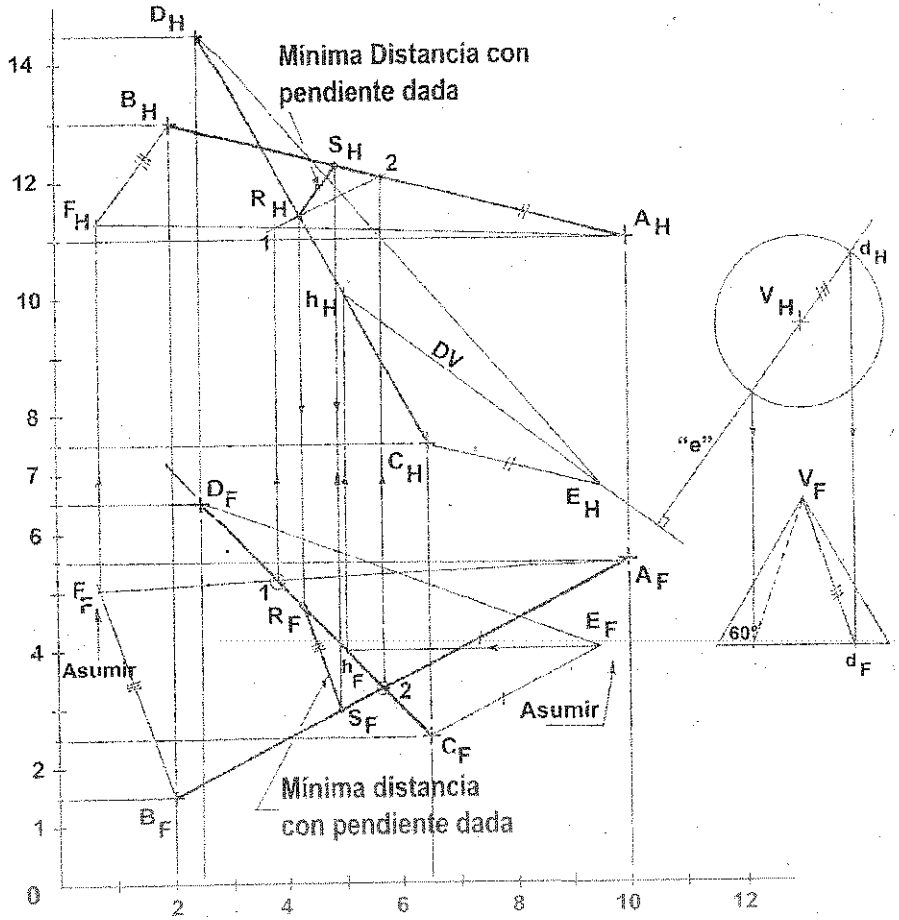
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

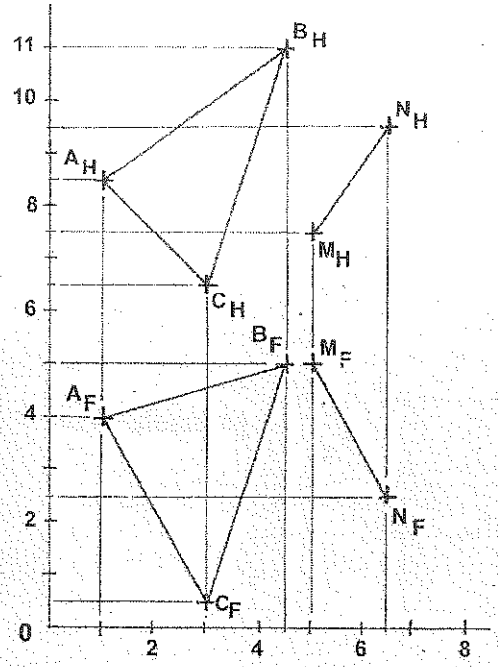
1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Formar el plano CDE paralelo a la recta AB. Desde el extremo C de la recta CD, trazamos una recta de longitud arbitraria paralela a la recta AB; tal como CE (asumir el punto E).
3) Trazar en el plano CDE la recta horizontal Eh.
4) Construir un cono que tenga sus generatrices una inclinación de 60°. Método del Cono.
5) Trazar la recta "e" que pase por el vértice V del cono y sea perpendicular a la recta horizontal Eh; esta recta "e" corta a la directriz de la base del cono en dos puntos.
6) En el plano horizontal, desde el extremo B de la recta AB trazamos una recta de longitud arbitraria paralela ala recta "e"; tal como BF (asumir el punto F). En el plano frontal observamos en el cono dos soluciones, descartamos una de ellas por no tener solución.
7) Intersectar la recta CD con el plano ABF. Por la recta CD pasar el plano cortante PC-1 que corta al plano ABF en los puntos 1 y 2, proyectar estos puntos al plano horizontal y al unirlos corta a la recta CD en el punto R.
8) Desde el extremo R trazamos una paralela a la recta Va hasta cortar a la recta AB en el punto S; siendo RS la mínima distancia con pendiente dada.

SOLUCIÓN 7.13:



PROBLEMA 7.14: Graficar en el plano ABC una recta de orientación N45°E, tal que diste 4cm del extremo M de la recta MN. Ubicar la linea de pliegue H-F a y = 12 unidades.
A(1,4,8.5), B(4.5,5,11), C(3,0.5,6.5); M(5,5,7.5), N(6.5,2.5,9.5)

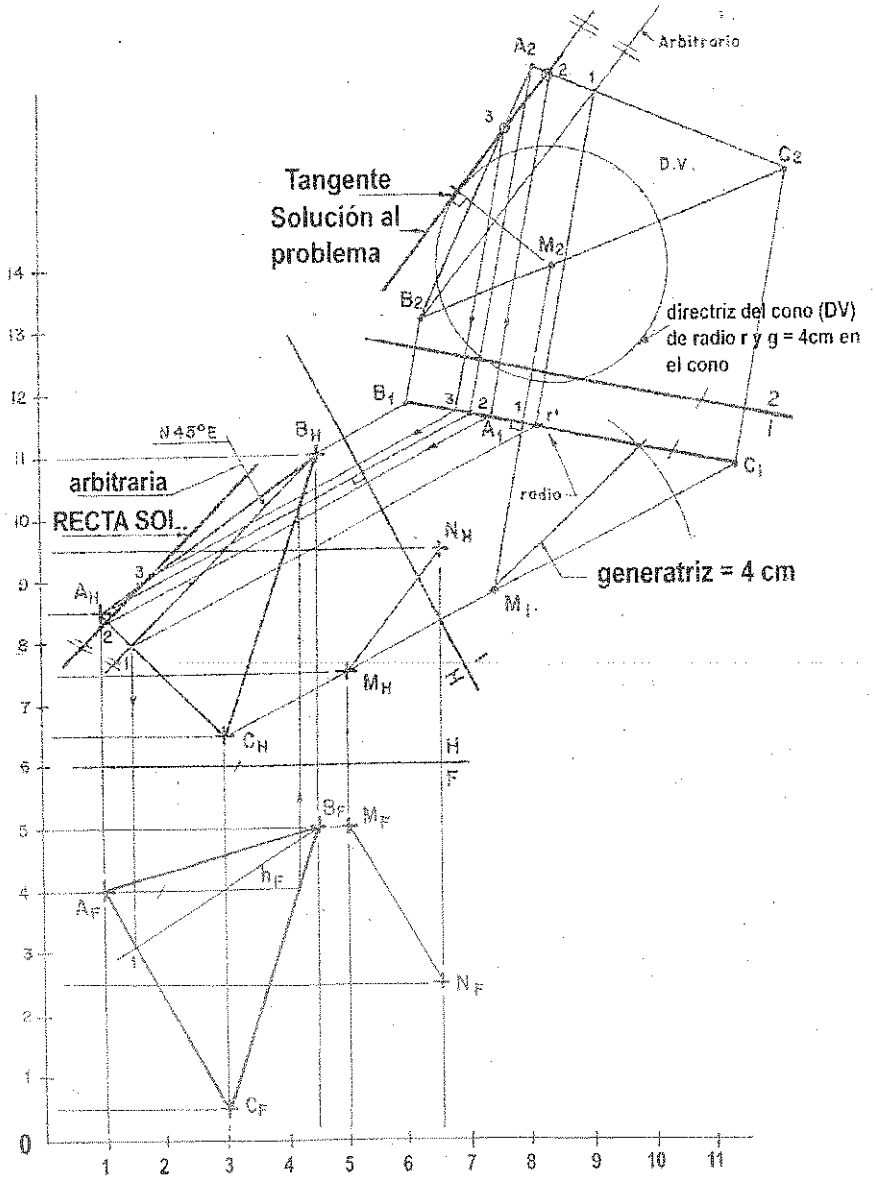
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

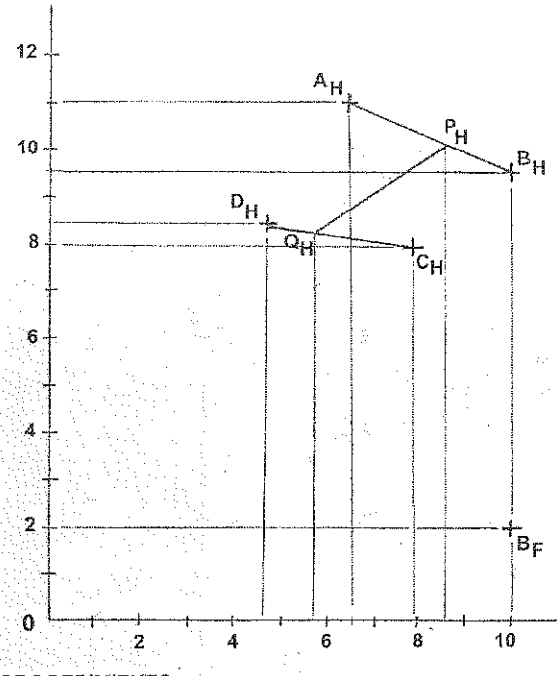
1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Hallar la vista de canto del plano **ABC**, luego proyectarla a dimensión verdadera.
3) El plano horizontal y en el plano **ABC** trazar una recta cualquiera (arbitraria), pero que tenga de orientación **N45°E**; luego proyectar a esta recta a los planos auxiliares utilizados, tal como la recta **B1**.
4) En el plano de elevación y con centro en **M**, trazar una arco de radio igual a **4cms** hasta cortar a la vista de canto del plano **ABC**, siendo esta recta la generatriz de un cono; y desde el mismo punto **M** trazar la altura del cono.
5) En el plano auxiliar"**2**" la base del cono se proyecta en dimensión verdadera; en este plano de proyección trazamos una recta tangente a la directriz del cono y paralela a la recta **B1**. Existen dos soluciones, se descarta una de ella por no estar contenida en el plano **ABC**.
6) En el plano auxiliar **"2"** la recta solución tangente a la dirección del cono, corta al plano **ABC** en los puntos **2** y **3**; luego proyectar a esta recta a sus planos principales. La recta **23** tiene como orientación **N45°E** y dista **4cms** del extremo **M**.

SOLUCIÓN:


Arbitrario
Tangente
Solución al
problema
directriz del cono (DV)
de radio r y g = 4cm en
el cono
generatriz = 4 cm
arbitraria
RECTA SOL.
N 45° E
radio
D.V.

PROBLEMA 7.15: Las tuberías AB y CD deben conectarse por una tercera tubería PQ de mínima distancia horizontal. Sabemos que la perpendicular común que conecta a las tuberías AB y CD pierde altura a razón de 2 metros y un metro de AB a CD. Determinar la longitud de la tubería PQ y completar las proyecciones que faltan. ESCALA: 1:100.
A(6.5,-,11), B(10,2,9.5); C(8,-,8), D(4.5,-,8.5); P(8.5,-,-), Q(5.5,-,-).

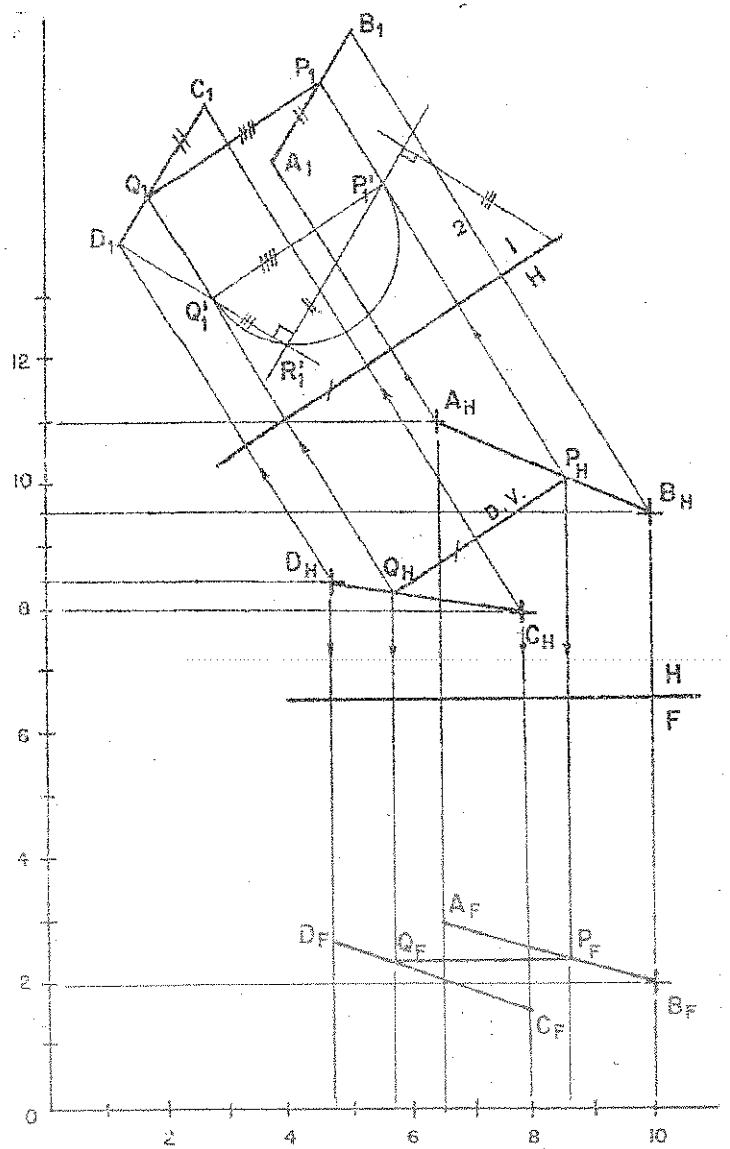
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

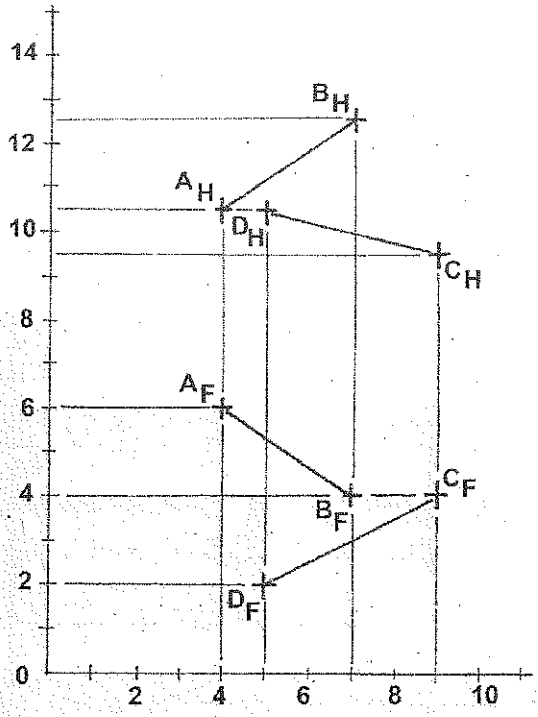
1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Trazar el plano de elevación "1" paralela a la mínima distancia horizontal PQ; en este plano solamente se conoce el punto B y las líneas de referencia de los puntos A, C, D, P y Q.
3) En el plano de elevación "1" trazar la pendiente 2:1 de la perpendicular común, que conecta a las tubería AB y CD; y perpendicular a esta recta trazamos una recta cualquiera (asumir su posición) y paralela a esta recta y desde el punto B trazamos una recta para cortar a las líneas de referencia de A y P; la perpendicular asumida origina el punto P'.
4) Desde el punto P' trazamos una paralela al plano de proyección "1" hasta cortar a la línea de referencia de Q, hallándose Q'; y en la recta P'Q' trazamos una semicircunferencia en donde inscribimos una triángulo rectángulo en R'.
5) Prolongar la recta Q'R' hasta cortar a la línea de referencia del punto D, y desde D trazamos una recta paralela a la recta P'R' hasta cortar a las líneas de referencia de Q y C respectivamente; luego completar la proyección frontal.

SOLUCIÓN:


B1
P1
C1
A1
Q1
P'1
D1
Q'1
R'1
2
1
H
AH
PH
BH
D.V.
DH
QH
CH
H
F
AF
DF
QF
PF
BF
CF
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10

PROBLEMA 7.16: Las tuberías AB y CD deben conectarse por una tercera tubería XY de mínima longitud, pero que forme un ángulo de 60° con AB. Determinar su longitud y completar las proyecciones utilizadas.
A(4,6,10.5), B(7,4,12.5); C(9,4,9.5), D(5,2,10.5). ESCALA: 1:1,000.

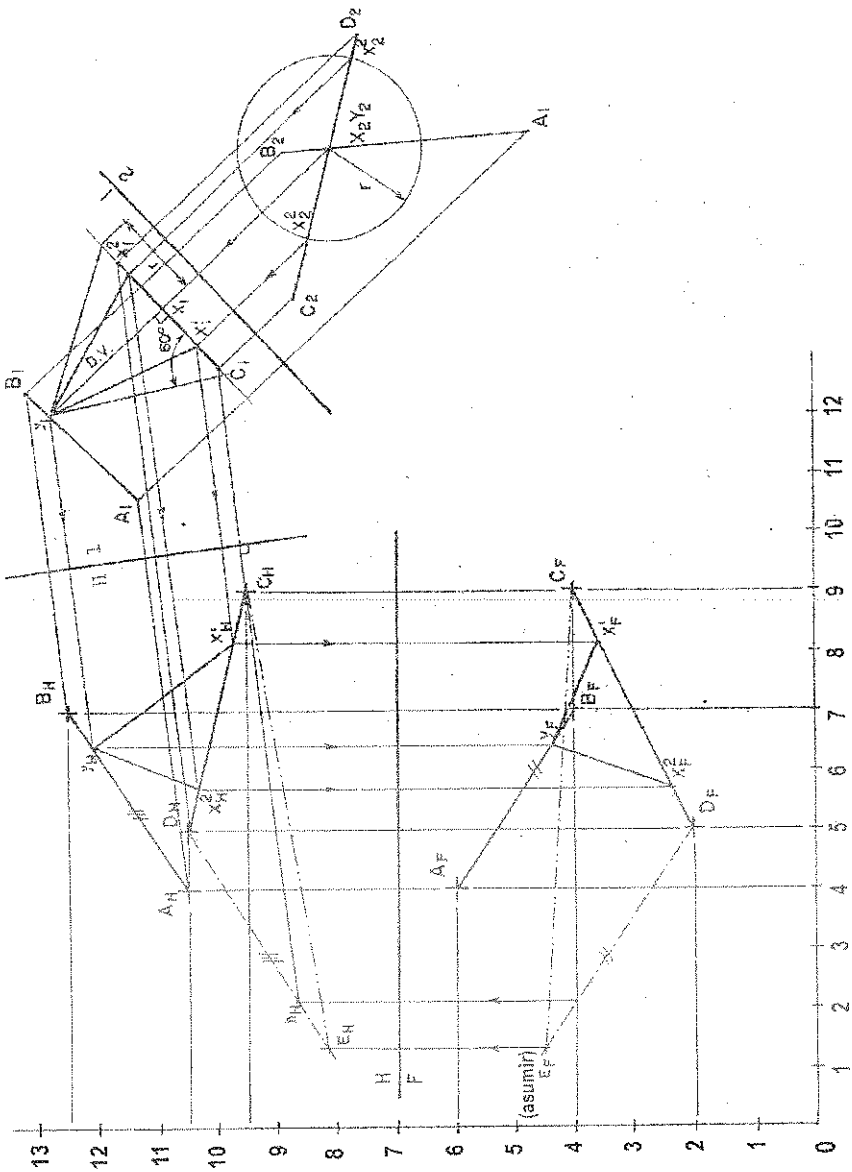
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

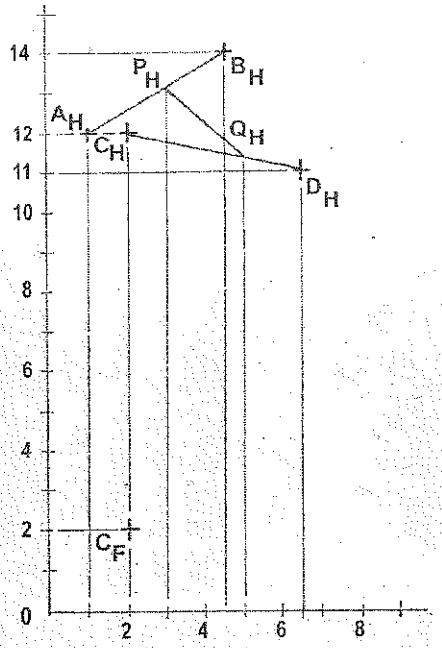
1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Trazar el plano **CDE** paralela a la recta **AB**. Desde el extremo **D** de la recta **CD** trazamos la recta **DE** (asumir el punto **E**), paralela a la recta **AB**.
3) Hallar la vista de canto del plano formado **CDE** utilizando el plano de elevación **"1"**, y su dimensión verdadera utilizando el plano auxiliar **"2"**.
4) En el plano auxiliar **"2"** las rectas **AB** y **CD** se cruzan según la recta **OY**, que está proyectada de punta, la que proyectamos al plano de elevación **"1"**.
5) En el plano de elevación **"1"** la recta **OY** representa la altura del cono, y desde **Y** trazamos sus generatrices de contorno a **60°**; en el plano auxiliar **"2"** y de radio **"r"** trazamos la directriz de la base del cono, que corta a la recta **CD** en el punto **X** en dos soluciones.
6) Determinada la tercera tubería **XY** (el punto **X** en dos soluciones), la que proyectamos a sus planos principales.

SOLUCIÓN:



PROBLEMA 7.17: Las tubería AB y CD deben conectarse por una tercera tubería PQ de mínima longitud, con pendiente del 50% descendente de AB a CD. Sabemos que la perpendicular común que conecta AB y CD mide 25 metros. Determinar la longitud de la tubería PQ y completar las proyecciones que faltan. ESCALA 1:1,000.
A(1,-,12), B(4.5,-,14); C(2,2,12), D(6.5,-,11); P(3,-,-), Q(5,-,-)

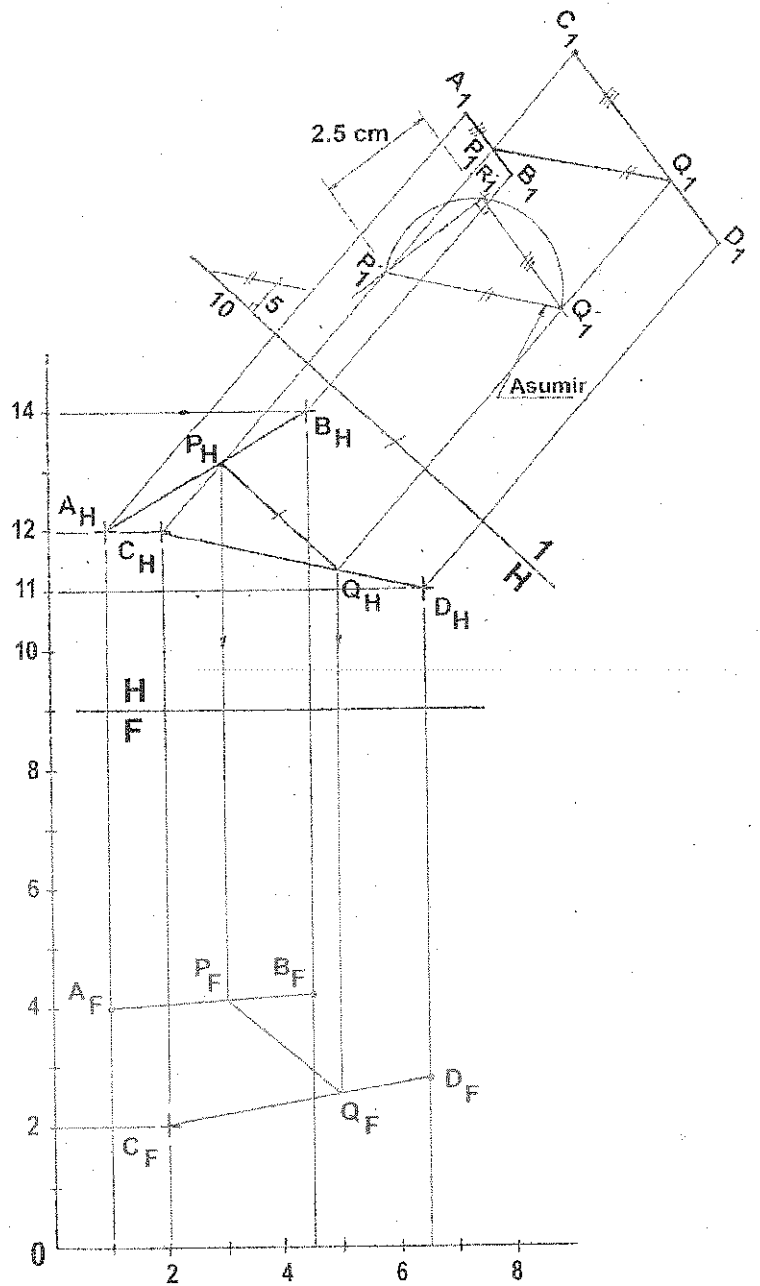
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

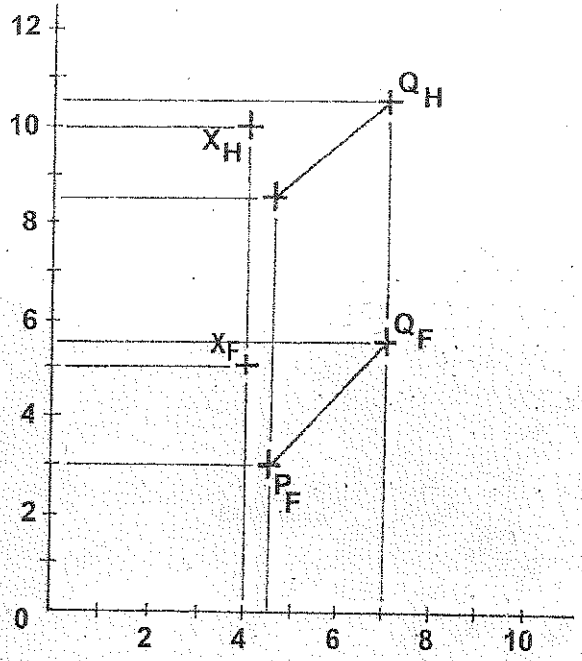
1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos de acuerdo al enunciado del problema.
2) Trazar el punto de elevación "1" paralela a la tubería PQ; en este plano de proyección se conoce el punto C y las líneas de referencias de los puntos A, B, D, P y Q respectivamente
3) En el plano de proyección "1" trazar la pendiente del 50% y paralela a esta recta trazar la recta P'Q', asumiendo su posición; luego en P'Q' trazar una semicircunferencia e inscribir un triángulo rectángulo en R; en donde P'R' mide 25 metros.
4) En el plano "1" y desde C trazar una paralela a R'Q', hallándose Q y D, y desde Q trazar una paralela a P'Q', hallándose el punto P, y desde este punto trazar una paralela a CD determinándose A y B.
5) Determinado los puntos A, B, D, P y Q en el plano "1", completamos su proyección frontal y la longitud del tubería PQ la medimos en el plano "1" proyectada en dimensión verdadera; PQ mide 38 metros.

SOLUCIÓN 7.17:



PROBLEMA 7.18: Conectar la tuberia PQ por medio de otra tuberia XY de 4 metros de longitud, que parta del punto X y con pendiente descendente del 100%. ESCALA 1:100. Resolver sin vistas auxiliares. X(4,5,10); P(4.5,3,8.5), Q(7,5.5,10.5)

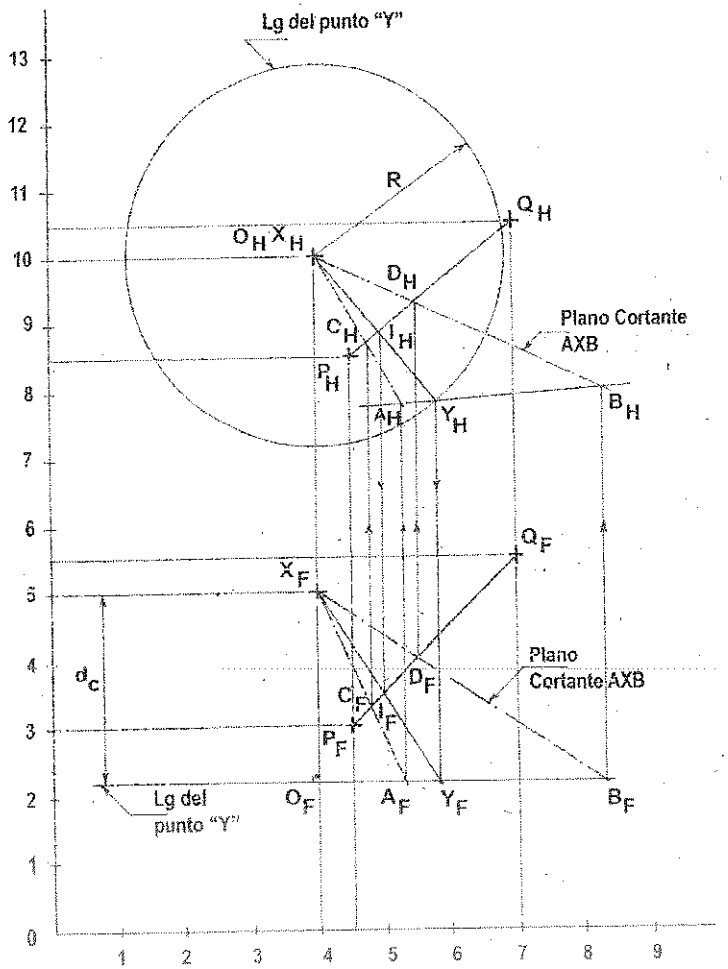
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados de acuerdo a sus coordenadas y unir los puntos P y Q de acuerdo al enunciado del problema.
2) Por el método de diferencia de cotas hallar la dimensión verdadera de la tuberia XY que tiene 100% de pendiente descendente; ver la figura "a".
3) Conociendo R (ver la figura "a") en el plano horizontal y desde el punto X, trazamos una circunferencia de radio "R" que representa el lugar geométrico del punto "Y"; y en el plano frontal y desde el unto X medimos la diferencia de cotas "d_c" determinándose el lugar geométrico del punto "Y".
4) En el plano frontal y desde el punto X trazamos el Plano Cortante AXB hasta el lugar geométrico de "Y", que corta a la recta PQ en los puntos C y D; que proyectamos al plano horizontal determinamos el punto de intersección I.
5) Unir el punto X con el punto de intersección I y la prolongamos hasta cortar al lugar geométrico del punto "Y", determinándose la posición de este punto; siendo XY la solución del problema

SOLUCIÓN 7.18:



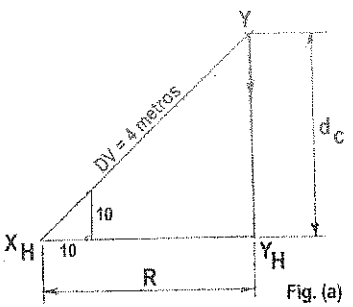


Fig. (a)

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA N° 7.1: La actual mínima distancia entre los cables AB y CD no es la adecuada, por lo que el punto C debe desplegarse normalmente hasta lograr la separación mínima pedida que es de **1.2 metros** (la longitud de CD variará). Mostrar el nuevo cable C' D' en todas las proyecciones. ESCALA 1:100. A(3, 6,14), B(6, 8, 12), C(2, 9, 10), D(5, 5, 12)

PROBLEMA N° 7.2: RS y TU son los ejes de dos túneles que se desea unir mediante un tercer túnel que tenga 14% de pendiente descendente de RS a TU y el menor costo posible. Determinar sus características.
R(8, 4, 15), S(12, 5,18), T(10, 2, 14), U(14, 4, 13).

PROBLEMA N° 7.3: AB y CD son los ejes de dos túneles de 4 metros de diámetro. Por razones geológicas solo podemos conectar estos túneles mediante una galería que suba de AB a CD, cuya orientación debe ser N60°O y debe tener una pendiente de 25%. Hallar el costo de la galería sabiendo que su construcción cuesta sesenta mil soles por metro lineal. ESCALA: 1:1,000.
A(2, 5, 12), B(7, 3, 15), C(5,7, 16), D(9, 3, 11).

PROBLEMA N° 7.4: CD representa el eje de un túnel y EF el eje de una galería vertical. Hallar y medir la longitud del menor túnel con pendiente de 20° en bajada de CD a EF y también el menor túnel horizontal. ESCALA: 1:500.
C(7. 4, 11), D(12, 7,15), E(13, 8, 11), F(13, 5, 11)

PROBLEMA N° 7.5: Desplegar verticalmente el punto B hasta que la menor distancia del punto P a la recta AB sea **2 metros**.
A(10, 6,14), B(13, 1, 9), P(12, 4, 12. ESCALA: 1:100.

PROBLEMA N° 7.6: Unir las rectas TB y CE mediante una tercera de longitud mínima y que haga un ángulo de 30° con el plano frontal de proyección.
T(3, 8, 12), B(6, 4, 14), C(5, 7, 11), E(9, 6, 15).

PROBLEMA N° 7.7: Determinar una recta contenida en el plano ABC que tenga una pendiente de 30° y cuya menor distancia a la recta LM sea de 2cm. ESCALA: 1:1.
A(6, 7, 14), B(8, 9, 12), C(10, 4, 17), L(5, 5, 11), E(9, 6, 15).

PROBLEMA N° 7.8: Se proyecta trazar un túnel partiendo del punto P con una orientación de S60°E y una pendiente ascendente de 35%. Se desea conectar la menor longitud de un tercer túnel a nivel (horizontal) que una al túnel proyectado y al túnel TB existente. Indicar el tercer túnel en todas las avistas. P(2, 5, 16), T(7, 4, 11), B(12, 7, 15).

PROBLEMA N° 7.9: El eje de una tubería AB tiene un rumbo N60°E y 30% de pendiente ascendente. El eje de una segunda tubería CD, estando C 4mts a la derecha, 1 metro delante y 2 metros debajo de A, tiene una orientación N60°O y 100% de pendiente ascendente. Se trata de hallar las vistas principales del eje de una tercera tubería de menor longitud posible y a nivel que una a las tuberías AB y CD. ESCALA: 1:100. A(4, 7, 10).

PROBLEMA N° 7.10: Se determina un plano **ABCD** por dos líneas paralelas y un punto **P** fuera del plano. Encontrar la mínima distancia horizontal del punto **P** a dicho plano y su orientación. **ESCALA: 1:50. (4, 9, 14), B(9, 7, 11), C(8, 6, 15), D(13, 4, 12), P(4, 7, 12).**

PROBLEMA N° 7.11: TBCE es un tetraedro. Hallar la mínima distancia entre las aristas opuestas **TC** y **BE. T(9, 5, 13), B(14, 4, 11), C(12, 1, 8), D(11, 2, 14).**

PROBLEMA N° 7.12: AB representa el eje de un túnel y **CD** el eje de una galería vertical. Hallar y medir la longitud del menor túnel con pendiente de **15%** en bajada de **AB** y **CD**; también hallar el menor túnel frontal. **ESCALA; 1:500.**
A(8, 4, 10), B(13, 6, 14), C(14, 8, 10), D(14, 4, 10).

PROBLEMA N° 7.13: Los puntos **A, B, C, D, E** y **F** equidistan de los puntos **R** y **S**. Si la distancia de cada punto a la recta **RS** es de 3 centímetros y los puntos **A** y **B** están contenidos en un plano horizontal; completar las proyecciones de dichos puntos. **R(3, 4, 14), S(7, 8, 10.5).**

PROBLEMA N° 7.14: Desplazar el punto **A** verticalmente hasta que la menor distancia entre el punto **R** y la recta **AB** sea de **1.5** centímetros.
A(5, 3.5, 8.6), B(7.5, 5.5, 11), R(6, 3.5, 10).

PROBLEMA N° 7.15: Unir las rectas **AB** y **CD** por una tercera que tenga una orientación **Este** y **45%** de pendiente descendente. No utilizar vista adicional.
A(6.5, 6, 10), B(11, 2.5, 6.5), C(6, 2, 7), D(12, 5, 10.5)

PROBLEMA N° 7.16: Dos líquidos fluyen por las tuberías **AB** y **RS** según la dirección de **A** a **B** y **R** a **S** (ejes de las tuberías). Se desea conectarlas mediante una tercera que tenga **100%** de pendiente y que sea la más corta. Indique además el sentido en el que fluirá el líquido por la conexión, sabiendo que lo hace por efecto de la gravedad.
A(11, 3, 12), B(15, 8, 15), R(12, 2, 14), S(15, 4, 10).

PROBLEMA N° 7.17: AB y **CD** son los ejes de dos túneles, que por razones obvias del proyecto se desea conectarlas con otra tubería **PQ** de pendiente de **170%** que baje de **CD** a **AB**, y que tenga una orientación de **N30°O**, hallar las proyecciones de la conexión **PQ** y su longitud en metros, sin usar ninguna vista adicional. **ESCALA: 1:100.**
A(3, 7, 12), B(11, 3, 18), C(7,10, 17), D(15, 4, 11).

PROBLEMA N° 7.18: Sin emplear ninguna vista adicional, hallar las proyecciones de la menor distancia horizontal entre **AB** y **JF.**
A(9, 3, 12), B(5, 5,12), J(5, 6, 8), F(2, 2, 12).

PROBLEMA N° 7.19: Se dan las rectas ilimitadas **AB** y **CD**. Hallar las proyecciones de un segmento de mínima longitud **MN** tal que, forme **30°** con **AB**, estando **M** sobre **AB** y el otro extremo **N** sobre **CD. A(2, 7, 10), B(9, 4, 17), P(12, 3, 11).**

PROBLEMA N° 7.20: Hallar la menor distancia del punto **P** a la recta **MN**, sin utilizar vistas adicionales. **M(7, 4, 14), N(7, 7, 9), P(12, 3, 11).**

PROBLEMA N° 7.21: Conectar las rectas AB y CD de modo que la conexión tenga la misma orientación de la recta AB y una pendiente de 30% y que baje de CD a AB.
A(3, 4.5, 6), B(5, 1, 9.5), C(2, 1, 10), D(5.5, 4.5, 8).

PROBLEMA N° 7.22: Sin emplear ninguna vista adicional, determinar un segmento MN que además de ser ortogonal con AB y CD se apoye en JF y RS.
A(2, 8,19), B(5, 1, 23), C(3, 13, 23), D(10, 10, 21)
J(9, 6, 15), F(15, 3, 15), R(11, 9, 22), S(17, 9, 18).

PROBLEMA N° 7.23: Determinar la longitud de la menor distancia entre AB y CD, y que sea paralela al plano vertical JKL. ESCALA: 1:1.
A(3, 6, 9), B(3, 4, 13), C(2, 6,14), D(5, 5, 11); J(7, 3.5, 13), K(6, 7, 11.5), L(5.5, 5 , 9.5).

PROBLEMA N° 7.24: Determinar las proyecciones de las conexiones entre las rectas AB y CD. (a) De la recta más corta con pendiente de 50% descendente de AB a CD. (b) De la recta más corta pero que haga 60° con el plano frontal.
A(8.5, 3, 12), B(8.5, 7, 12), C(8, 2, 10), D(11, 5, 10)

PROBLEMA N° 7.25: Unir los segmentos AB y CD con un segmento XY de 3cm de longitud, que baje de CD hacia AB y forme con CD un ángulo de 30°.
ESCALA: 1:1. A(5, 3, 12), B(1.5, 7,10), C(3, 8, 14), D(3, 3, 10).

PROBLEMA N° 7.26: Hallar la longitud recorrida por un rayo de luz que incide primero en el espejo plano M, y luego en el espejo plano N. La trayectoria es RSTU (R punto inicial, S pertenece al espejo M, T pertenece al espejo N y U punto final). ESCALA: 1:1.
R(2, 6, 12), U(10, 2, 18). Espejo plano vertical M: dirección: N55°E, X(2, 7, 9.5).
Espejo plano normal N: dirección AB. A(9, 5, ?), B(11, 2.5, ?).

PROBLEMA N° 7.27: Hallar un punto X en el plano ABC que se encuentra a 3.5 centímetros de Y, y que la perpendicular trazada de X al plano PQR mida 1 centímetro. ESCALA: 1:1.
A(2, 7, 12), B(4, 6, 16), C(7, 10,12), X(8, 7, 16).
P(11, 6, 15), Q(8, 9.5, 11.5), R(13, 8, 12).

PROBLEMA N° 7.28: Determinar la mínima distancia del punto P a la recta MN. No utilizar vista adicional. M(5, 7, 10), N(5, 3, 14), P(9, 5, 11).

PROBLEMA N° 7.29: Los planos ABC y PQR son paralelos y la distancia tomada paralelamente a la recta MN es 4cm entre los planos dados. Completar las proyecciones del plano ABC (tomar ABC encima de PQR). ESCALA: 1:1
A(4, 7, 8), B(6, ?, 10), C(2.5, 6, 7), M(5, 1.5, 13.5), N(7, 3, 15)
P(1.5, 3.5, 14.5), Q(4, 1, 10), R(6, 5, 13).

PROBLEMA N° 7.30: Trazar en el plano ABC una recta ER, tal que la perpendicular común a esta recta y a la recta MN, tenga una longitud de 4 centímetros y encuentre a MN en el punto N, (MN es una recta exterior al plano ABC).
ESCALA: 1:1. A(3, 6, 10), B(8, 5, 13), C(5, 2, 9), M(12, 6, 12), N(9, 7, 10).

PROBLEMA N° 7.31: Teniendo en cuenta que el plano PQR es perpendicular al plano dado ABC, hallar las proyecciones de un punto P que pertenezca a estos planos y que equidiste de la recta BC y del punto A.
P(2, 6, 7) Q(6.5, 2, 14.5), R(7, 4.5, 9.5), A(7, 3, 13), B(5, 6, 10), C(3, 4, 14)

PROBLEMA N° 7.32: La mínima distancia con un ángulo de pendiente descendente de 60° entre las rectas AB y CD es XY. La distancia de la perpendicular común a las rectas AB y CD es 3 centímetros. Hallar la proyección frontal del segmento XY, El punto X está contenido en la recta AB.
ESCALA: 1:1. A(5, 5, 10), B(10, ?, 12), Y(9, ?, 8), X(8, ?. ?).

PROBLEMA N° 7.33: AB y CD son paralelas y se cruzan en XY, conectar a estas tres vigas mediante una cuarta que tenga 50% de pendiente y al menor costo posible.
X(2, 7, 17), Y(8, 8, 12.5); A(3, 5, 12), B6.5, 9, 16), C(4, 4, 10.5), D(7.5, ?, ?)

PROBLEMA N° 7.34: Determinar la mínima trayectoria de la bilia que parte del punto A al punto B, tocando el plano PQR.
A(8, 4, 14), B(10, 2, 13), P(7, 3, 11), Q(4, 8, 15), R(2, 5, 12).

PROBLEMA N° 7.35: Pasar por A un segmento AB que sea ortogonal a LM y PQ. Determinar las proyecciones del punto B sabiendo que el punto X equidista de A y B.
A(7, 3, 9), L(6, 5, 13), M(12, 2, 12), P(2, 5, 13), Q(5, 6, 9); X(13, 4, 10).

PROBLEMA N° 7.36: Dadas dos rectas AB y CD, que se cruzan, trazar un plano paralelo a cada una de ellas y equidistante a cada una de ellas.
A(2, 6, 15), B(13, 1, 11), C(2, 4, 10), D(11, 8, 12).

PROBLEMA N° 7.37: Hacer pasar por el punto M una recta cuya distancia al punto P sea de 1.5 centímetro y que corte a la recta LN.
M(3, 2, 11), P(7,.5, 5.5, 11), L(7, 1.5, 9), N(4.5, 6.5, 12.5)

PROBLEMA N° 7.38: Determinar la mínima distancia entre las rectas que se cruzan TB y CE. No usar vistas auxiliares.
T(3, 6, 16), B(8, 2, 14), C(5, 6, 17), E(11, 10, 17).

CAPITULO 8

ANGULOS

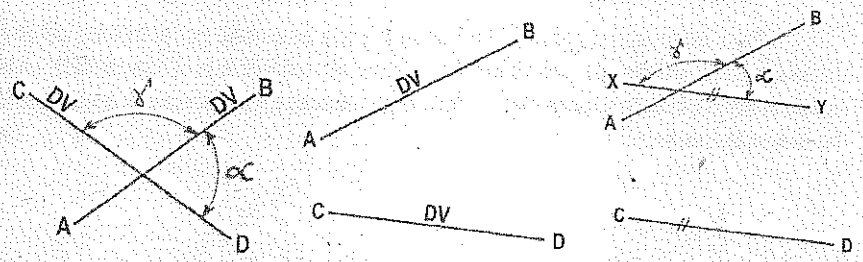
8.1 ANGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Dos rectas que se cruzan, el ángulo que forman se observará en aquella vista en que ambas estén en dimensión verdadera.

Dos rectas que se cruzan en el espacio, el ángulo que forman se define por el ángulo determinado por una de las rectas y una paralela a la otra que corte a la primera Tenemos dos métodos para determinar el ángulo entre estas rectas y que son las siguientes:

1. Método de la Recta.
2. Método del plano.

En la figura **8.1** se observa el ángulo α que forma la recta **AB** con la recta **CD** (8.1a); en (b) se observa el ángulo α que forma la recta XY paralela a **CD** con la recta **AB**. De los dos ángulos que forman las dos rectas que se cruzan, definimos como ángulo al menor de los ángulos adyacentes que forman dichas rectas.



(a) Se cortan **(b) Se cruzan**

Fig. 8.1 Angulo entre rectas que se cruzan.

8.1.1 METODO DE LA RECTA.

Para determinar el ángulo entre dos rectas por el método de la recta, es necesario que ambas se proyecten en dimensión verdadera.

En la figura **8.2** se dan las rectas que se cruzan **AB** y **CD**.

1) Se halla la dimensión verdadera y la vista de punta de la recta **CD** utilizando las vistas auxiliares **H – 1** y **1- 2**.
2) Luego se traza la vista **2 – 3** paralela a la recta **AB**, en este plano de proyección las dos rectas estarán en dimensión verdadera y así se obtiene el ángulo buscado.

NOTA: Cualquier plano de proyección que tracemos a partir de la vista de punta, dará la dimensión verdadera de la recta **CD**.

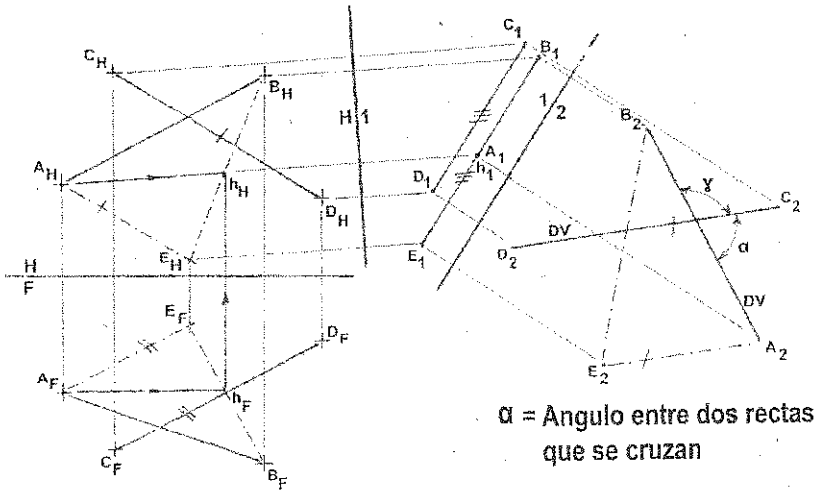


Fig. 8.2 Angulo entre rectas que se cruzan.

8.1.2 METODO DEL PLANO

Para determinar el ángulo entre dos rectas que se cruzan, por el método del plano, es necesario trazar un plano por una de las rectas y que sea paralelo a la otra recta dada; en la vista donde el plano y la recta se proyecten en dimensión verdadera, se observará el ángulo que forman las dos rectas dadas.

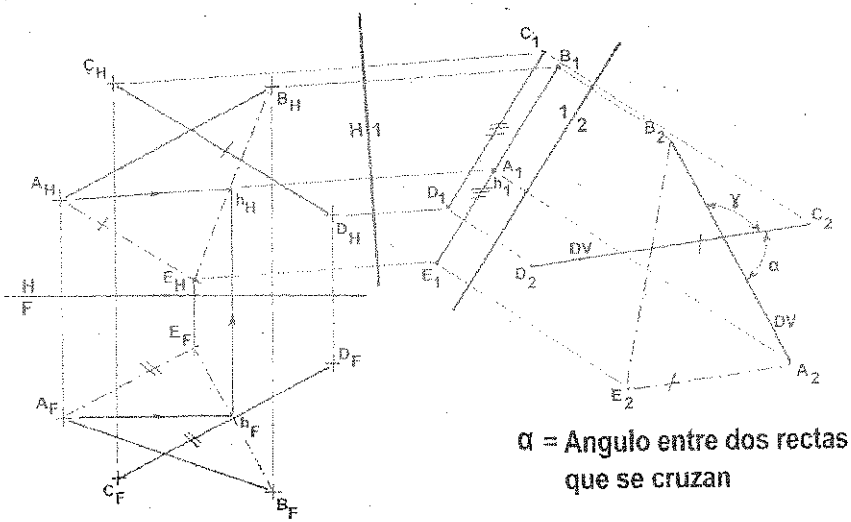


Fig. 8.3 Angulo entre rectas que se cruzan.

En la figura 8.3 se dan las rectas que se cruzan AB y CD; se desea hallar el ángulo que forman estas rectas.

PROCEDIMIENTO:

1) Por uno de los extremos de una de las rectas trazamos un plano paralelo a la otra recta dada.
2) Se halla la dimensión verdadera del plano formado, en este plano de proyección la recta paralela al plano se proyecta también en dimensión verdadera.
3) El menor de los ángulos que forman estas dos rectas dadas, será el ángulo buscado entre dos rectas que se cruzan.

8.2 ANGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.

Cuando una recta no está contenida en un plano, él ángulo formado por esta recta con su proyección sobre el plano se llama ángulo entre la recta y el plano.

El ángulo que forman una recta y un plano se observará en aquel plano de proyección en que la recta se proyecte en dimensión verdadera y el plano en vista de canto. Para determinar dicho ángulo tenemos tres métodos:

1) Método de la recta.
2) Método del plano.
3) Método del ángulo complementario

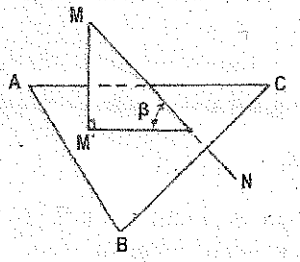


Fig. 8.4 Angulo entre recta y plano.

8.2.1 METODO DE LA RECTA

Para poder observar el ángulo de una recta con un plano en su dimensión verdadera, es necesario que la recta se proyecte en dimensión verdadera y el plano se proyecte de filo.

En la figura **8.5** se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta **MN** y del plano **ABC**; se desea hallar el ángulo que forman.

PROCEDIMIENTO:

1) Se halla la vista de punta de la recta **MN**.
2) Se halla la vista de filo del plano **ABC** en el plano de proyección **3**; en este plano de proyección la recta **MN** se proyecta en su dimensión verdadera.
3) El menor de los ángulos que forman la recta y el plano en el plano de proyección "3", será el ángulo buscado.

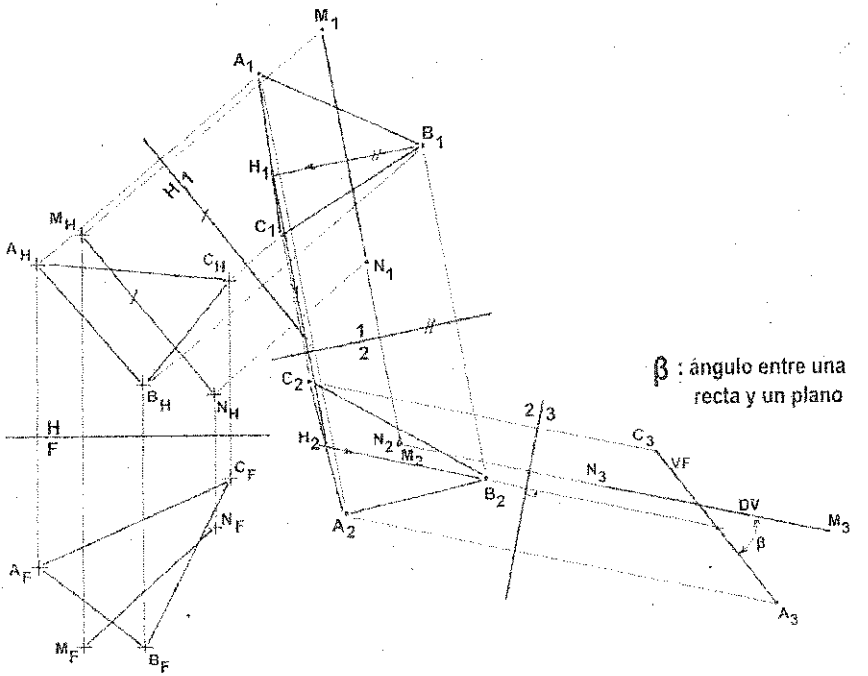


Fig. 8.5 Angulo entre recta y plano.

8.2.2 METODO DEL PLANO.

Para determinar el ángulo que forman una recta y un plano, es necesario que el plano se muestre de filo y la recta en su dimensión verdadera.

En la figura 8.6 se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta MN y del plano ABC; se desea hallar el ángulo que forman.

PROCEDIMIENTO:

1) Hallar la vista de filo el plano ABC.
2) Proyectar en el plano de proyección "2" en su dimensión verdadera al plano ABC.
3) En el plano de proyección "3" proyectar a la recta MN en su dimensión verdadera y al plano en vista de filo; el menor de los ángulos que forman, será el ángulo buscado.

NOTA:

Un plano de proyección que esté relacionada con la dimensión verdadera del plano y que muestre a la recta dada en su dimensión verdadera, también mostrará la amplitud verdadera del menor de los ángulos que hace la recta con el plano.

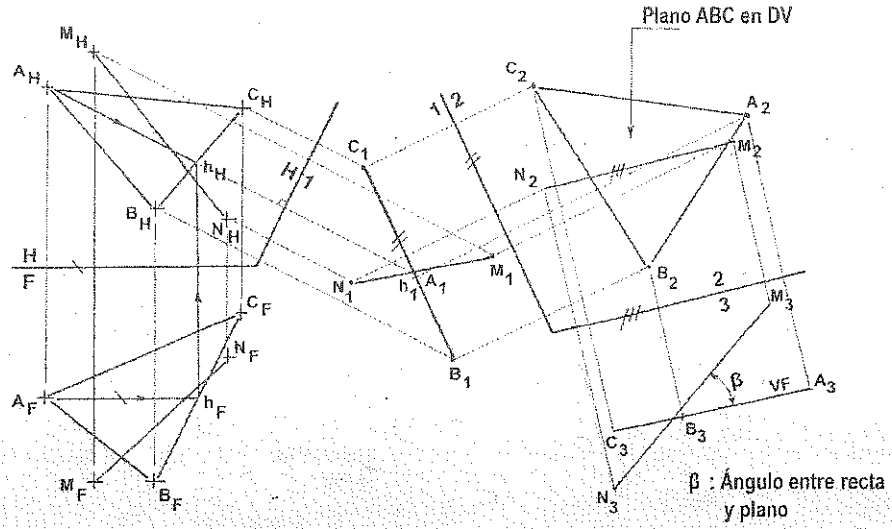


Fig. 8.6 Angulo entre recta y plano.

8.2.3 METODO DEL ÁNGULO COMPLEMENTARIO.

Si la recta MN forma un ángulo β con el plano ABC y un ángulo δ con la perpendicular MR trazada al plano, tal como se muestra en la figura 8.7. El triángulo MRN será rectángulo, y los ángulos β y δ serán complementarios. Por lo tanto determinamos la dimensión verdadera del ángulo complementario, en el plano de proyección donde el plano formado por la perpendicular y la recta se proyecten en dimensión verdadera, y el ángulo buscado será igual a 90° menos la amplitud real del ángulo complementario.

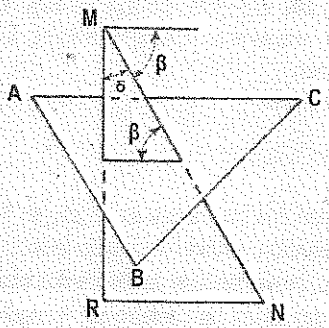


Fig. 8.7 Angulo entre recta y plano.

En la figura 8.8 se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta MN y del plano ABC; se desea hallar el ángulo que forman.

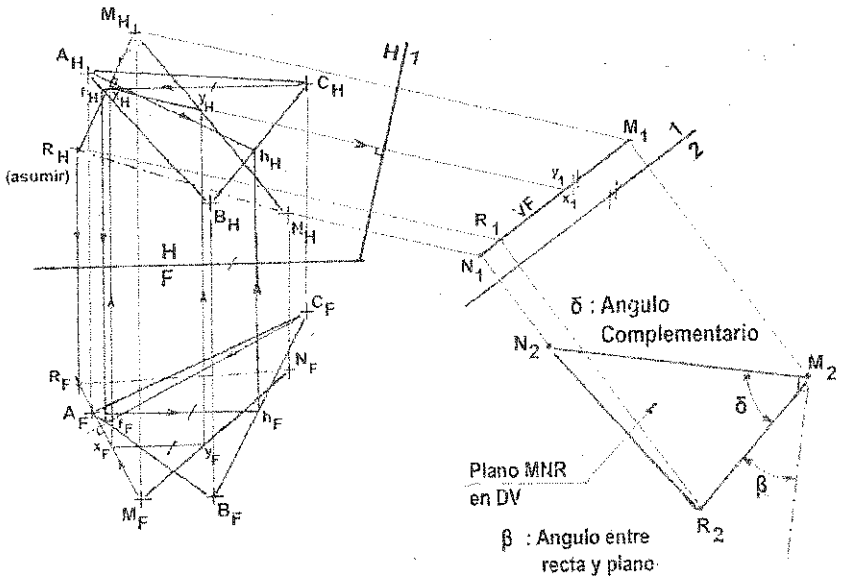


Fig. 8.8 Angulo entre recta y plano.

PROCEDIMIENTO:

1) Desde el punto **M** de la recta **MN**, trazamos una perpendicular al plano **ABC**, la que limitamos en un punto tal como R, formándose el plano **MNR**.
2) Sin considerar al plano **ABC**, determinamos la dimensión verdadera del plano **MNR**; en el plano de proyección "2" observamos que las rectas **MN** y **MR** forman un ángulo entre ellas, que es la amplitud real del ángulo complementario.
3) Desde el punto **M** trazamos una perpendicular a la recta **MN**, el ángulo formado por esta perpendicular a la recta **MN**, el ángulo formado por esta perpendicular y la recta **MR** determina el ángulo **β** buscado, que es el complemento del ángulo **δ**.

   δ: ángulo complementario

   β: ángulo entre recta y plano.

8.3 ANGULO ENTRE PLANOS

El ángulo que forman dos planos que se cortan, se llama **ANGULO DIEDRO**. El ángulo diedro aparecerá en su dimensión verdadera, cuando la recta de intersección de los dos planos dados figura como un punto, proyectándose de filo los dos planos dados; tal como se observa en la figura **8.9**. Se presentan dos casos para determinar el ángulo que forman dos planos y que son los siguientes:

1) Cuando se conoce la recta de intersección.
2) Cuando no es conoce la recta de intersección.

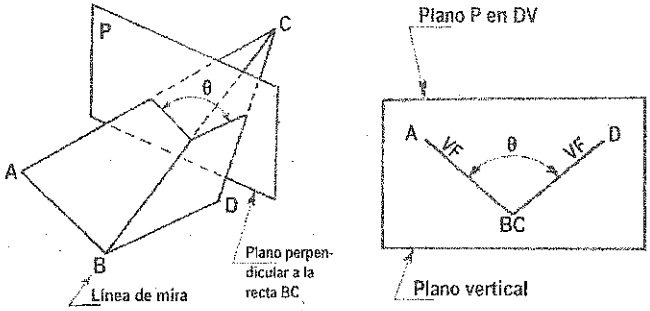


Fig. 8.9 Angulo entre dos planos.

8.3.1 CUANDO SE CONOCE LA RECTA DE INTERSECCIÓN

Un plano de proyección que muestre la recta de intersección de dos planos de punta; también mostrará a los dos planos de filo. El ángulo que forman las dos vistas de filo de los planos que se cortan, representa la amplitud real del ángulo diedro.

En la figura 8.10 se dan las proyecciones horizontal y frontal de los planos ABC y BCD, siendo BC la recta de intersección; se desea hallar el ángulo diedro que forman.

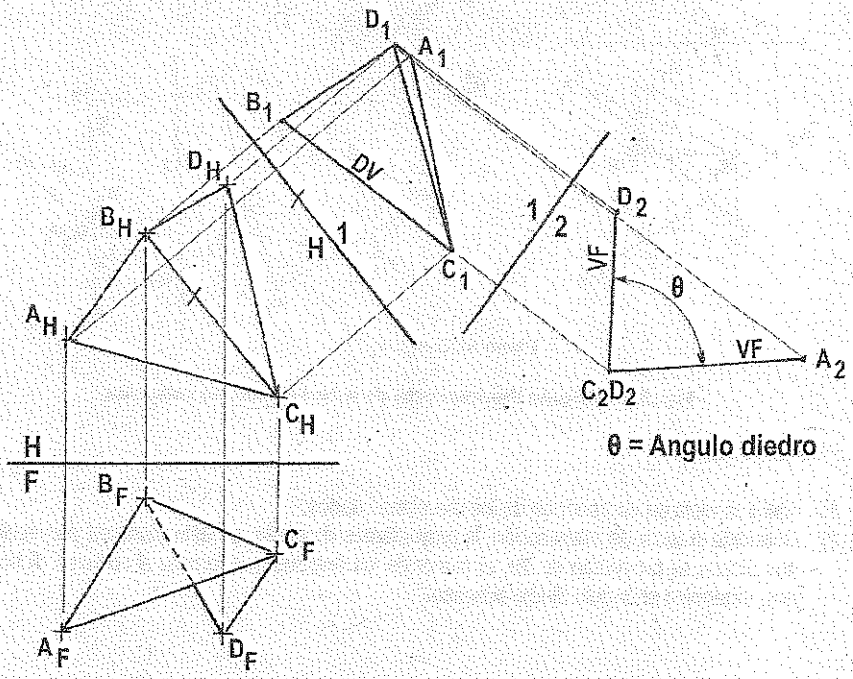


Fig. 8.10 Angulo diedro: recta de intersección conocida.

PROCEDIMIENTO:

1) Hallamos la vista de punta de la recta de intersección BC, apareciendo en este plano de proyección de filos los planos dados.
2) El ángulo que forman al cortarse los planos de filo, determinan el ángulo diedro buscado.

8.3.2 CUANDO NO SE CONOCE LA RECTA DE INTERSECCION.

Para hallar el ángulo diedro real, es necesario conocer la recta de intersección entre los dos planos, luego proyectarla de punta, en este plano de proyección los dos planos dados se proyectarán de filo.

En la figura **8.11** se dan las proyecciones horizontal y frontal de los planos **ABC** y **RST**; se desea hallar el ángulo diedro que forman.

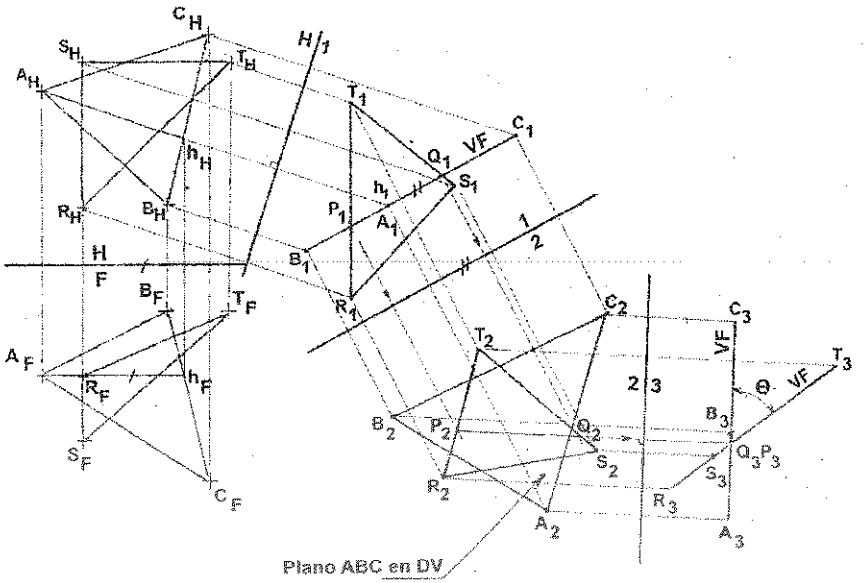


Fig. 8.11 Angulo diedro: recta de intersección no conocida.

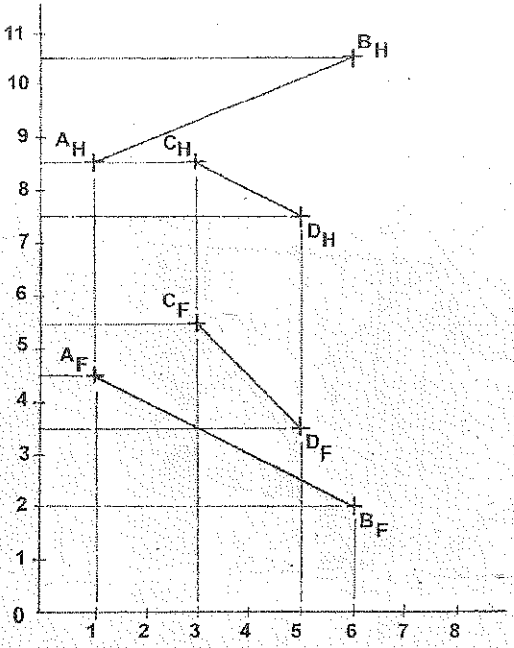
PROCEDIMIENTO:

1) Hallar la recta de intersección de los dos planos dados.
2) Conocida la recta de intersección, la proyectamos de punta, en este plano de proyección los dos planos se proyectan de filo, el menor de los ángulos que forman al cortarse dichos planos, determina el ángulo diedro buscado.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 8.1: Se dan las rectas ilimitadas AB y CD. Hallar las proyecciones de un segmento de mínima longitud MN tal que forme 60° con AB, estando M sobre AB y el otro extremo N sobre CD. A(1,4.5,8.5), B(6,2,10.5); C(3,5.5,8.5), D(5,3.5,7.5)

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.

2) Trazar el plano **CDE** que contenga a la recta **CD** y que sea paralela a la recta **AB**. Desde el extremo **C** se traza la recta **CE** (asumir el punto **E**), que sea paralela a la recta **AB**, para formar el plano **CDE**.

3) Proyectar de canto al plano formado **CDE**, utilizando la recta horizontal **Ch** y el plano de elevación "**1**" perpendicular a la recta horizontal. En este plano de proyección la recta **AB** es proyecta paralelo al plano de canto.

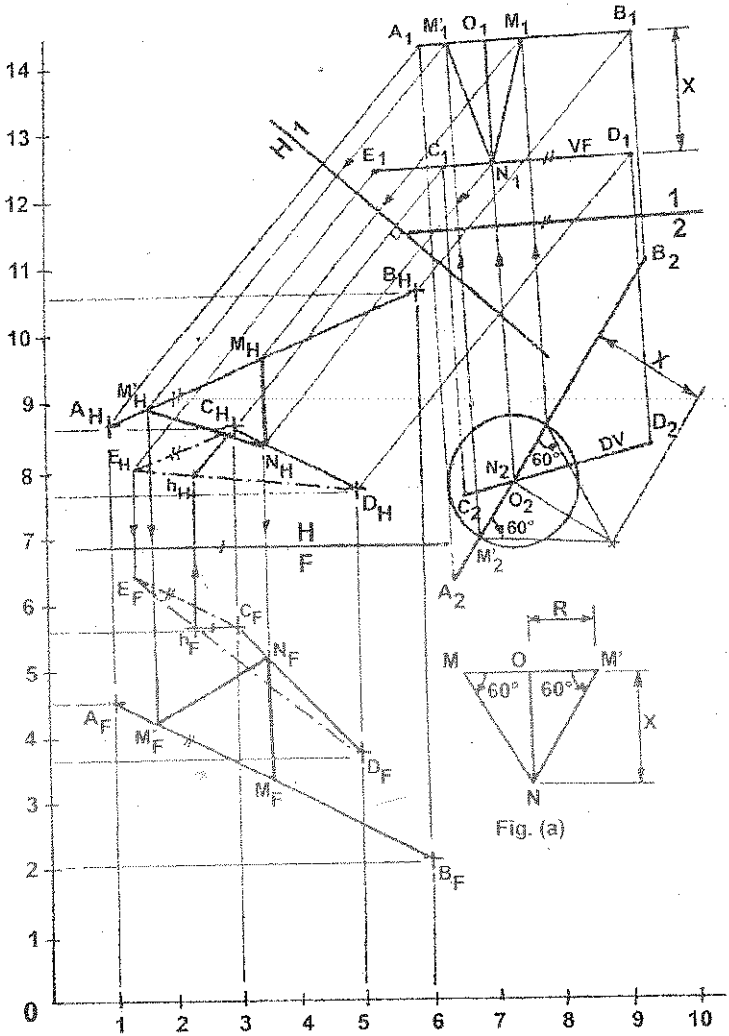
4) Trazar el plano auxiliar "**2**" paralelo al plano de canto **CDE**, para proyectar a este plano en dimensión verdadera. En este plano de proyección la recta **AB** se proyecta en dimensión verdadera, porque es paralela al plano **CDE**.

5) Construir un triángulo equilátero, tal como se muestra en la figura (a), en donde **MM'** es la base de un cono de radio igual a R=OM' =OM y X su altura.

6) En el plano de proyección "2" y con centro en **ON** (perpendicular común) y de radio **R**, trazamos una circunferencia (base de un cono) que corta a la recta **AB** en los puntos **M** y **M'** (dos soluciones); luego proyectar estos puntos a los planos principales.

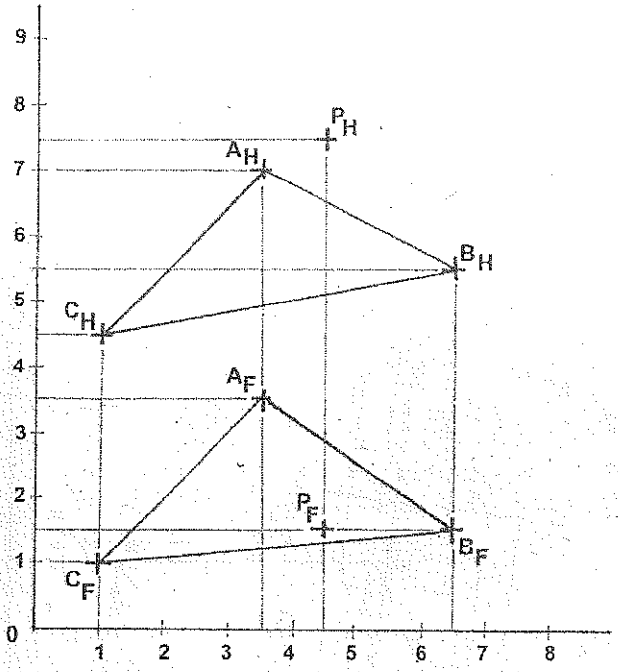
7) Las rectas **MN** y **M'N** representan cada una de ellas el segmento de mínima longitud.

SOLUCIÓN 8.1:



PROBLEMA 8.2: Hallar sobre el plano ABC una recta XY que diste 2.5 centímetros del punto P, situado fuera del plano y que forme un ángulo de 30° con la recta AB.
A(3.5,3.5,7), B(6.5,1.5,5.5), C(1,1,4.5); P(4.5, 1.5,7.5)

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.

2) Proyectar de canto al plano **ABC**, utilizando la recta horizontal **Bh**. Trazar el plano de elevación "**1**" perpendicular a la recta horizontal.

3) Proyectar en dimensión verdadera al plano **ABC**, trazando el plano auxiliar "**2**" paralela a la proyección de canto de este plano.

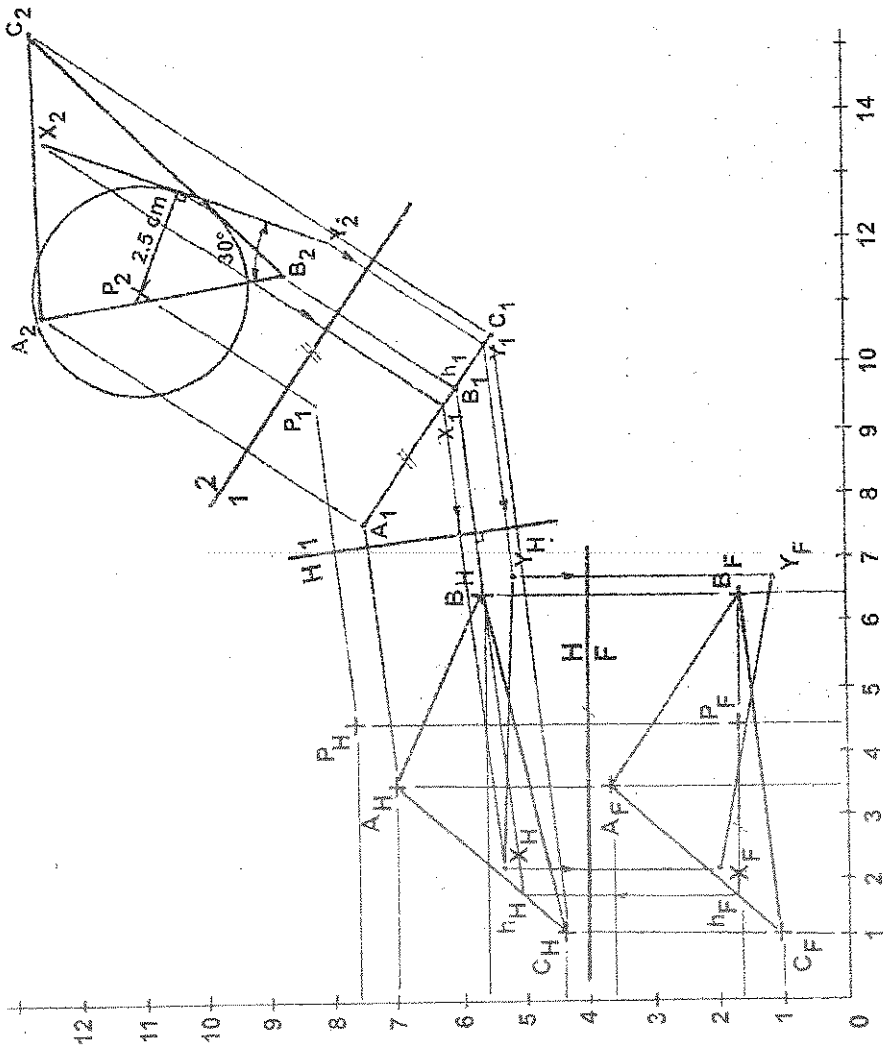
4) En el plano auxiliar "**2**" y con centro en el punto **P**, trazamos una circunferencia de **2.5** centímetros de radio.

5) En el plano auxiliar "**2**" trazar la recta **XY** de longitud arbitraria, tangente a la circunferencia hallada en el paso (4); y que forme un ángulo de **30°** con la recta **AB**. En este plano de proyección la recta XY se proyecta en dimensión verdadera.

6) Proyectar a la recta XY a sus planos principales.

7) En el plano de elevación esta recta está contenida en la proyección de canto del plano **ABC** y por lo tanto paralela al plano auxiliar "2".

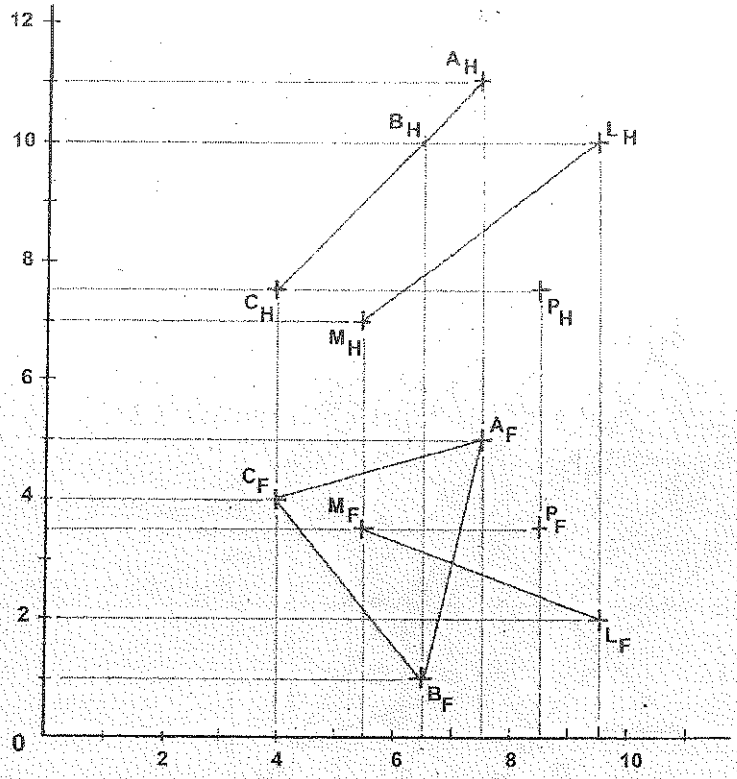
SOLUCIÓN 8.2:



PROBLEMA 8.3: Trazar una recta **PQ** que corte a **LM** y forme con la plano vertical **ABC** un ángulo de **60°**. El punto **Q** está contenido en el plano **ABC**.

P(8.5, 3.5,7.5); L(9.5,2,10), M(55,3.5,7); A(7.5,5,11), B(6.5,1,-), C(4,4,7.5).

DATOS DEL PROBLEMA 8.3:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.

2) Trazar en el plano horizontal la recta **PO** perpendicular al plano **ABC** de canto (plano vertical).

3) Desde el punto **P** y en el plano horizontal, trazar un triángulo equilátero, en donde dos de sus lados forman un ángulo de **60°** con el plano vertical **ABC**; siendo **Od** el radio de la base de un cono.

4) Trazar el plano de elevación "**1**" paralelo al plano de canto **ABC** y proyectar a este plano de proyección, la altura **PO** del cono y la recta **LM**.

5) En el plano de elevación y con centro en **OP** trazamos una circunferencia (base del cono) de radio **R**.

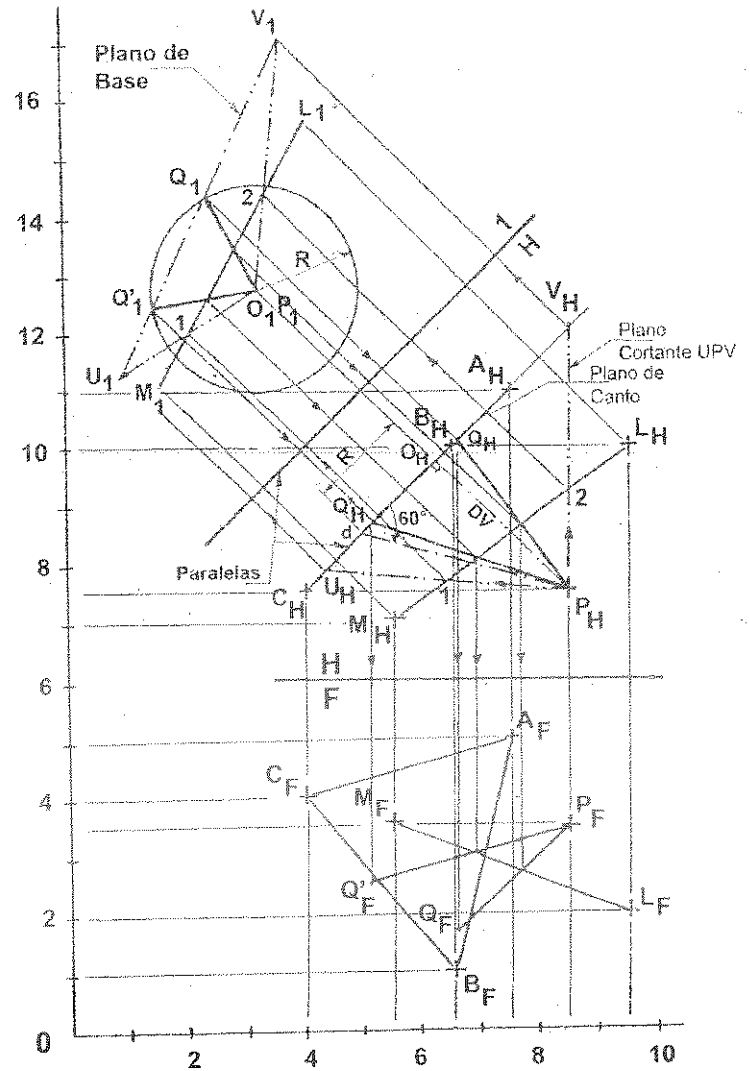
6) Intersectar la recta **LM** con el cono, cuya base tiene la radio **R**. En el plano horizontal trazar el plano cortante **UPV** que corta a la recta **LM** en los puntos **1** y **2**.

7) Proyectar al plano de elevación los puntos 1 y 2, sobre la recta LM; y al plano cortante UPV que pasa por los puntos de corte 1 y 2.

8) En el plano de elevación, unir U con V, y corta a la directriz de la base del cono en Q y Q' (dos soluciones); luego proyectar estos puntos a sus planos principales.

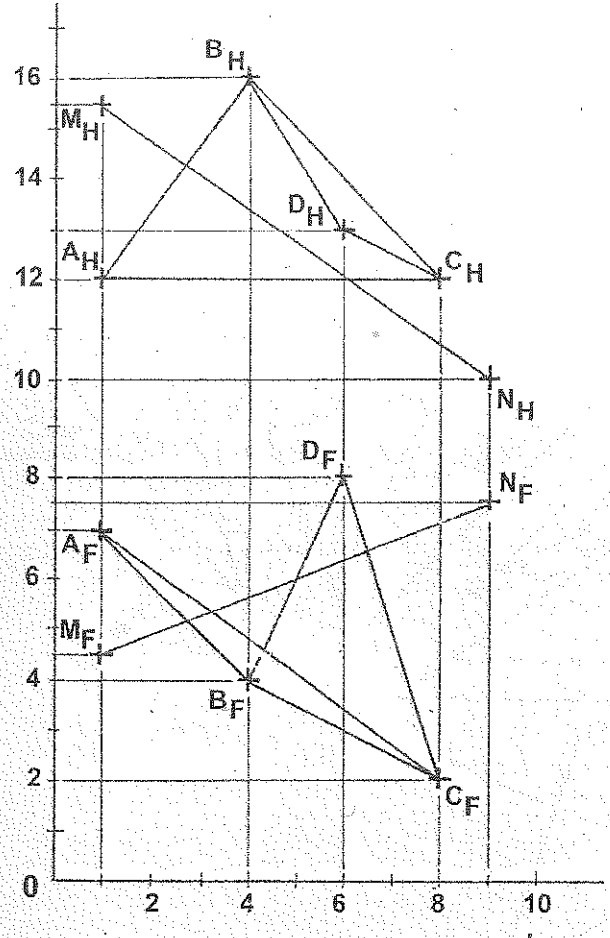
9) Las rectas PQ y PQ' representan cada una de ellas la solución buscada.

SOLUCIÓN 8.3:



PROBLEMA 8.4: Determinar un punto P sobre la recta MN, tal que equidiste de los planos ABC y BCD. M(1,4.5,15.5), N(9,7.5,10); A(1,7,12), B(4,4,16), C(8,2,12), D(6,8,13).

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

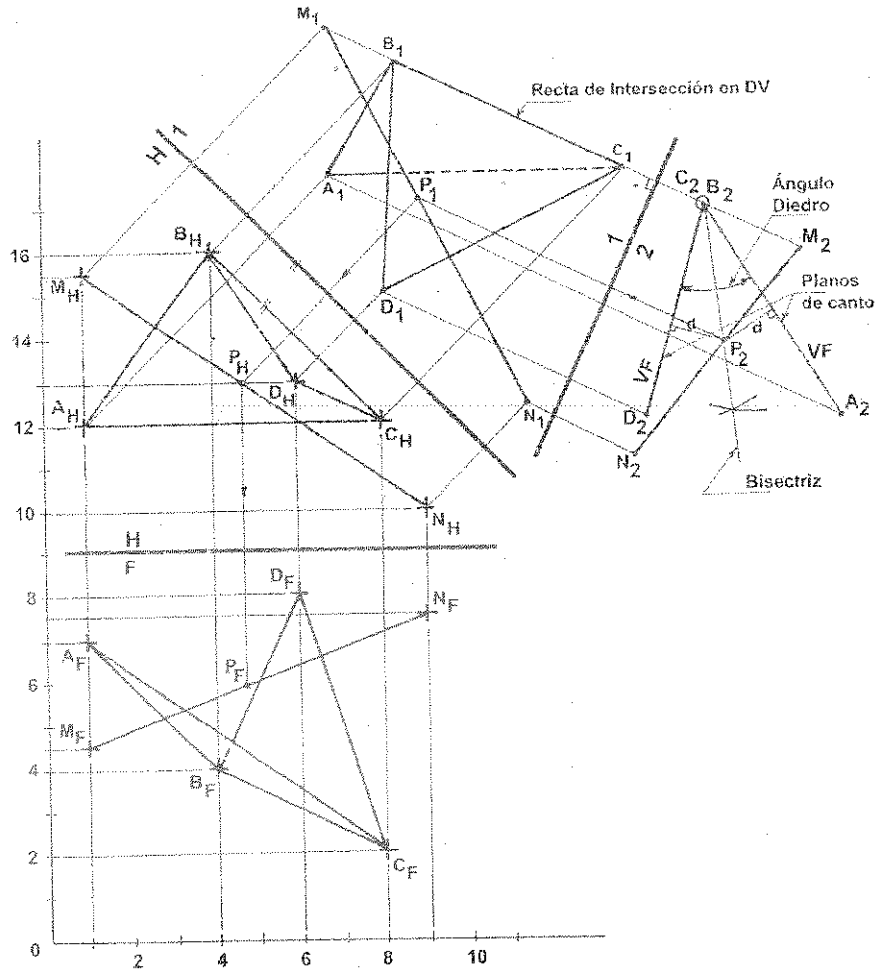
1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas, unir los puntos y formar los planos ABC y BCD.
2) Mostrar la visibilidad de los planos ABC y BCD en sus planos principales.
3) Hallar la dimensión verdadera de la recta de intersección BC de los planos ABC y BCD, utilizando el plano de elevación "1" paralela a dicha recta (BC).
4) Hallar la proyección de punta de la recta de intersección BC, trazando el plano auxiliar "2" perpendicular a dicha recta (BC).

5) En el plano auxiliar "2" los planos **ABC** y **BCD** se proyectan de canto, siendo el ángulo que forman un Angulo Diedro entre dos planos.

6) En el plano auxiliar "2", trazar la bisectriz del ángulo diedro, que corta a la recta **MN** en el punto **P**.

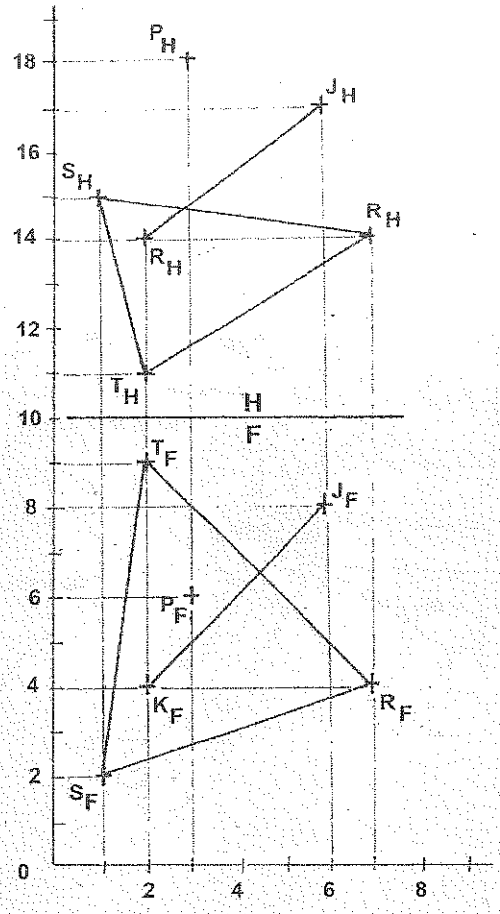
7) En el plano auxiliar "2" al punto **P** equidista de los planos **ABC** y **BCD**, siendo "**d**" la distancia que equidista de dichos planos ; luego proyectar a este punto **P** a sus planos principales.

SOLUCIÓN 8.4:



PROBLEMA 8.5: Trazar una recta PQ que corte a la recta JK y que forme con el plano RST un ángulo de 60°. P(3,6,18); J(6,8,17); K(2,4,14); R(7,4,14), S(1,2,15), T(2,9,11).

DATOS DEL PROBLEMA:

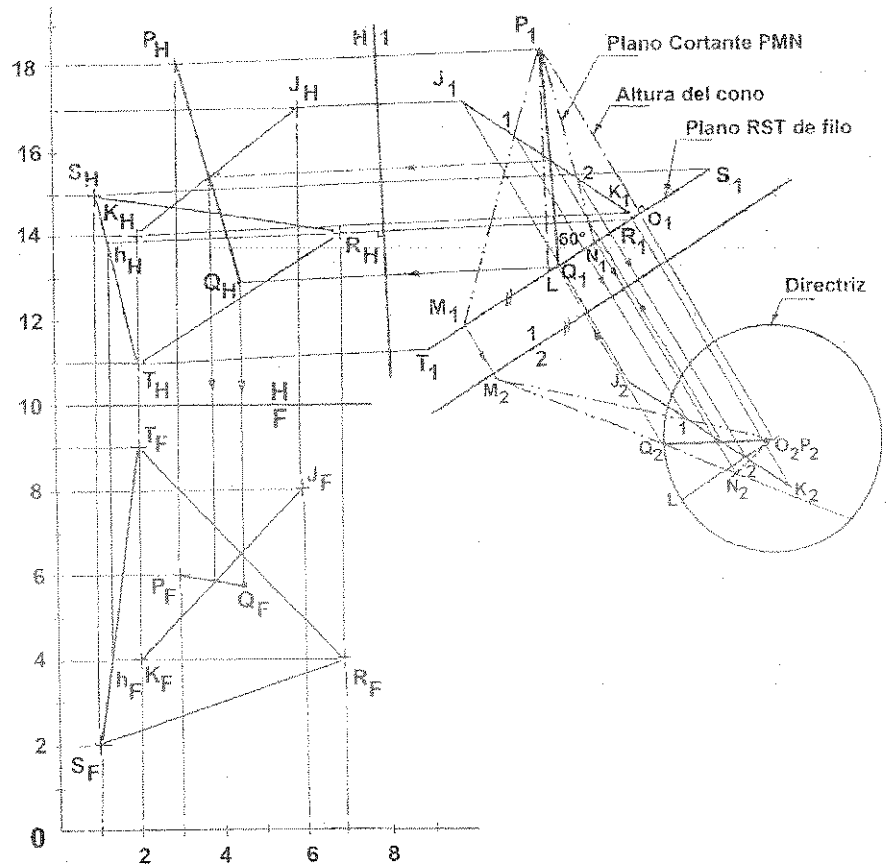


PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Hallar la vista de canto del plano RST, utilizando el plano de elevación "1" perpendicular a la recta horizontal Rh contenida en dicho plano.
3) En el plano de elevación "1" y desde el punto O trazar un cono cuyas generatrices forman un ángulo de 60° con el plano de filo RST; siendo PO la altura del cono. Todas las rectas que forman 60° con el plano de filo RST, es el lugar geométrico de las generatrices de un cono recto perpendicular al plano dado.

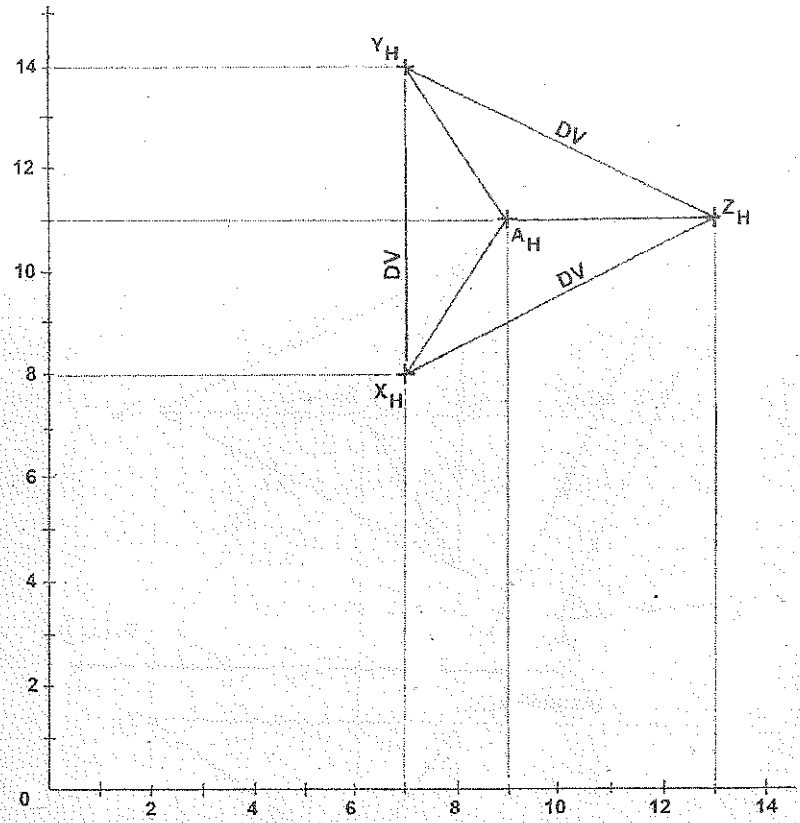
4) Intersectar la recta JK con el cono PLO trazado. Trazar el plano cortante arbitrario PMN que corte a la recta JK en los puntos 1 y al plano de canto RST en los puntos M y N.
5) Trazar el plano auxiliar "2" paralelo al plano de filo RST. En este plano auxiliar trazamos la directriz del cono de radio = OL, proyectamos a la recta JK y los puntos 1 y 2 situados sobre esta recta. Asimismo proyectar los puntos M y N del plano de base del plano cortante PMN.
6) En el plano auxiliar "2" desde la proyección de punta de la altura del cono PO trazamos la generatriz que pasa por el punto 1 y la prolongamos hasta encontrar el punto M.
7) En forma similar trazamos la generatriz que pasa por el punto 2 hasta encontrar el punto N. Luego unir los puntos M y N, que corta a la directriz del cono en el punto Q.
8) En el plano auxiliar "2" unir el punto Q con la proyección de punta de la altura del cono PO y corta a la recta JK en el punto 3; luego proyectar a este punto a sus planos principales.
9) La recta PQ corta a la recta JK en el punto 3 y forma un ángulo de 60° con el plano RST.

SOLUCIÓN 8.5:



PROBLEMA 8.6: Hallar el ángulo que forma el plano horizontal XYZ con los planos AXZ que es un triángulo rectángulo y AXY. Completar sus proyecciones principales.
A(9,-,11), X(7,-,8), Y(7,-,14), Z(13,-,11)

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas y formar los planos según el enunciado del problema.

2) El plano XYZ es horizontal, luego en el plano frontal este plano se proyecta de canto y paralelo al plano de proyección H/F; como no se conoce ningún punto de la proyección frontal de este plano se asume su posición.

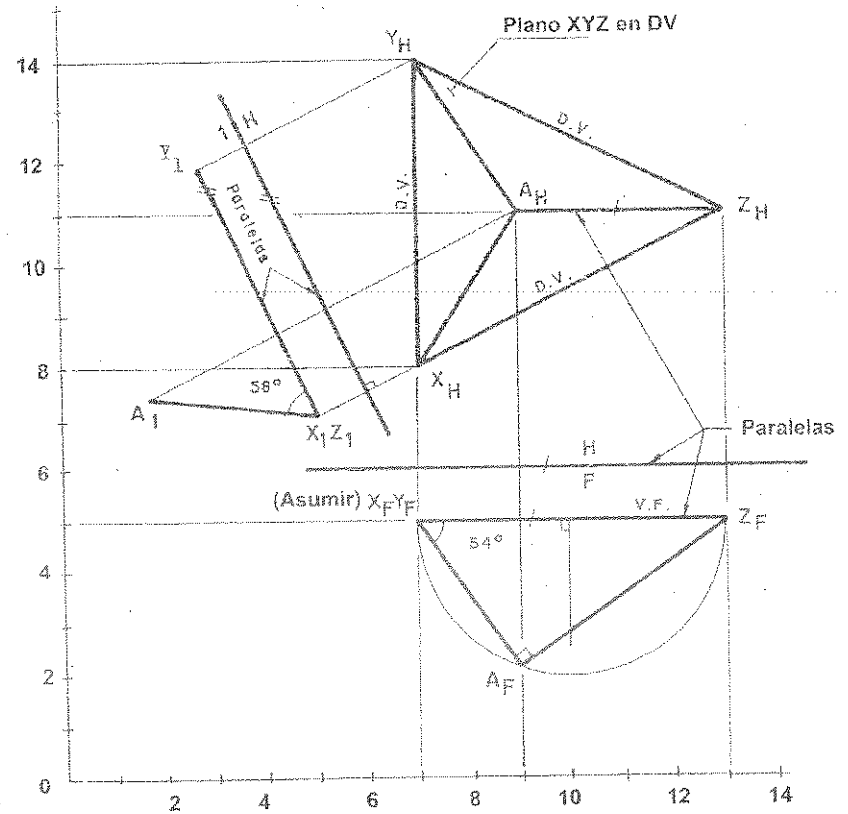
3) El triángulo XAZ es rectángulo en A, luego este plano se puede inscribir en una semicircunferencia.

4) En el plano frontal se conoce XZ, hallamos su punto medio y con centro en este punto trazamos la semicircunferencia y donde corte a la linea de referencia el punto A hallamos su proyección frontal; finalmente unir A con X y Z, formándose el plano XAZ.

5) Medir en el plano frontal el ángulo que forman los planos de filo XYZ y AXY; siendo este ángulo de 54°.

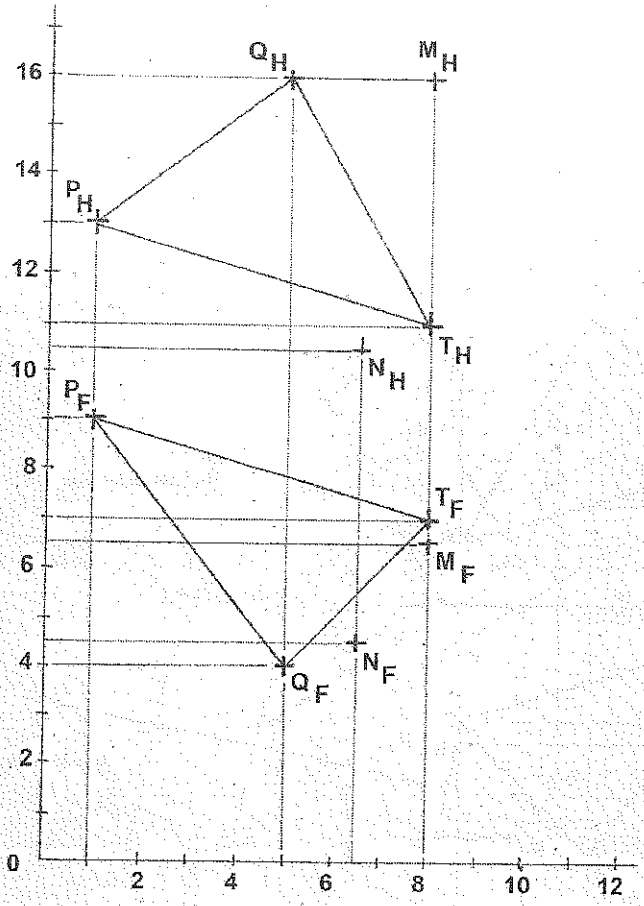
6) El ángulo que forman los planos XYZ y AXZ se determina hallando la vista de canto de estos planos ; luego trazar el plano de elevación "1" perpendicular a la dimensión verdadera de la recta XZ (lado común de ambos planos), y en este plano de proyección hallamos el ángulo que forman de 58°.

SOLUCIÓN 8.6:



PROBLEMA 8.7: Determinar un punto γ en el plano PQT de manera que las rectas Mγ y Nγ, hagan ángulos de 60° y 45° respectivamente, con el plano dado.
P(1,9,13), Q(5,4,16), T(8,7,11); M(8,6.5,16), N(6.5,4.5,10.5)

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas y formar el plano PQT.

2) Hallar la vista de canto del plano PQT utilizando el plano de elevación "1" perpendicular a la recta horizontal Th del plano dado.

3) Desde los puntos M y N trazar las alturas MA y NB de los conos a construir.

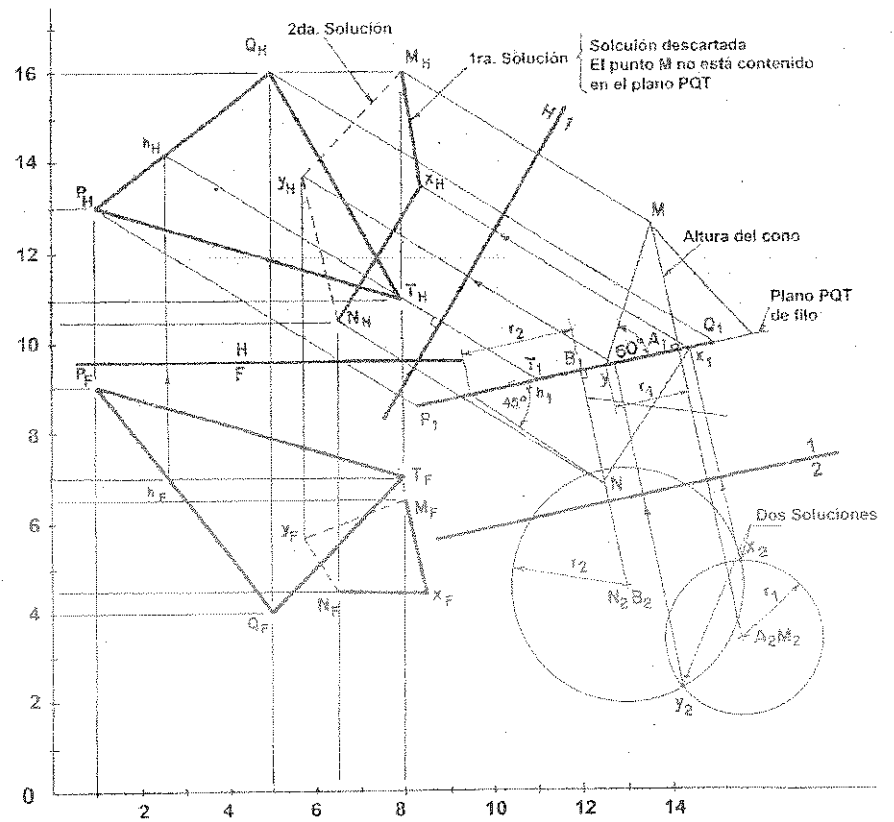
4) Desde los puntos **M** y **N** trazar las generatrices de los conos que forman con el plano de filo los ángulos de **60°** y **45°** respectivamente. Ver el plano de elevación "1".

5) Trazar el plano auxiliar "2" perpendicular a las alturas de los conos, para proyectar en dimensión verdadera a las bases de los conos. Con centro **A** y **B** y de radio r_1 y r_2 respectivamente trazar las directrices de los conos.

6) En el plano auxiliar "2" las directrices trazadas de los conos, se cortan en los puntos **X** e **Y**; luego proyectar a estos puntos a sus planos principales. Finalmente unir **X** e **Y** con **M** y **N** respectivamente.

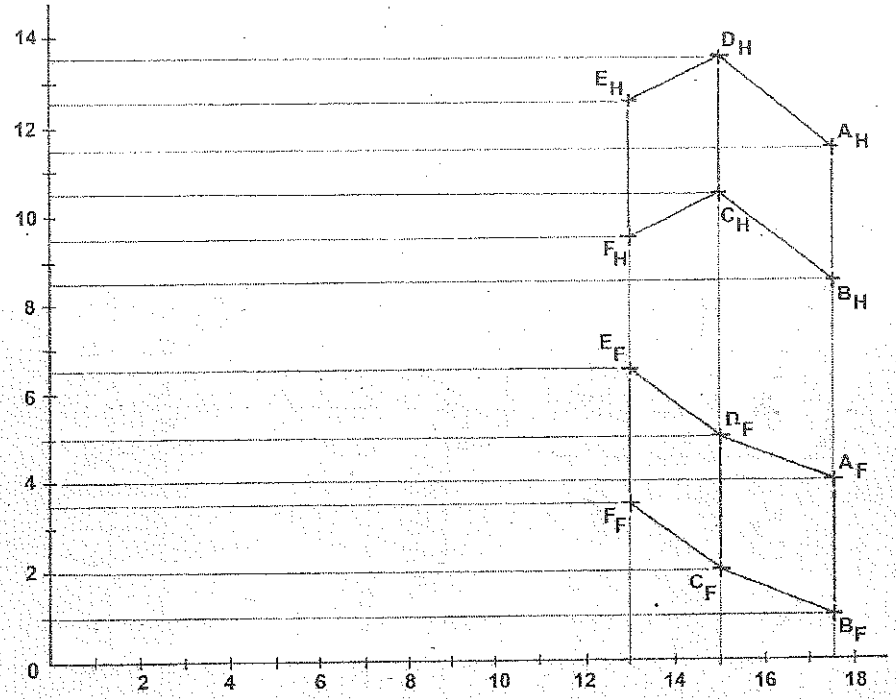
7) En los planos principales observamos que el punto **Y** se encuentra contenida en el plano **PQT**, más no así el punto **X**, luego descartamos este punto como solución.

SOLUCIÓN 8.7:



PROBLEMA 8.8: Determinar el ángulo diedro que forman los planos ABCD y CDEF; además encontrar un punto "X" que equidiste 1 centímetro de los planos dados.
A(16.5,4,11.5), B(16.5,1,8.5), C(14,2,10.5), D(14,5,13.5); E(12,6.5,12.5), F(12,3.5,9.5).

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas y formar los planos **ABCD** y **CDEF** de acuerdo al enunciado del problema.

2) Para determinar el ángulo diedro entre dos planos se requiere hallar la vista de canto de ambos planos, pero como se conoce la recta de intersección **CD**, bastará hallar la proyección de punta de dicha recta.

3) Trazar el plano de elevación "**1**" paralelo a la recta de intersección **CD** de ambos planos, para determinar su dimensión verdadera.

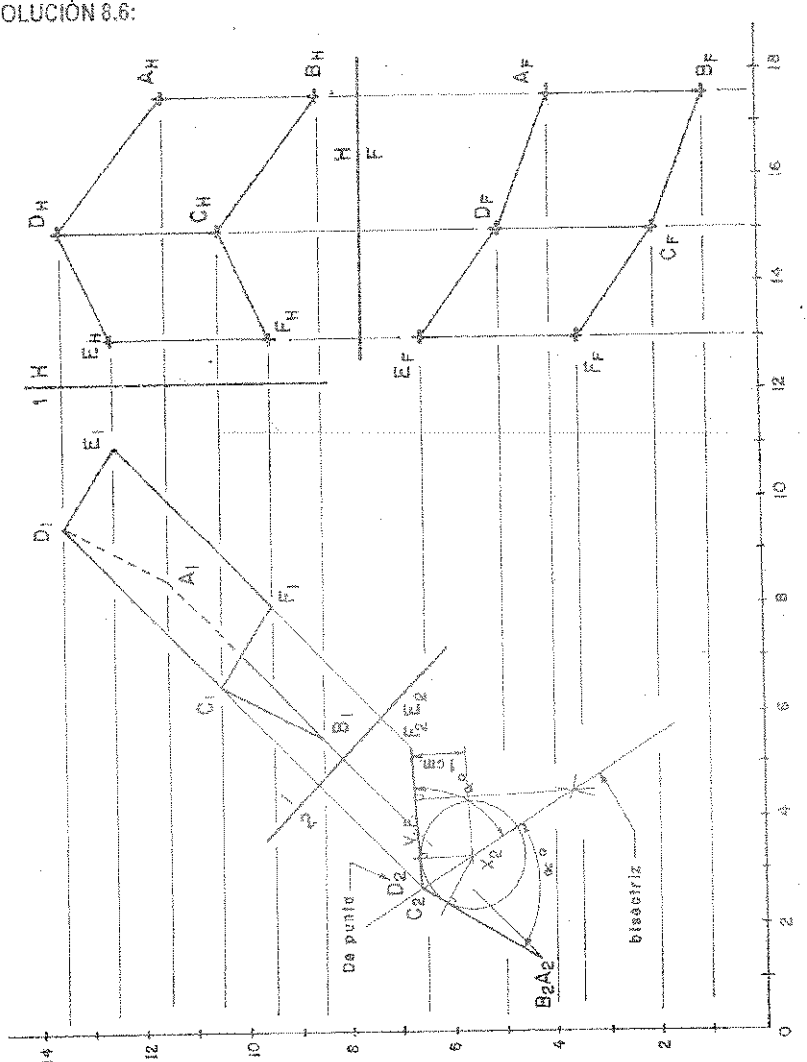
4) Trazar el plano auxiliar "**2**" perpendicular a la dimensión verdadera de la recta de intersección **CD**. En este plano de proyección los planos **ABCD** y **CDEF** se proyectan en vista de filo y el ángulo que forman es el ángulo entre estos dos planos; siendo el ángulo diedro de **125°**.

5) Para encontrar el punto X que equidiste 1 centímetro del diedro hallado se necesita trazar la bisectriz del ángulo diedro.

6) En el plano auxiliar "2" trazar una recta paralela a uno de los planos de filo y a una distancia de 1 centímetro hasta que corte a la bisectriz del ángulo diedro en el punto "X".

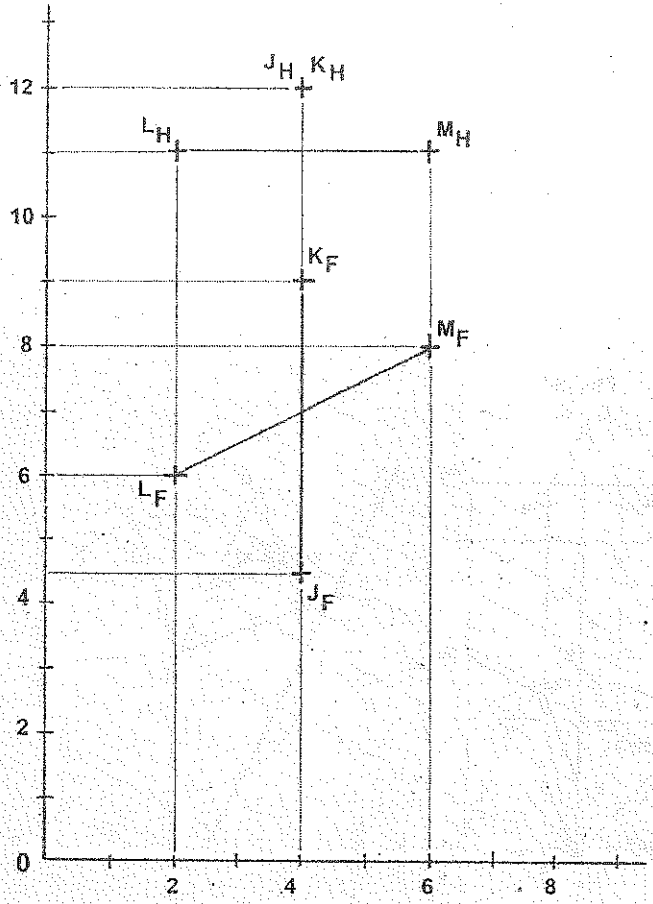
7) En el plano auxiliar "2" y con centro en X y de radio 1 centímetro, trazar una circulo tangente a los dos planos de filo; este punto X equidista 1 centímetro de los planos de filo.

SOLUCIÓN 8.6:



PROBLEMA 8.9: Se dan las rectas que se cruzan LM y JK, trazar la recta AB que corte a dichas rectas y que forme con la recta LM un ángulo de 50° y con la recta JK un ángulo de 40°.
L(2,6,11), M(6,8,11), J(4,4.5,12), K(4,9,12).

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos dados según sus coordenadas y formar las rectas LM y JK.
2) En el plano frontal las rectas LM y JK se proyectan en dimensión verdadera, por ser rectas horizontal y vertical respectivamente.
3) En el plano frontal y con centro en J se construye una esfera de radio arbitrario. Se elige el punto J por ser el punto de mayor cota.
4) Trazar el plano de inclinación "1" perpendicular a la recta LM, en este plano de proyección esta recta se proyecta de punta.

5) Tomando como **JK** y la línea de referencia del punto **J** (paralela a **LM** y trazada hacia el plano de inclinación "**1**"), se inscriben dos conos en la esfera trazada en el paso (**3**), cuyas generatrices forman los ángulos de **40°** y **50°** con las rectas **JK** y **LM** respectivamente.

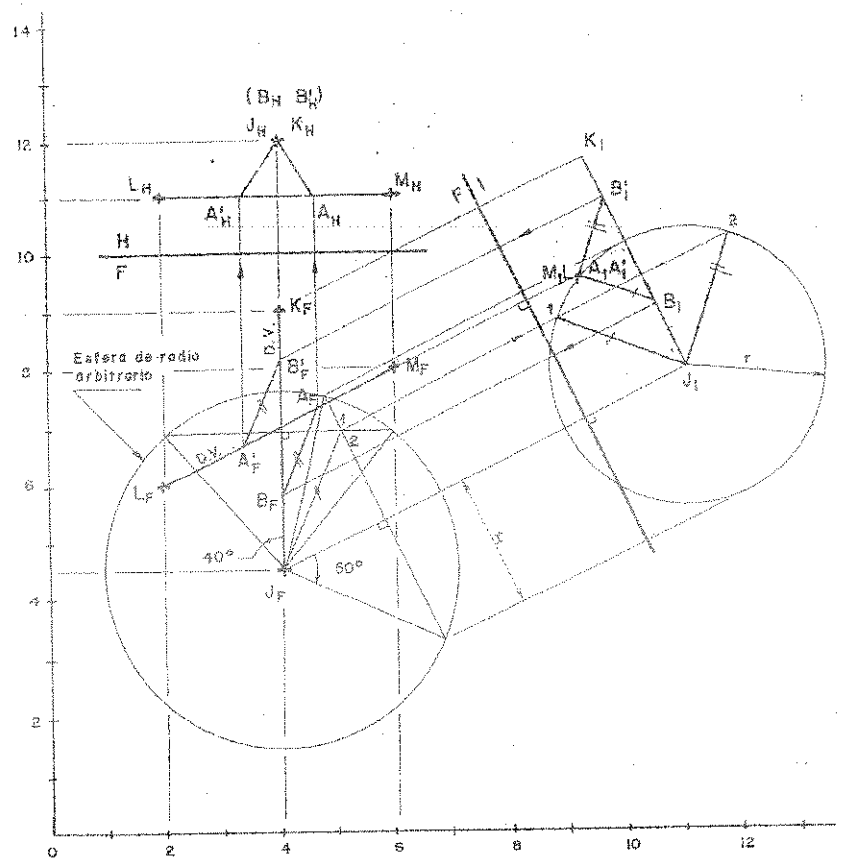
6) Los conos inscritos en la esfera se intersectan, y la línea de intersección de los dos conos, son las generatrices **J1** y **J2**.

7) En el plano de inclinación "**1**" y desde la proyección de punta de la recta **LM**, trazamos las rectas **AB** y **A'B'** paralela a las generatrices **J1** y **J2** respectivamente.

8) Proyectar a las rectas **AB** y **A'B'** a sus planos principales.

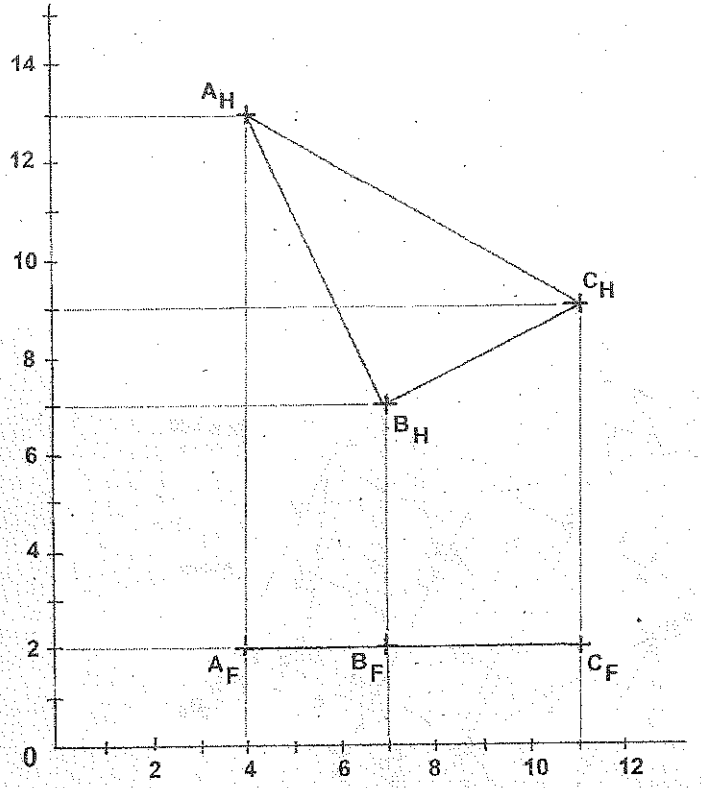
9) En el plano frontal hallamos fácilmente los puntos **B** y **B'**, y desde estos puntos trazamos las rectas **AB** y **A'B'** paralela a la línea de intersección **J1,2**. Los puntos **A** y **A'** están contenidas en la recta **LM**.

SOLUCIÓN 8.9:



PROBLEMA 8.10: ABC es la base de una pirámide ABCD; completar sus proyecciones sabiendo que las caras ABD, BCD y ACD forman ángulos de 30°, 45° y 90° con la base respectivamente. A(4,2,13), B(7,2,7), C(11,2,9)

DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar los puntos A, B, C según sus coordenadas y formar el plano ABC, base de la pirámide ABCD (proyectado de filo en el plano frontal y en D.V. en el plano horizontal).

2) Hallar la proyección de punta de la arista común AB de los planos ABC y ABD, utilizando el plano de elevación "1" perpendicular a AB.

3) En el plano de elevación "1" trazar el ángulo diedro de 30° entre los planos ABC y ABD; pero como no se conoce el punto D, es necesario asumir un punto, tal como P.

4) Hallar la proyección de punta de la arista BC, lado común de los planos ABC y BCD, utilizando el plano de elevación "2" perpendicular a BC.

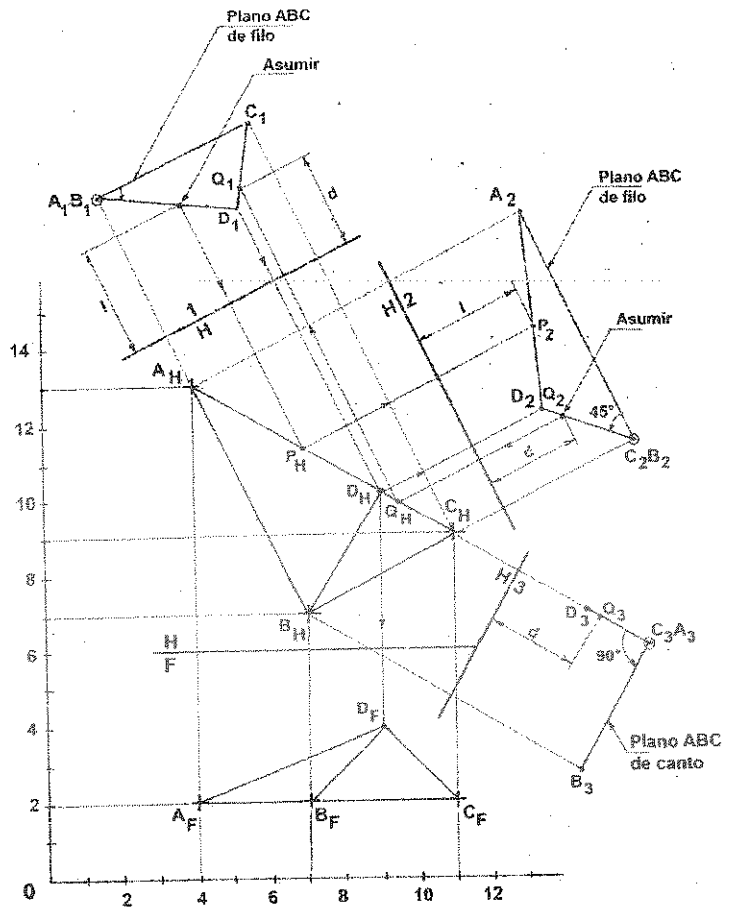
5) En el plano de elevación "2" trazar el ángulo diedro de **45°** entre los planos **ABC** y **BCD**; pero como no se conoce el punto **D**, es necesario asumir el punto **Q**.

6) Hallar la proyección de punta de la arista **AC**, lado común de los planos **ABC** y **ACD**; utilizando el plano de elevación "3" perpendicular a **AC**.

7) En el plano de elevación "3" trazar el ángulo diedro de **90°** entre los planos **ABC** y **ACD**; pero como no se conoce el punto **D** hallamos el punto **Q**, trasladando su cota "**d**". En el plano horizontal el punto **Q** está contenida en la arista **AC**, porque **CD** es perpendicular a **AC**.

8) Proyectar al punto **Q** al plano de elevación "1", luego trazamos la recta **CQ** y la prolongamos hasta cortar a la prolongación de la recta **BP** en el punto **D**; finalmente proyectar a este punto a todos los planos de proyección utilizados.

SOLUCIÓN 8.10:



PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 8.1: Hallar la medida de los diedros de un octaedro regular una de cuyas diagonales es FG y que tiene una arista de perfil. F(4,6,8), G(7,3,11)

PROBLEMA 8.2: Hallar la longitud de una recta BC, que se extiende hacia abajo interceptando a la recta MN en el punto C y haciendo un ángulo de 55° con MN.
ESCALA 1:100 B(14,4,14); M(10,6,14), N(12,1,11)

PROBLEMA 8.3: Medir el ángulo que forma la recta AB con el plano TBC
A(11,7,13), B(13,5,15); T(9,6,14), C(11,3,11)

PROBLEMA 8.4: Determinar el ángulo que forma las rectas AB y CD.
A(7,3,14), B(11,4,17); C(9,1,13), D(13,3,12)

PROBLEMA 8.5: Medir el ángulo entre los planos TBC y LSD.
T(2,5,14), B(5,7,13), C(3,4,11); L(1,7,13), S(4,6,11), D(6,8,12)

PROBLEMA 8.6: Se da el plano formado por la recta AB y el punto C y la proyección frontal del segmento MN contenido en dicho plano. Hacer pasar por este segmento el plano MNR que haga un ángulo de 60° con el plano ABC.
A(9.5,7,16), B(12.5,8.5,13), C(8.5,5,14); M(6.5,10.5,?), N(14.5,5,?)

PROBLEMA 8.7: Las rectas AB y CD hacen un ángulo de 30°. Hallar la proyección frontal del punto D. A(4,5,8), B(8,2,10); C(2,4,8), D(5, ?, 11)

PROBLEMA 8.8: Dibujar las proyecciones de un plano que pase por la recta LM y forma un ángulo de 60° con el plano RST. R(1,7,9), S(3,3,11), T(5.5,5,10); L(1,6,8), M(5.5,4,10)

PROBLEMA 8.9: ABC es la base de una pirámide ABCR. Completar sus proyecciones sabiendo que las caras ABR, BCR y ACR forman ángulos de 60°, 45° y 90° con la base respectivamente
A(6,2,11), B(8,2,8), C(11,2,9.5)

PROBLEMA 8.10: Dadas las rectas AB y PQ, hallar las proyecciones de las rectas que cortan a ambas y hacen 55° con AB y 30° con PQ.
A(4,6,13), B(4,1,13); P(3,5,9) Q(7,3,13)

PROBLEMA 8.11: Completar las proyecciones del plano PQR sabiendo que forma un ángulo de 55° con el plano TBCE.
T(3,7,14), B(8,7,11), C(8,1,11), E(3,1,14); P(2,5,10) Q(7,2,11.5)

PROBLEMA 8.12: Se da el plano formado por la recta AB y el punto C, y la proyección frontal del segmento MN contenido en dicho plano. Hacer pasara por este segmento un plano MNR que haga un ángulo de 60° con el plano ABC.
A(9.5,7.5,16), B(12.5,8.5,13), C(8.5,5,14)

PROBLEMA 8.13: Hallar en el plano ABC una recta CD que forma un ángulo de 60° con la recta CE. A(1,3,12), B(4,3,7.5), C(5.5,3,12.5); E(2.5,6,9.5)

PROBLEMA 8.14: Hallar el ángulo entre los planos ABC y BCD.
A(2,9,11), B(2,5,15), C(6,9,13); D(4,8,11)

PROBLEMA 8.15: Los rectángulos TBCE y LSCE forman un ángulo de 60°. Completar sus proyecciones sabiendo que el rectángulo LSCE tiene el doble del área de rectángulo TBCE.
T(2,6,16), B(4.5,6,14); L(6,9,9.5,21), S(8.5,9.5,19)

PROBLEMA 8.16: Dibujar una recta horizontal TE que forme un ángulo de 45° con la recta TC.
T(3,6.5,13), C(6.5,5,9.5)

PROBLEMA 8.17: Trazar por el punto A una recta que corte a la recta que pasa por los puntos C y L, y que forme con el plano JBG un ángulo de 60°.
A(5,5,16), C(5,8,19.5), L(6.5,5,11); J(1,8,14), B(3,6,12), G (6,10,16)

PROBLEMA 8.18: Trazar un plano que pase por la recta AB, que haga un ángulo de 55° con el plano de perfil. Mostrar el plano en todas las proyecciones.
A(12,7,13), B(16,4,10)

PROBLEMA 8.19: Determinar un punto X en el plano PQT de manera que las rectas MX y NX hagan ángulos de 60° y 45° con el plano respectivamente.
P(2,7,12), Q(6,2,15), T(9,5,9); M(9,4,16), N(7,2,9)

PROBLEMA 8.20: Por el punto D trazar un segmento de 5 cm de longitud, que haga un ángulo de 50° con AB y un ángulo de 30° con CD.
A(3,6,14), B(8,9,17); C(2,4,12), D(9,2,16)

PROBLEMA 8.21: Determinar las proyecciones de un segmento de recta KL, que haga 30° con la línea de pliegue H-F, que tenga sus extremos en los planos principales de proyección (horizontal y frontal) tal que el punto A dado sea su punto medio.
A(8,5,10)

PROBLEMA 8.22: Hallar una recta AB que forme 60° con AC y que se corte con PQ.
A(2,5.5,12), C(5.5,2,8.5); P(2.5,2.9), Q(7,6.5,12.5)

PROBLEMA 8.23: Por el punto P pasar un plano que forme con el plano LMN un ángulo de 60° y cuya distancia al punto O sea de 1cm.
ESCALA 1:1; N(3,3,11), M(4,7,13), L(5,4.5,14.5);
P(6,6,14.5), O(5,6,11.5)

PROBLEMA 8.24: Se dan dos rectas que se cruzan AB y CD. Trazar por le punto A las rectas que corten a AB, bajo un ángulo de 30° y que se encuentren a la distancia de 2cm de CD. Dar todas las soluciones.
A(1,5,12), B(2.5,2,14.5); C(3.5,7,16), D(5,3,11)

PROBLEMA 8.25: Dado el punto A y la recta BC, trazar por el punto A las rectas que se encuentren a la distancia de 2cm de la recta BC, y que forme con ella un ángulo de 45°.
B(2,6,11), C(4,1,15); A(5,5,12)

PROBLEMA 8.26: Determinar la proyección frontal del punto D, sabiendo que la recta CD hace un ángulo de 30° con la recta AB.
A(12,4,8), B(17,4,10); C(15,3,7), D(12,?,6)

PROBLEMA 8.27: Trazar una recta que pase por el punto P, que sea ortogonal a la recta LM que haga un ángulo de 30° con el plano ABC.
P(7,4,14); A(3,5.5,15.5), B(6,2,11), C(8.5,7,14); L(4,7,13), M(4,3,13)

PROBLEMA 8.28: Se dan dos rectas que se cruzan AB y CD, trazar la recta MN que corte a dichas rectas, y que forme con AB un ángulo de 45° y con la recta CD un ángulo de 53°.
A(3,1,9.5), B(6.5,7,15); C(5.5,4,8), C(9,1,14)

PROBLEMA 8.29: Se dan dos rectas que se cruzan LM y JK, trazar la recta AB que corte a dichas rectas, y que se forme con LM un ángulo de 50° y con la recta JK un ángulo de 40°.
L(2,3,8), M(6,5,6); J(4,1.5,9), K(4,6,8)

PROBLEMA 8.30: Hallar el ángulo que hace XA con XB sabiendo que le punto X esta en el segmento MN y equidistante de A y B.
M(2,2,13.5), N(5.5,3,15); A(4.5,6,11), B(8.5,1,16)

CAPÍTULO 9

GIROS

9.1 NOCION DE ROTACIÓN.

En los primeros ocho capítulos se basaba en un principio básico: el objeto nunca se movía de su posición dada. Las diferentes vistas que se obtuvieron se basaron en el hecho de que el observador asume diferentes posiciones o puntos de vista, para obtener cada proyección, pero el objeto permanece en reposo.

En este capítulo veremos que es conveniente mover el objeto, mientras el observador es el que permanece quieto. El movimiento del objeto tiene que ser definido de una manera precisa y clara, debiendo ser de rotación alrededor de un definido y localizado eje. En el proceso de rotación están relacionados:

1) Un eje de rotación
2) Un centro de rotación y
3) Una trayectoria de rotación.

9.1. GIRO DE UN PUNTO ALREDEDOR DE UN EJE.

9.1.1. CUANDO EL EJE DE GIRO ES PERPENDICULAR.

Cuando se hace girar un punto dado con respecto a un eje, el punto está situado a una distancia específica del eje. La figura **9.1** muestra un punto **X** en una posición inicial, situado a una distancia perpendicular **R** de un eje **AB**.

9.1.1.1 Principios Básicos de los Giros.

1) Un punto gira alrededor de un eje según una trayectoria circular, cuyo centro está en el eje.
2) Un punto gira en un plano perpendicular al eje.
3) En la vista en que el eje se proyecta de punta, la trayectoria seguida por el punto es una circunferencia.
4) Cuando el eje se proyecta en dimensión verdadera, la trayectoria se proyecta de canto, siendo perpendicular al eje.

Elementos y Nomenclatura en Giros.

θ : Angulo de giro
X_H : Posición inicial del punto antes del giro.
X_H^G : Posición final del punto después del giro.
e : Eje de giro.
R : Radio de giro.

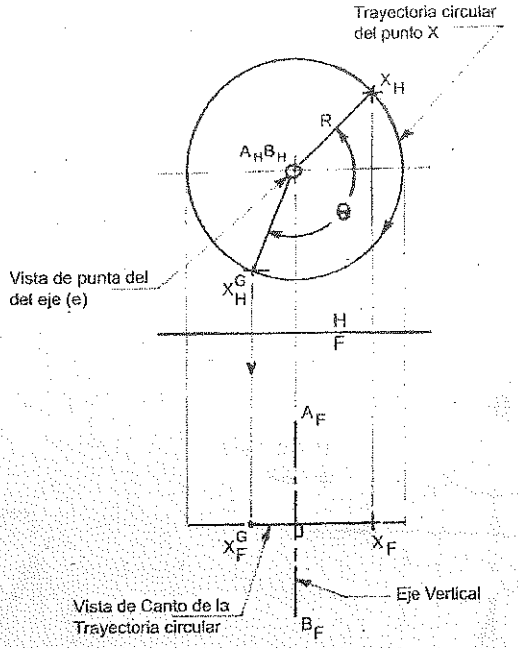


Fig. 9.1 Giro de un punto alrededor de un eje vertical.

9.2.2 CUANDO EL EJE DE GIRO ES OBLICUO.

Cuando el eje de giro es oblicuo, es necesario mostrar al eje en su dimensión verdadera y luego como un punto. En la figura **9.2** la recta **AB** es el eje dado y **X** un punto en cualquier posición. Para realizar el giro del punto **X** alrededor de **AB**, se trazan las proyecciones **1** y **2**, para mostrar al eje en su dimensión verdadera y de punta respectivamente.

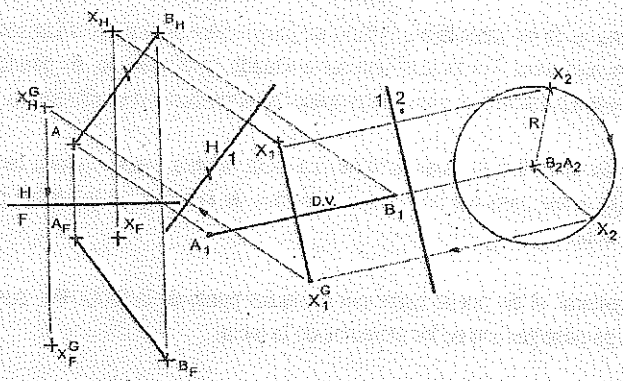


Fig. 9.2 Giro de un punto alrededor de un eje oblicuo.

9.3 GIRO DE UNA RECTA ALREDEDOR DE UN EJE

9.3.1 DIMENSION VERDADERA DE UNA RECTA.

Al hacer girar una recta dada alrededor de un eje, todos los puntos de la misma giran sobre el mismo ángulo y genera un cono circular recto. Todas las generatrices de un cono circular recto son iguales y hacen el mismo ángulo con su base.

En la figura 9.3 la recta oblicua **AB** se muestra pictóricamente y por dos proyecciones ortogonales, el giro que debe realizar para que se proyecte en dimensión verdadera.

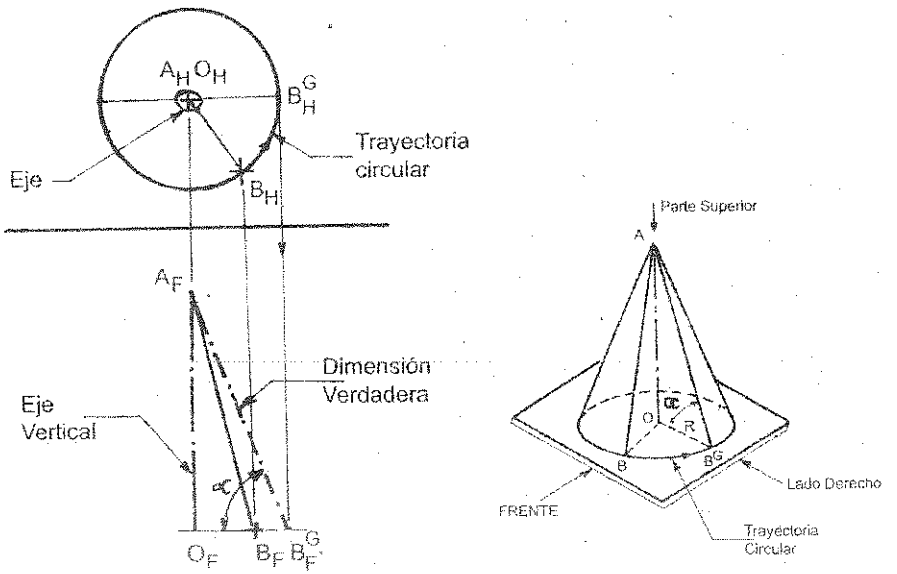


Fig. 9.3 Dimensión verdadera de una recta alrededor de un eje vertical.

Si una recta es paralela a un plano de proyección, será proyectada sobre este plano en su dimensión verdadera. Por tanto si una recta situada en el espacio, es girado alrededor de un eje hasta que sea paralela a un plano de proyección, aparecerá en su dimensión verdadera.

En la figura 9.4 se muestra la misma recta oblicua, siendo girada alrededor de un eje normal. En (a) el eje pasa por uno de los extremos de la recta; en (b) el eje pasa por el punto medio de la recta.

NOTA: En general, el eje puede pasar por cualquier punto de la recta. Por conveniencia, usualmente el eje se pasa por uno de los extremos de la recta.

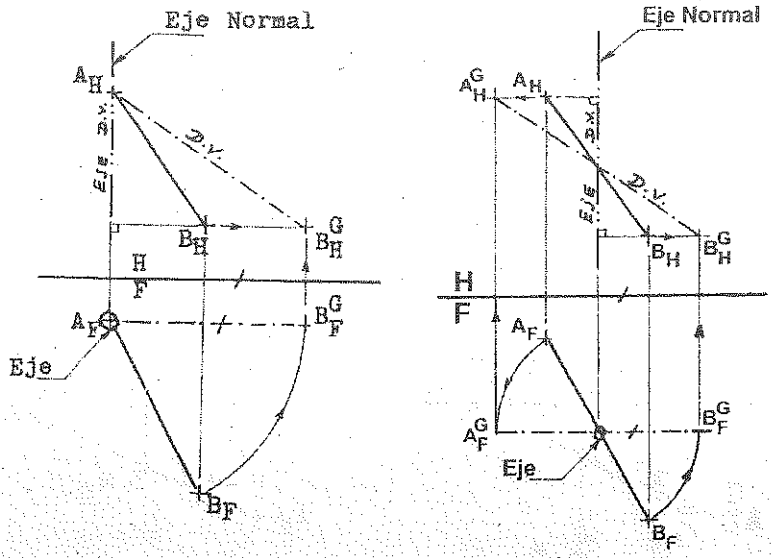


Fig. 9.4 Dimensión verdadera de una recta alrededor de un eje normal.

9.3.2 PENDIENTE DE UNA RECTA.

La pendiente de una recta también puede medirse en la proyección frontal, puesto que la recta aparece en su dimensión verdadera en esta proyección de elevación, tal como se observa en la figura 9.3.

9.3.3 VISTA DE PUNTA DE UNA RECTA.

En la figura 9.5 se dan las vistas principales de una recta oblicua. Para hallar la vista de punta de una recta, es necesario un doble giro. El primer giro es para proyectar a la recta en dimensión verdadera, y con el segundo giro se le proyecta de punta a la recta dada; tal como se observa en la figura 9.6.

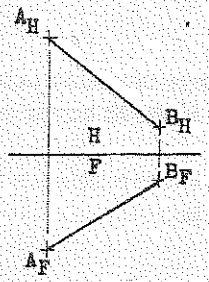


Fig. 9.5 Vista principales de una recta oblicua.

En el ejemplo de la figura 9.6 se muestra el procedimiento para hallar la vista de punta de una recta y es el siguiente:

1) Hallamos la dimensión verdadera de la recta AB utilizando un eje vertical.
2) Hallamos la vista de punta utilizando un eje normal.

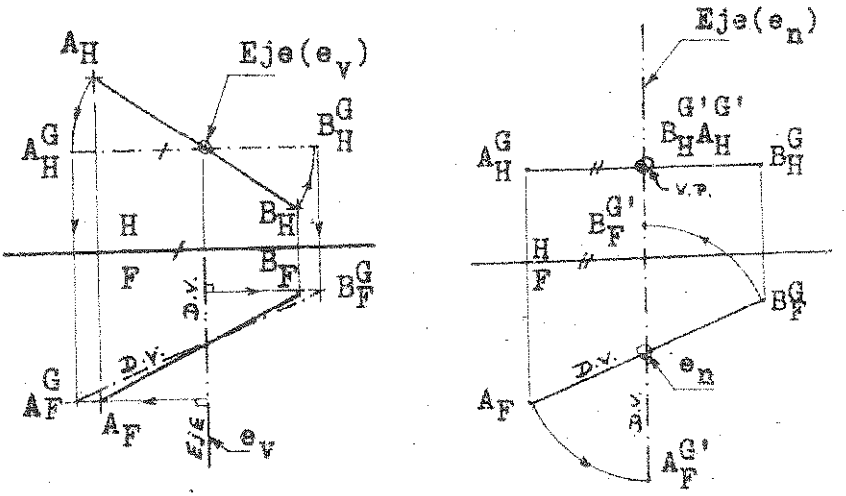


Fig. 9.6 Vista de punta de una recta oblicua.

9.4 GIRO DE UN PLANO.

9.4.1 VISTA DE CANTO DE UN PLANO.

Cuando un plano gira alrededor de un eje todas las rectas del mismo tendrán igual desplazamiento angular. Y si cualquier recta del plano al girar apareciese proyectada de punta, indicaría que el plano se ha puesto de filo.

En la figura 9.7 se dan las proyecciones horizontal y frontal del plano ABC, se desea girar el plano hasta que se proyecte de filo.

PROCEDIMIENTO:

1) Trazamos una recta notable, de preferencia una recta horizontal; tal como Ah.
2) Proyectar de punta a la recta notable Ah trazada; utilizando un eje vertical como se muestra en la figura 9.7.
3) Medimos el ángulo de giro de la recta notable; este ángulo nos permitirá girar los demás puntos para proyectar al plano de filo.

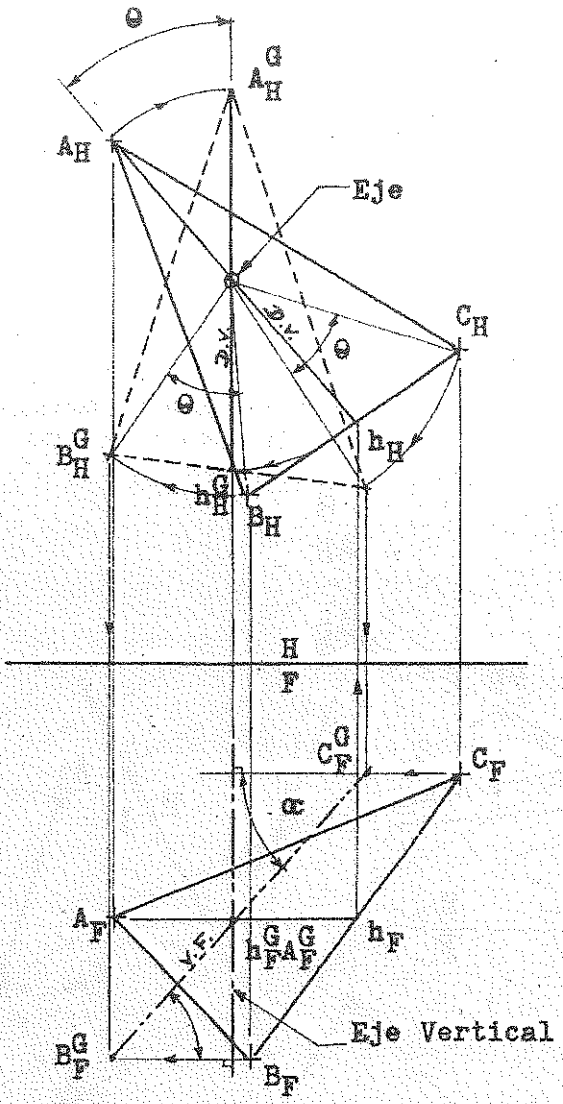


Fig. 9.7 Vista de canto de un plano mediante giros.

9.4.2 INCLINACION DE UN PLANO.

Para determinar la inclinación o ángulo pendiente de un plano mediante giros, utilizamos un eje vertical y cuando el plano se proyecte de filo, el ángulo que forma con la horizontal determinará el ángulo de pendiente buscado.

9.4.3 DIMENSION VERDADERA DE UN PLANO.

Para mostrar un plano en su tamaño real, se deben satisfacer dos condiciones:

1) Se debe girar alrededor de un eje que pertenezca al plano.
2) El eje alrededor del cual se gira el plano debe ser paralelo al plano de proyección sobre el cual se va a proyectar el plano.

En la figura 9.8 se dan las proyecciones horizontal y frontal del plano ABC, se debe girar al plano hasta que se proyecte en su dimensión verdadera.

PROCEDIMIENTO:

1) Se traza un eje que pase por la recta horizontal, luego proyectar de punta al eje elegido.
2) El plano proyectado de filo se gira alrededor del eje proyectado de punta, hasta que sea paralelo al plano horizontal; proyectándose en él en su dimensión verdadera.

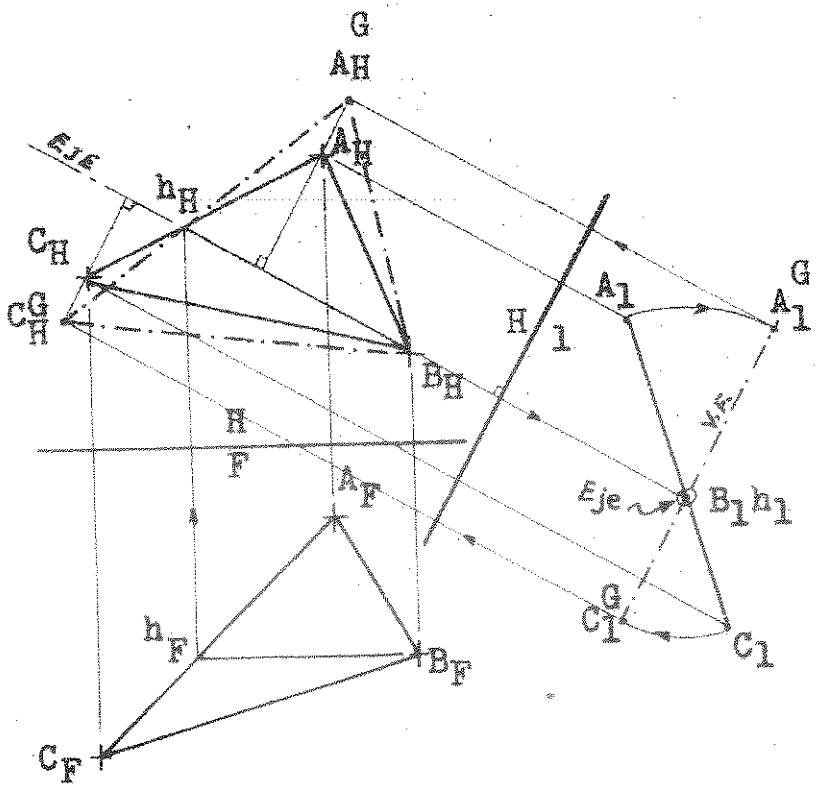


Fig. 9.8 Dimensión verdadera de un plano mediante giro.

9.5 ANGULO ENTRE RECTAS Y PLANOS MEDIANTE GIROS.

El ángulo que forman una recta y un plano no se alterará si la recta gira alrededor de un eje que sea perpendicular al plano. Si la recta gira hasta proyectarse en su dimensión verdadera, entonces el ángulo que forma la recta con el plano de filo, mostrará su amplitud real.

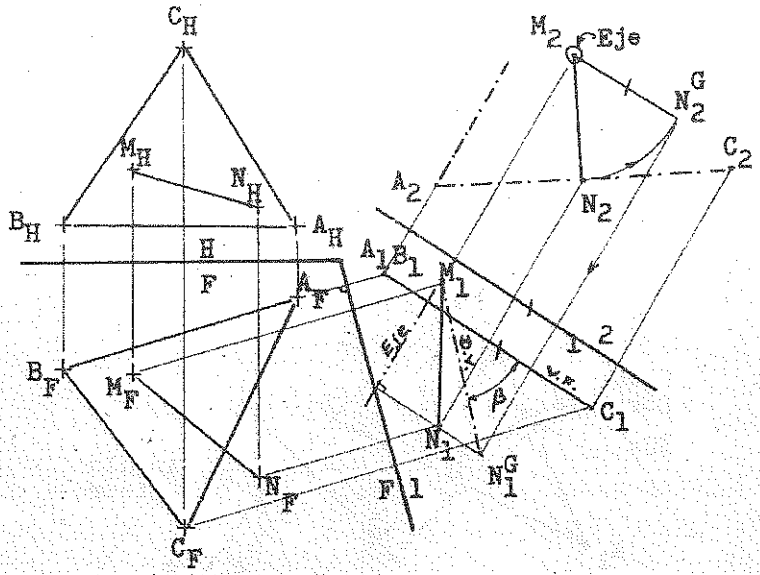


Fig. 9.9 Angulo entre recta y plano.

En la figura 9.9 se dan las proyecciones horizontal y frontal de la recta MN y del plano ABC; se desea conocer el ángulo que forman.

PROCEDIMIENTO:

1) Proyectar al plano ABC en su dimensión verdadera.
2) Cuando el plano aparezca en su dimensión verdadera, girar la recta hasta que se muestre paralelo al plano de proyección "1" y se proyecte en este en su dimensión verdadera.
3) El ángulo formado por el plano de filo y la recta es dimensión verdadera, será el ángulo verdadero.

9.6 ANGULO DIEDRO ENTRE DOS PLANOS.

El ángulo diedro entre dos planos debe ser hallado en un plano que sea perpendicular a la recta de intersección de los dos planos dados. Un plano cortante que sea perpendicular a la intersección de dos planos, determina el ángulo diedro entre dos planos.

En la figura 9.10 se dan las proyecciones horizontal y frontal de los planos ABC y ADC; se desea saber el ángulo diedro que forman.

PROCEDIMIENTO:

1) Hallar la dimensión verdadera de la recta de intersección AC de los dos planos dados.
2) En el plano de proyección "1" trazar un plano cortante perpendicular en un punto cualquiera a la recta de intersección proyectada en dimensión verdadera. Este plano cortante corta a los planos daos en una sección plana indicada como PQR, luego se proyecta estos puntos a la proyección horizontal.
3) Se elige un eje para girar el plano cortante hasta que sea paralelo al plano horizontal y se proyecta sobre este plano, en su dimensión verdadera.
4) Los puntos PQ^GR^G representa el ángulo diedro en su amplitud real.

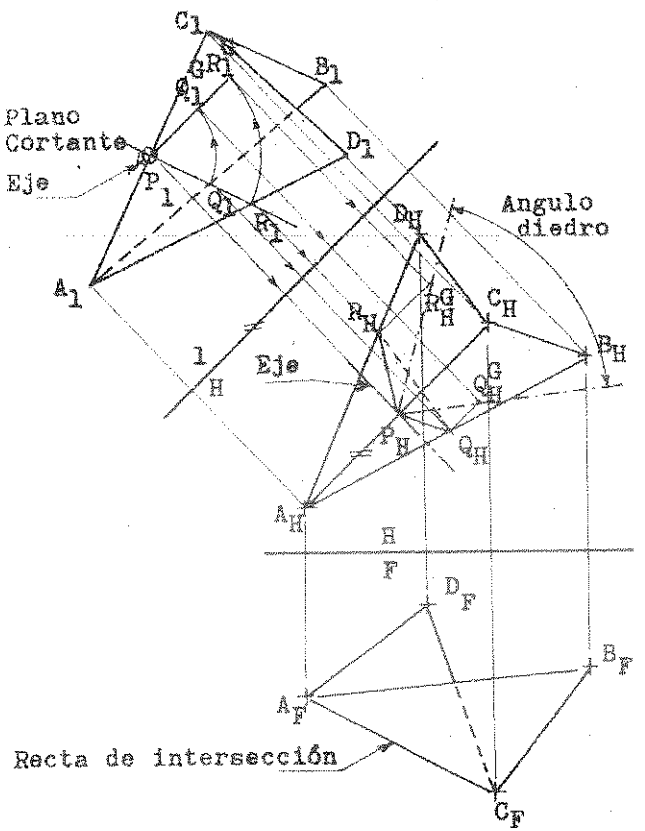
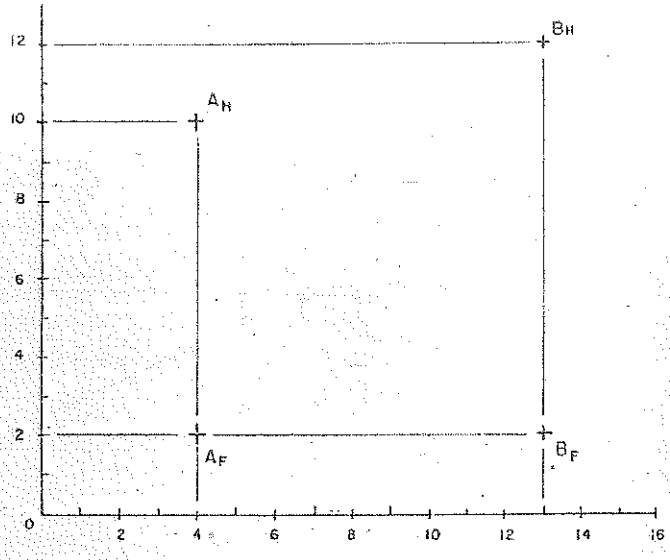


Fig. 9.10 Angulo Diedro entre Planos.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 9.1: Una torre de alta tensión es observada por dos personas situados en diferentes puntos. Una de ellas situado en A mira hacia arriba con un ángulo del 40% y observa la base de la torre en la dirección N45°E. La otra persona situada en B observa la cima de la torre en la dirección N60°O y con una pendiente del 90%. Determinar la altura de la torre de alta tensión, y la diferencia de nivel entre su base y la cima de la torre con respecto a sus puntos.
A(4, 2, 10), B15, 2, 12)

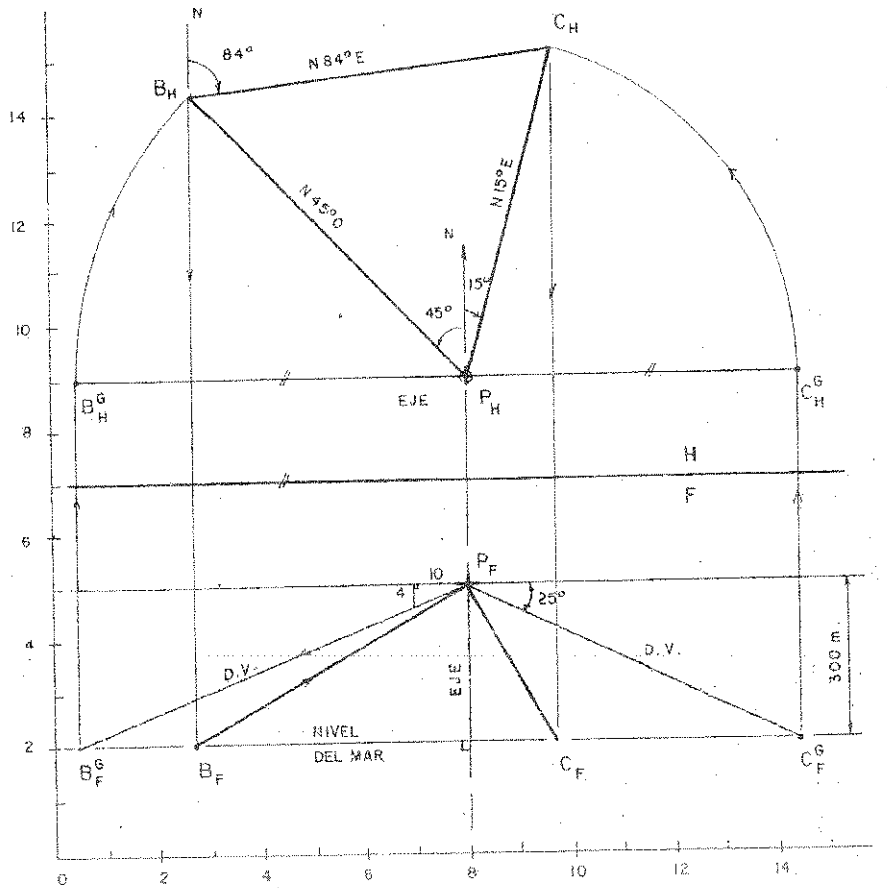
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Desde los puntos A y B trazar las orientaciones dadas, N45°E y N60°O respectivamente, que se cruzan en el punto CD.
3) Trazar el eje vertical y que pase por el punto de cruce DC.
4) En el plano horizontal y con centro en la proyección de punta del eje vertical (DC), giramos los puntos A y B hasta que estas orientaciones sean paralelas a la línea de pliegue H-P.
5) Proyectar los puntos girados A^G y B^G al plano frontal, siendo sus trayectorias perpendiculares al eje vertical.
6) Desde los puntos girados A^G y B^G trazamos las pendientes de las observaciones del 40% y respectivamente. Las rectas A^GC y B^GD se proyectan en dimensión verdadera.
7) Completar las proyecciones iniciales de las inclinaciones dadas, tales como CA y DB respectivamente.
8) E el plano frontal medimos la altura de la torre **CD = 26 metros.** y sus diferencias de nivel con sus puntos de observación son de **23** y **49 metros** respectivamente.

SOLUCIÓN 9.1:

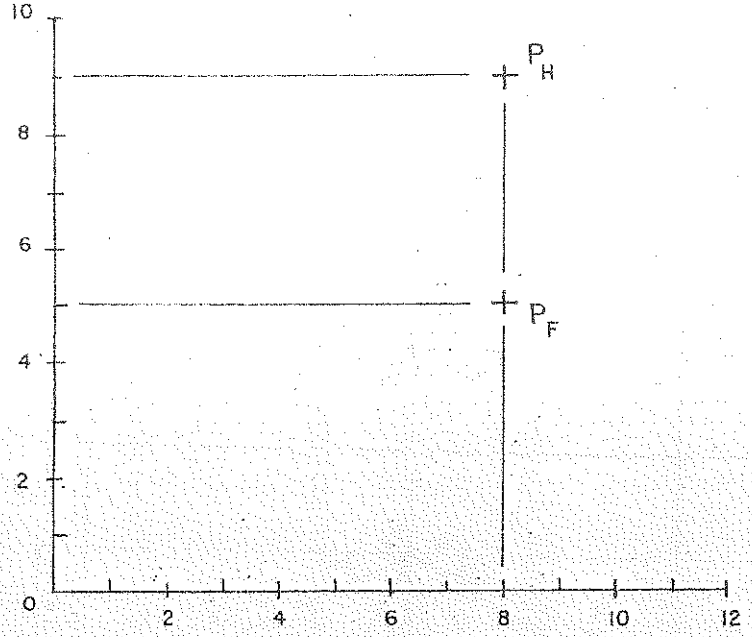


PROBLEMA 9.2: Un pelicano "P" situado en la cima de un islote y a una altura de 300 metros sobre el nivel del mar, observa un banco de anchovetas en dirección N45°O y con pendiente del 40%. Diez minutos después el banco de anchovetas es observado en la dirección N15°E y con pendiente de 25°. Determinar, la velocidad y la dirección en que se dirige el banco de anchovetas.

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Desde el punto P trazar las orientaciones dadas, N45°O Y n15°E respectivamente.
3) Trazar por el punto P el eje vertical.
4) En el plano frontal y desde el punto P trazar la pendiente descendiente del 40% hasta cortar al nivel del mar en el punto girado B^G, la recta PB^G se proyecta en dimensión verdadera.

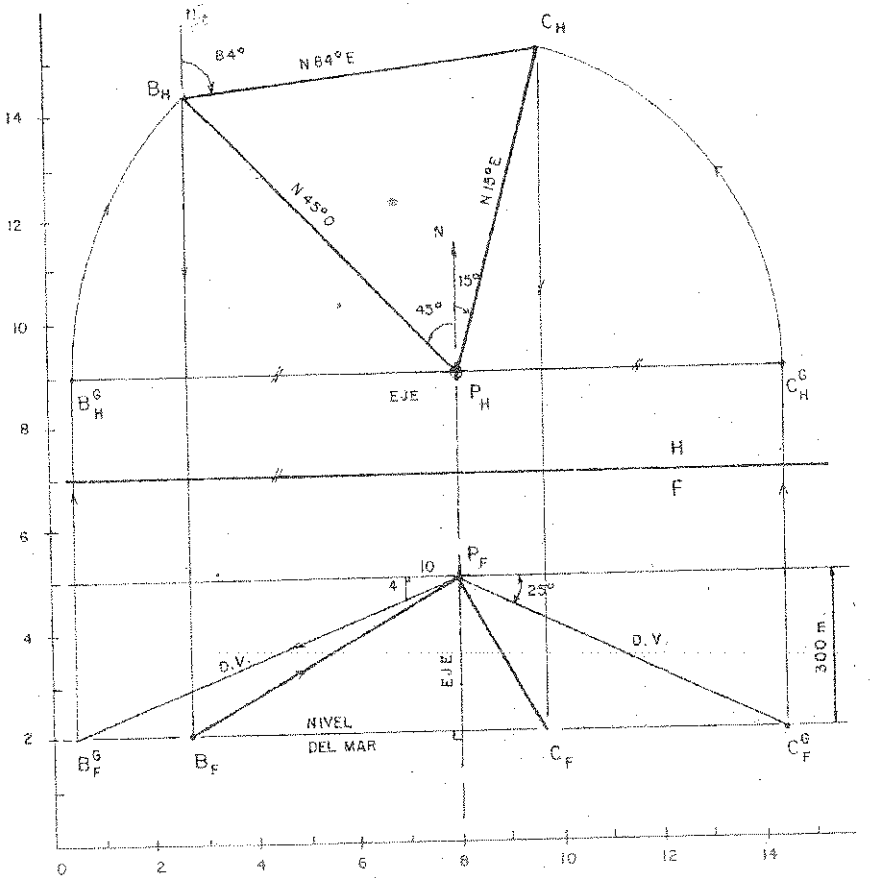
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

5) Proyectar al punto girado B^G al plano horizontal, siendo PB^G paralela al plano de proyección. Luego con centro en P y de radio PB^G giramos a esta recta hasta cortar a la orientación N45°O en la posición inicial del punto B. proyectar este punto al plano frontal y desde B^G trazamos su trayectoria perpendicular al eje vertical, cortando a la línea de referencia de su posición inicial en el punto B_F.
6) En el plano frontal y desde el punto P trazar la pendiente descendiente de 20° hasta encontrar al punto C^G en el nivel del mar; siendo PC^G una recta en dimensión verdadera, en el plano horizontal esta recta es paralela al plano de proyección. Con centro en el eje vertical (P) y de radio PC^G giramos a esta recta hasta cortar a la orientación **N15°E** en el punto C (posición inicial), luego completamos la proyección frontal de este punto trazando desde C^G su trayectoria perpendicular al eje, cortando a la línea de referencia trazada desde el plano horizontal, en el punto C.
7) En el plano horizontal unir los puntos B y C. Determinar:
La velocidad: $v = \frac{e}{t} = \frac{B_H C_H}{t} = \frac{700\,m}{10\,min} = 70\,m/min$
Siendo B_HC_H = **700 metros**, valor hallado en el plano horizontal,
La dirección: en el plano horizontal y desde **B** a **C**, la orientación será: N84°E.

SOLUCIÓN 9.2:

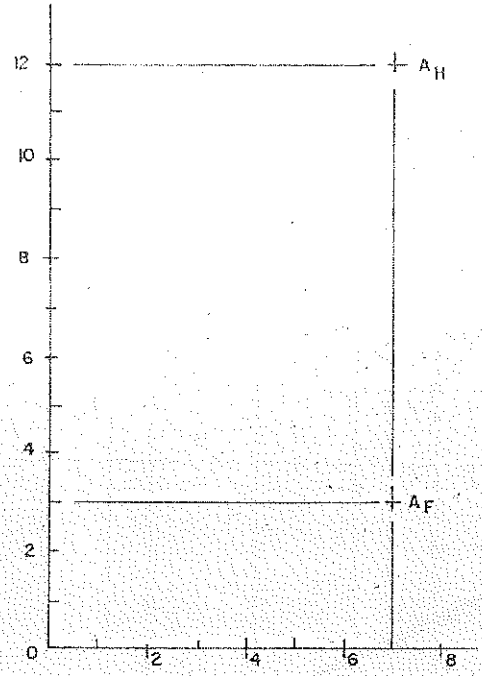


PROBLEMA 9.3: Un trasbordador aéreo está planeando unir los puntos A y D, pero a causa de obstáculos que existen entre estos dos puntos, es necesario establecer una triangulación de dos líneas. Desde A y B se establece la primera línea en la dirección N60°E de 60 metros de longitud y con una inclinación creciente de 15º. Desde B a C va la segunda línea en la dirección N30°O de 40 metros de longitud y con pendiente ascendente del 50%. Desde C a D va la tercera línea en la dirección S70°O con una longitud de 70 metros y con pendiente creciente del 40%. Cuál es la dirección, longitud y pendiente de la línea AD. A(7, 3, 12).

PROCEDIMIENTO:

1) Graficar el punto dado según su coordenada.
2) Trazar por el punto A, el eje de giro vertical.

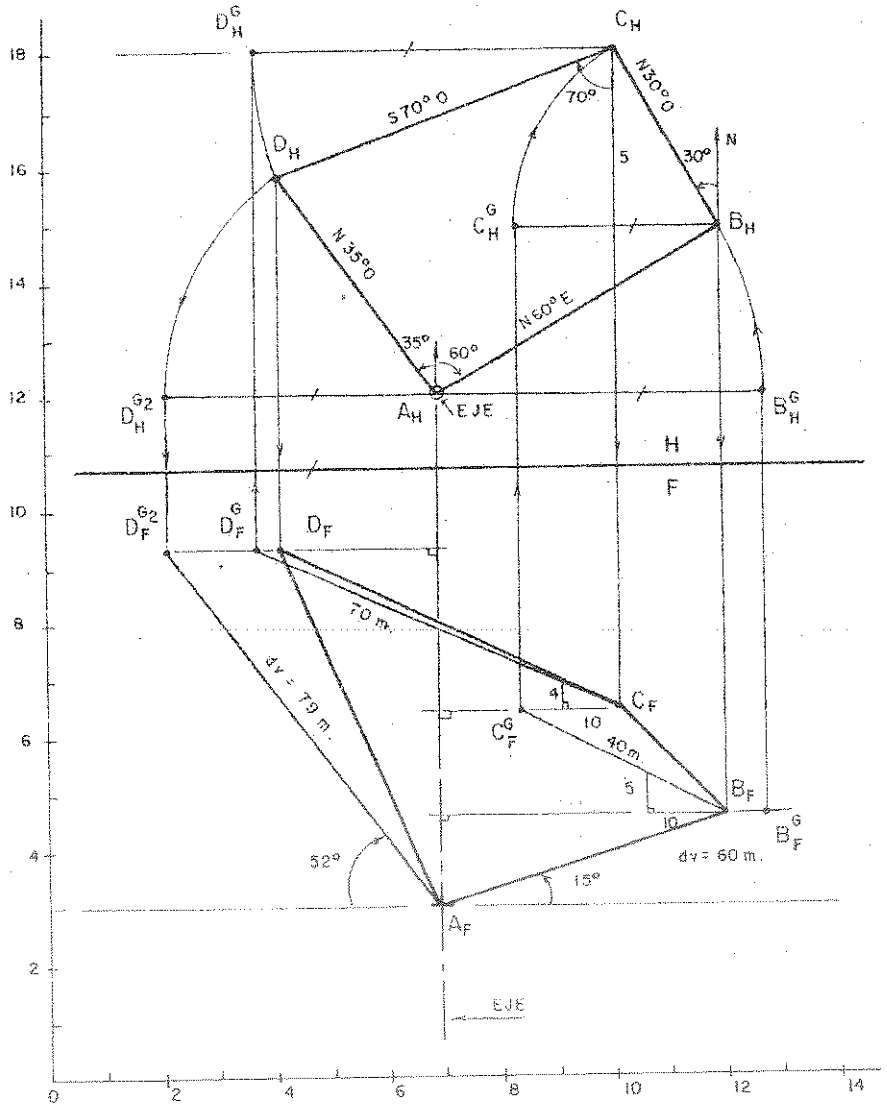
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO 9.3:

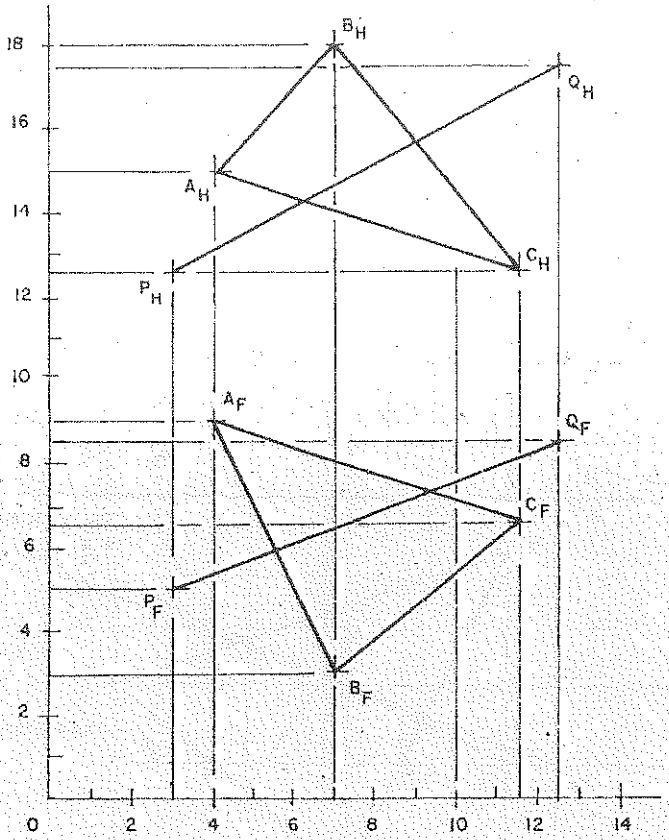
3) En el plano horizontal y desde el punto **A** trazar la orientación N60°E, en el plano frontal y desde el punto **A** medimos la pendiente ascendente de **15°** y en esta recta medimos la longitud de **60** metros hallándose el punto girado B^G.
4) En el plano horizontal la recta AB^G es paralela al plano de proyección, giramos a esta recta con centro en **A** hasta cortar a la orientación trazada en el punto **B**; luego proyectamos a este punto al plano frontal, y desde B^G trazamos su trayectoria perpendicular al eje hasta cortar a la línea de referencia del punto inicial **B**.
5) En forma similar al paso 3 y 4 hallamos los puntos **C** y **D**; siendo los pasos a realizar los siguientes:
   - Trazar la orientación dada; en H.
   - Medir la pendiente y la longitud dada en la recta girada: en F.
   - Girar a la recta con centro en A para hallar sus posiciones iniciales: en H.
   - Trazar la trayectoria de los puntos perpendicular al eje; en F.
6) Finalmente unir los puntos **A** y **D**, siendo su dirección de **N35°O**; luego girar a la recta **AD** con centro en **A** para determinar su dimensión verdadera de **74** metros y su pendiente ascendente de **52°**.

SOLUCIÓN 9.3:



PROBLEMA 9.4: Se dan dos proyecciones principales de la recta PQ y del plano ABC, se desea girar a la recta PQ alrededor de un eje vertical hasta que quede contenida en el plano dado.
P(3, 4, 11.5), Q(12.5, 7.5, 11.5),
A(4, 8, 14), B(7, 2, 17), C11.5, 5.5, 11.5)

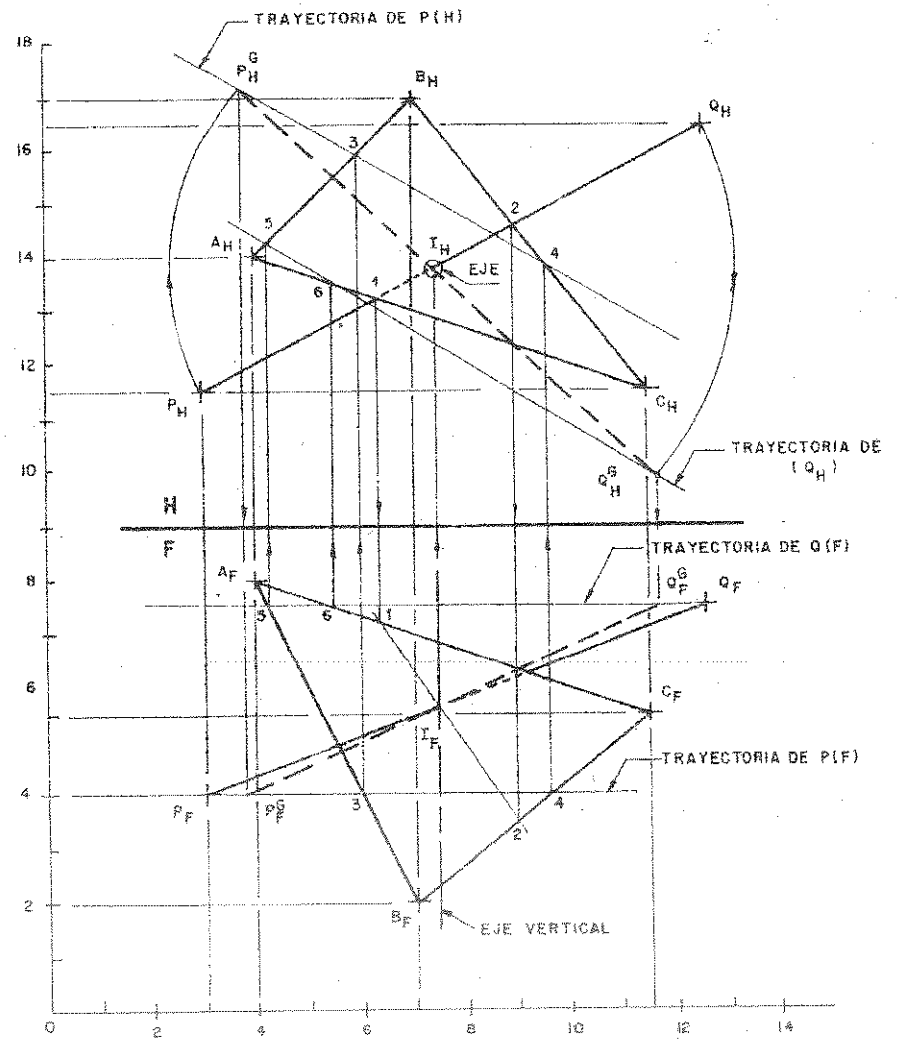
DATOS DEL PROBLEMA:



PROCEDIMIENTO:

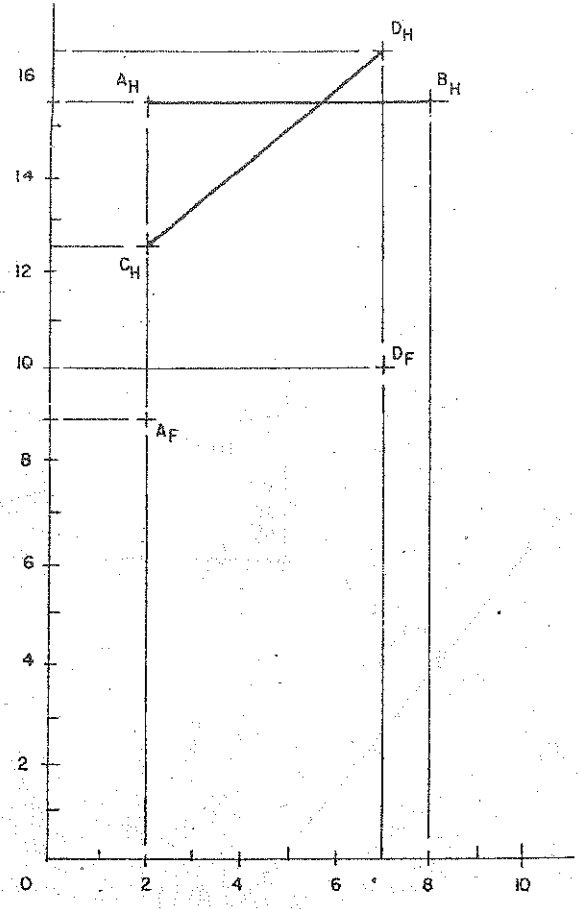
1) Girar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Intersectar la recta **PQ** con el plano **ABC**, utilizando el Método del Plano Cortante; siendo **I** el punto de intersección.
3) Por el punto **1** trazar el eje vertical.
4) En el plano frontal las trayectorias de los puntos **P** y **Q** son perpendiculares al eje vertical.
5) Las trayectorias de los puntos **P** y **Q** cortan el plano **ABC** en los puntos 3, 4, y 5, 6 respectivamente; luego proyectar estos puntos al plano horizontal, unir estos puntos y determinamos las trayectorias de **P** y **Q**.
6) En el plano horizontal y con centro en el eje vertical y de radio **PI** trazamos un arco hasta intersectarse con su trayectoria en el punto girado P^G.
7) Unir los puntos P^G con **I**, prolongamos a esta recta hasta intersectarse con el arco trazado con centro en **I** y desde el punto **Q**, de radio **QI**, en el punto Q^G.
8) Proyectar los puntos girados P^G y Q^G al plano frontal, unir estos puntos, hallándose la recta P^GQ^G contenida en el plano **ABC**.

SOLUCIÓN:


TRAYECTORIA DE P(H)
TRAYECTORIA DE (Q_H)
TRAYECTORIA DE Q(F)
TRAYECTORIA DE P(F)
EJE
EJE VERTICAL
H
F

PROBLEMA 9.5: Se dan las rectas que se cruzan AB y CD, perpendiculares entre si, siendo la recta AB frontal de pendiente del 120% descendiente; empleando únicamente una rotación, determine la mínima distancia que una a las rectas dadas, mostrar la solución en los planos principales. A(2, 9, 15.5), B(8, -, 15.5), C(2, -, 12.5), D(7, 10, 16.5)

DATOS DEL PROBLEMA:



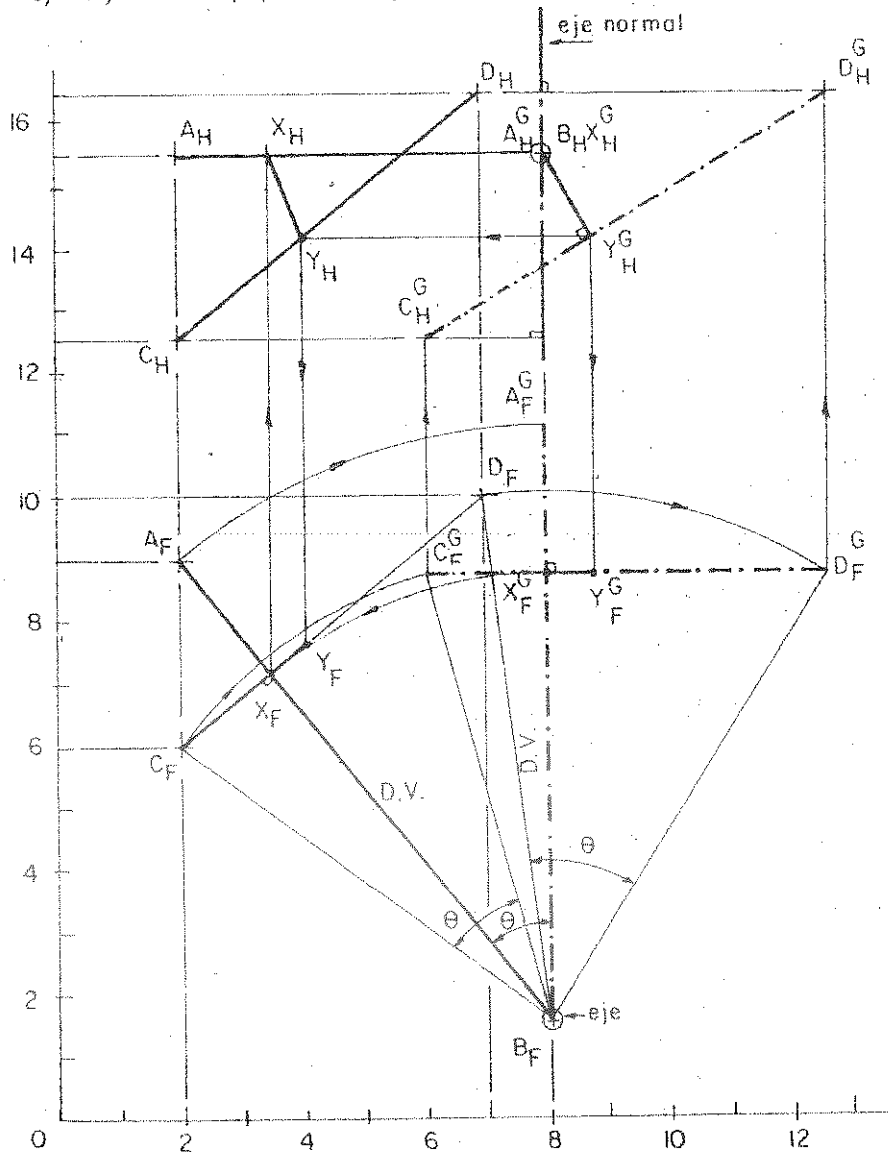
PROCEDIMIENTO:

1) Girar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Completar la proyección frontal de la recta AB de pendiente descendente del 120%.
3) Completar la proyección frontal de la recta CD perpendicular a la recta AB.
4) Trazar por el punto B el eje normal.
5) Girar la recta AB alrededor del punto B hasta que sea perpendicular al plano horizontal.
6) En el plano horizontal la recta girada A^GB se proyecta de punta.
7) Utilizando el mismo ángulo de giro 0 de la recta A^GB girar a la recta CD.

8) En el plano horizontal hallar la proyección girada de la recta **CD** trazando su trayectoria perpendicular al eje normal.

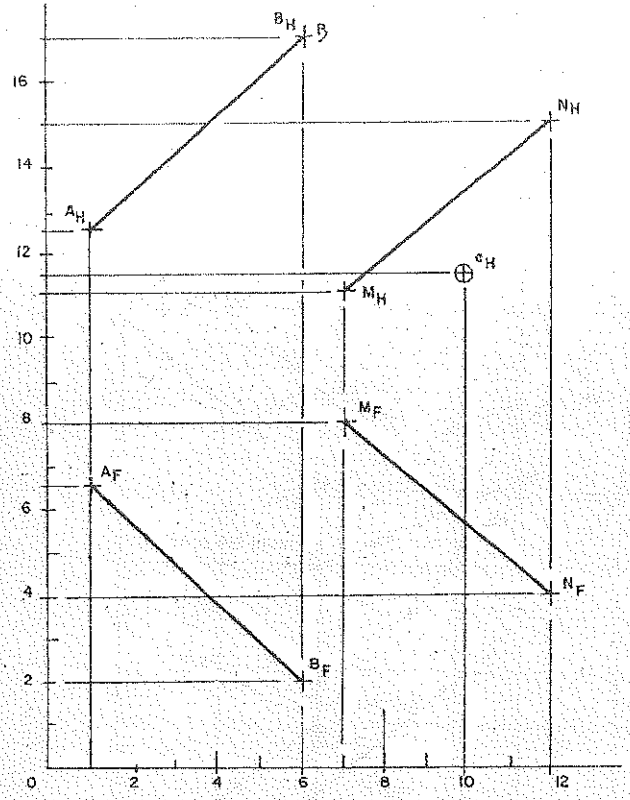
9) E el plano horizontal y desde la proyección de unta de la recta girada A^GB trazar la mínima distancia X^GyG perpendicular a la recta C^GD^G.

10) Proyectar a la mínima distancia X^GY^G a sus planos principales.
   a) Radio de giro $BX^G = BX$; en el plano frontal.
   b) Trayectoria de Y perpendicular al eje normal; en el plano horizontal.



PROBLEMA 9.6: Se dan las rectas AB y MN, se desea determinar la nueva posición de la recta MN utilizando el eje vertical "e"; de tal manera que sea perpendicular a la recta AB. Resolver utilizando giros, mostrar la solución en sus planos principales.
A(1, 6.5, 12.5), B(6, 2, 17), M(7, 8, 11), N(12, 4, 15), "e"(10, -, 11.5)

DATOS DEL PROBLEMA:

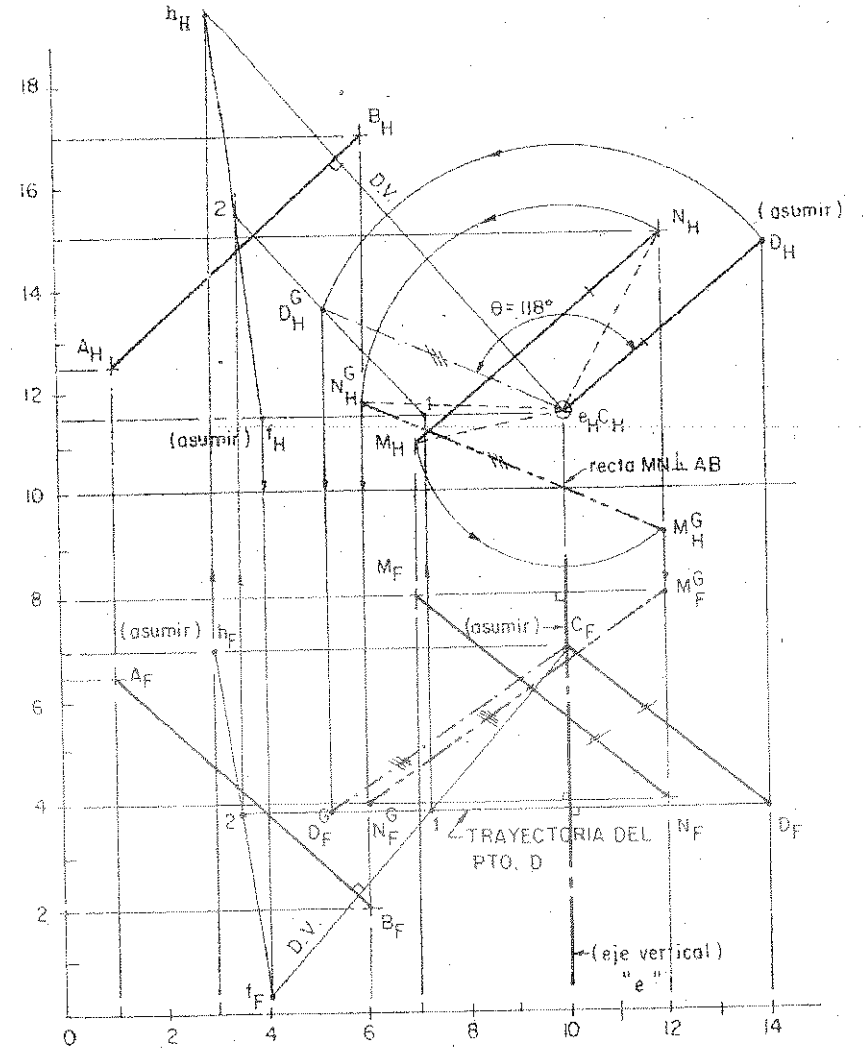


PROCEDIMIENTO:

1) Girar todos los puntos dados según sus coordenadas.
2) Trazar el plano **Cfh** (asumir el punto **C** en el eje vertical) perpendicular a la recta **AB**. Trazar la recta horizontal **Ch** (asumir) perpendicular a la recta **AB**. Trazar la recta frontal **Cf** (asumir) perpendicular a la recta **AB**; luego formar el plano **Cfh**.
3) Desde el punto **C** trazar la recta **CD** (asumir) de longitud arbitraria y paralela a la recta **MN**.
4) En el plano frontal trazar la trayectoria del punto **D** que corta al plano **Cfh** en los puntos **1** y **2**; proyectar y unir estos puntos en el plano horizontal.
5) Con centro en **C** girar a la recta **CD** hasta que corte a la línea 12 contenida en el plano **Cfh**, en el punto D^G. Determinar su proyección frontal. El ángulo de giro utilizado por la recta **CD** es de $\theta = 118°$.

6) Con centro en el eje vertical girar el punto **N** con el mismo ángulo utilizado por la recta **CD** ($\theta = 118°$).
7) Con centro en el eje vertical trazar la trayectoria circular de M^G, hasta que se corte con la paralela trazada desde el punto N^G a la recta CD^G.
8) Determinar la proyección frontal de los puntos girados N^G y M^G trazando sus trayectorias perpendiculares al eje.
9) La nueva posición de la recta M^GN^G en perpendicular a la recta **AB**, porque es paralela a la recta CD^G contenida en el plano **Cfh** perpendicular a la recta **AB**.

SOLUCIÓN:



PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 9.1: La dirección de vuelo de un jet que parte del punto A es N45°E y gana altura a razón de 100m/km. Cuál es la diferencia de altura entre el obstáculo XY y el avión en el instante que cruza dicho obstáculo.
ESCALA: 1:11'000,000. A(5, 6, 11), X(7.5, 3, 14), Y(14, 8, 13)

PROBLEMA 9.2: SA, SB y SC son miembros de un soporte de acero pegado a una pared frontal en A, a una de perfil en C y al piso (horizontal) en B. encontrar la longitud de cada miembro y el ángulo que hace con la superficie a la que está pegado.
S(6, 6,11), A(5, 9, 15), B(4, 2, 13), C(2, 7, 12).

PROBLEMA 9.3: JK y JL son los lados de un triángulo isósceles y los lados iguales miden 90 metros de longitud. Dibujar las proyecciones y hallar la longitud del tercer lado.
ESCALA: 1:2,500. J(8, 3, 11), k(6, 7, 13), L(10, 6, 7).

PROBLEMA 9.4: Se une el punto J con la recta AB en los puntos L y K por medio de dos rectas. L está a 1.5 cm de A, y K está a 2 cm de B. dibujar las proyecciones de las rectas y determinar la longitud de cada una de ellas.
J(13, 3, 14), A(5, 5, 15), B(10, 8, 11).

PROBLEMA 9.5: LN y LN son dos miembros de acero de una estructura. Va a soldarse un tercer miembro a LM en A, a 5 metros de L y a LN en B, a 3 metros de L. Dibujar las dos proyecciones completas y hallar la longitud de AB.
ESCALA: 1:100. L(9, 9, 15), M(7, 5, 11), N(13, 3, 11)

PROBLEMA 9.6: Hacer girar solamente el segmento AB alrededor del eje vertical XY, de tal manera que sea visto dicho segmento desde el punto O considerado como fijo (inmóvil) según un ángulo recto.
O(7, 7, 13), X(6, 10, 16), Y(6, 6, 16), A(9, 7, 17), B(16, 10, 13).

PROBLEMA 9.7: Se dan el eje FG y el punto M. Determinar el menor ángulo que debe girar el punto M alrededor del eje para que quede lo mas atrás posible.
F(4, 10, 23), G(10, 13, 18), M(6, 12, 16).

PROBLEMA 9.8: Dado la recta JF y los puntos A y B, determinar en la recta un punto X de modo que la suma de los segmentos AX + KB sea mínima.
A(3, 2, 13), B(9, 4, 13.5), J(4.5, 4. 15), F(8.5, 7, 11).

PROBLEMA 9.9: Dibujar las proyecciones de la superficie generada por el giro de la recta AB alrededor del eje vertical "e".
A(12, 11, 23), B(13, 4, 16), e(10, ?, 19).

PROBLEMA 9.10: Hacer girar la recta AB mediante un eje normal que pasa por A hasta que se corte con PQ.
A(7, 6, 17), B(10, 10, 13.5), P(7.5, 10, 13), Q(4, 6, 16.5).

PROBLEMA 9.11: Se dan el eje "e" vertical, la recta PQ y el plano ABC. Se trata de girar la recta alrededor del eje hasta que se coloque paralela al plano ABC.
C(11, 3, 20), E(8, ?, 16), P(3, 6, 22), Q(11, 10. 18); A(17, 9, 16), B(16, 4, 22).

PROBLEMA 9.12: Se da la proyección horizontal de un punto P, determinar su proyección frontal de manera que si se le hace girar alrededor del eje "e", puede ser colocada sobre la recta MN.
NOTA: Los puntos A y B determinan el eje "e".
P(7.5, ?, 10.5),, M(2, 3, 11), N(8, 5, 9.5). Eje e: A(4, 6, 9), B(7, 6, 12)

PROBLEMA 9.13: Hacer girar la recta LM alrededor de un eje vertical hasta que quede contenida en el plano RST.
R(4, 5, 8), S(8, 2, 10), T(8, 4, 7), L(3, 3, 7), M(8, 5,9).

PROBLEMA 9.14: Empleando el método de giros determinar la nueva posición del triángulo ABC sin deformarlo de tal manera que AB resulte perpendicular al plano frontal de proyección y BC paralelo al plano horizontal de proyección.
A(4, 7, 9), B(4, 2, 11), C(4, 5, 13).

PROBLEMA 9.15: El punto O gira alrededor del eje e-e'. Que ángulo debe girarse O para que un observador situado en él vea PQ bajo un ángulo recto.
E(2, 8, 16), e'(2, 8, 11), O(3, 1, 12), P(5, 2,12), Q(12, 8, 12).

PROBLEMA 9.16: El plano PQR gira alrededor del eje "e". Se desea saber el valor del ángulo diedro que hace el plano después de haber girado 45° con el mismo, antes de haber girado.
P(11, 4, 10), Q(16, 6, 12), R(14, 1, 7), e(14, 1, 6).

PROBLEMA 9.17: Se dan el plano ilimitado ABC y un punto P fuera del plano, Hacer girar el punto P alrededor de un eje normal, que pase por B hasta que el punto P quede contenido en dicho plano.
A(5, 7, 12), B(8, 4, 10), C(10, 6, 14), P(12, 5, 11).

PROBLEMA 9.18: EF hace un ángulo de 35° con el plano frontal de proyección y se prolonga hacia atrás. GH Hace un ángulo de 40° con el plano horizontal de proyección y se prolonga hacia delante. Completar sus proyecciones. E(6, 2, 10), F(3, 6, ?), G(10, 2, 14), E(12, 5, 7).

PROBLEMA 9.19: Hacer girar la recta PQ alrededor de un eje vertical de manera que sus proyecciones horizontal y frontal hagan ángulos iguales con la línea de pliegue.
P(1, 2, 11), Q(15, 11, 17).

PROBLEMA 9.20: Se da un plano ABC, no paralelo a la recta RS; girar la recta RS alrededor del eje normal que pasa por S de tal manera que resulta paralela al plano ABC.
R(3, 9, 15), S(7, 6, 10), A(8.5, 8, 9), B(10.5, 4, 14), C(13,5, 6.5, 13).

PROBLEMA 9.21: Se dan dos posiciones de la recta AB, girada alrededor de cierta recta CD. Determinar la posición de esta recta y la magnitud del ángulo de giro.
A(3, 7, 9.5), B(5, 4.5, 14), A^G(8, 3.5, 7), B^G(8, 7, 14).

PROBLEMA 9.22: Colocar el punto A en el plano frontal, con ayuda de un giro alrededor de la recta MN.
M(3, 6, 9), N(7, 4, 9), A(5. 3, 10).

PROBLEMA 9.23: Medir el ángulo que debe girar el punto P alrededor de la recta AB, para que el apartamiento del punto rotado sea de 3 cm. También indicar la posición del punto rotado.
A(4, 9, 13), B(10, 3, 17), P(5.5, 4, 13).

PROBLEMA 9.24: Determinar el ángulo que deben girar (sentido horario) las rectas AB y CD alrededor del eje vertical "e", para que sus proyecciones frontales sean paralelas.
A(6.5, 5, 9), B(11, 2, 12), C(7, 1, 9.5), D(11.5, 3, 5.5);
Eje vertical "e"; X(12, 4, 8.5), Y(12, 1, 8.5).

PROBLEMA 9.25: Girar la recta AB alrededor de un eje vertical que convenientemente elegirá el alumno hasta que sea perpendicular a la recta CD.
A(3, 6, 10), B(6.5, 3, 13), C(8, 5, 11), D(11, 6, 13).

PROBLEMA 9.26: Girar el punto P alrededor del eje "e" hasta que se encuentre a la distancia de 4 cm. del plano ABC.
A(7, 4.5, 10.5), B(8.5, 6.5, 13.5), C(10, 3, 12.5), P(14, 5.5, 11.5).
Eje vertical "e": X(11.5, 8, 12), Y(11.5, 4, 12).

CAPITULO 10

INTERSECCIÓN DE RECTAS CON POLIEDROS Y SUPERFICIES

10.0 INTRODUCCIÓN.

La intersección completa entre dos sólidos se conoce como una figura de intersección. Tales intersecciones son comunes en la construcción de edificios, metalistería, construcción de máquinas, y en cualquier campo de la ingeniería. Para los sólidos limitados por superficies planas, la intersección consiste en segmentos sucesivos de rectas de intersección del plano con las superficies planas del sólido. La recta de intersección de dos poliedros es una serie de rectas unidas, que forma un polígono irregular.

10.1 POLIEDROS: SU REPRESENTACIÓN.

Se llama **poliedro**, a los cuerpos geométricos cuya porción de espacio es totalmente limitada, por polígonos planos no coplanares; tal como se observa en la **figura 10.1.**

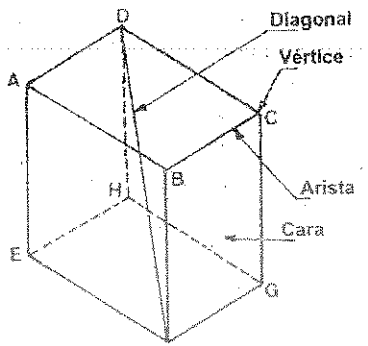


Fig.10.1 Poliedro de seis lados.

Los elementos que lo forman son los siguientes:

a) **Las caras:** formadas por polígonos que limitan el poliedro.
b) **Las aristas:** que son los lados de los polígonos.
c) **Los vértices:** que son los extremos de las aristas.
d) **Las diagonales:** son aquellas rectas que unen dos vértices no situados en una misma cara.
e) **Los diedros:** formados por dos caras consecutivas.
f) **Los ángulos poliédricos:** que son los formados por las aristas que concurren en un vértice.

Los poliedros se clasifican dentro de dos categorías:

1. Poliedros Regulares.
2. Poliedros Irregulares.

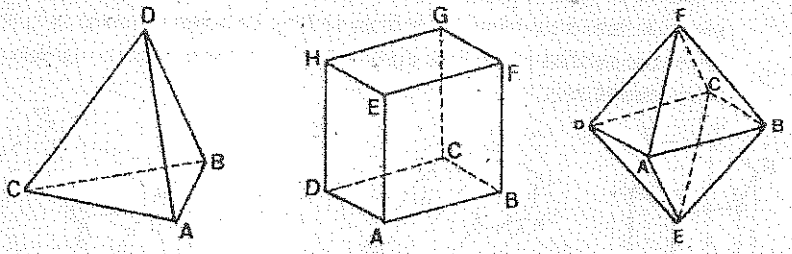
10.1.1 POLIEDROS REGULARES.

Son los poliedros que tienen todas sus caras y ángulos iguales. Los **poliedros regulares** son cinco, que se les llama **"LOS CINCO CUERPOS DE PLATON"** y que son las siguientes:

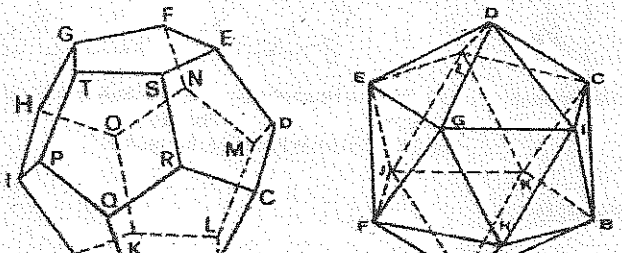
a) TETRAEDRO: es un poliedro regular formado por cuatro triángulos equiláteros unidos tres a tres; tal como se muestra en la figura **10.2(a).**

b) HEXAEDRO O CUBO: es un poliedro formado por seis caras iguales cuadradas y unidas tres a tres. Las tres aristas que concurren en cada vértice son perpendiculares entre sí. Tienen sus caras contiguas perpendiculares y sus caras opuestas paralelas; tal como se muestra en la figura **10.2 (b).**

c) OCTAEDRO: es un poliedro formado por ocho caras, que son triángulos equiláteros unidos de cuatro en cuatro; sus diagonales **AB, CE y DF** son perpendiculares entre sí; tal como se muestra en la figura **10.2(c).**



a)Tetraedro **b) Hexaedro** **c) Octaedro**



d) Dodecaedro **e) Icosaedro**

Fig.10.2 Poliedros Regulares.

d) DODECAEDRO: es un poliedro formado por doce pentágonos que son sus caras, unidos tres a tres, de tal forma que las caras opuestas son paralelas; tal como se muestra en la figura **10.2(d).**

e) ICOSAEDRO: es un poliedro formado por veinte caras que son triángulos equiláteros, unidos entre si de cinco en cinco; tal como se muestra en la figura **10.2 (e).**

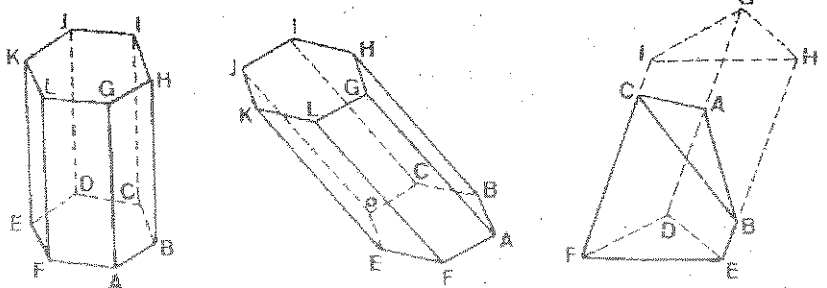
10.1.2 POLIEDROS IRREGULARES.

Es aquel cuyas caras es un polígono cualquiera y las demás caras son paralelogramos (prisma) ó triángulos (pirámides). Entre los principales poliedros irregulares tenemos al **prisma** y a la **pirámide.**

1. PRISMA:

Es un sólido geométrico determinado por una superficie engendrada por una recta generatriz, que se desliza paralela por una línea poligonal o directriz. En un Prisma dos de sus caras son polígonos iguales y paralelas, que se llaman bases, y las demás caras son paralelogramos. Estas bases pueden tener cualquier forma poligonal, y de allí los nombres de los prismas que se ven en la figura **10.3.**

Se llama **prisma recto** cuando sus aristas y caras laterales son perpendiculares a sus bases, ver la figura **10.3(a);** y un **prisma** es **oblicuo** cuando sus aristas laterales no son perpendiculares a sus bases, ver la figura **10.3 (b).** Un tronco de prisma es la porción del prisma comprendida entre la base y una sección hecha por un plano no paralelo a la base, ver la figura **10.3 (c).**



a) Prisma Hexagonal Recto. b) Prisma Hexagonal Oblicuo. c) Prisma truncado triangular Oblicuo.

Fig.10.3 Prisma: Poliedro Irregular.

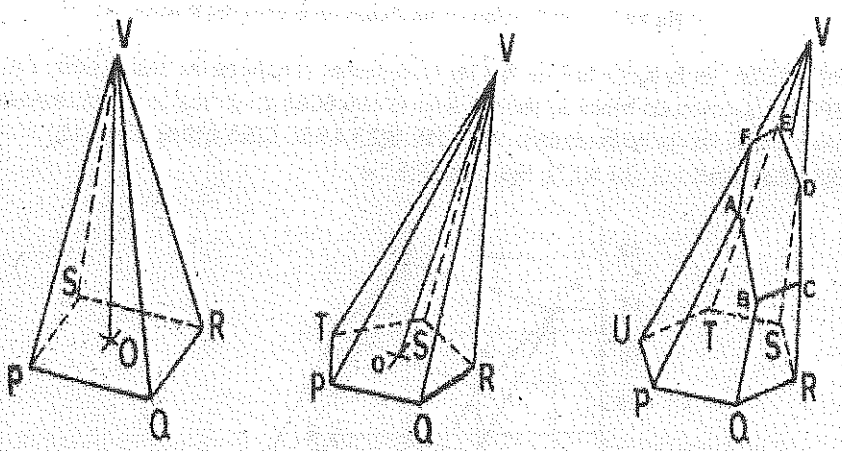
2. PIRAMIDE:

Es un sólido geométrico determinado por una superficie engendrada por una recta generatriz, que está unida a un punto fijo llamado vértice, a la vez que se desliza por una línea poligonal o directriz.

La Pirámide tiene por base un polígono cualquiera y de allí los nombres de las pirámides que se ven en la figura 10.4, y las caras laterales triangulares se unen en un punto fijo llamado **vértice.**

Si el vértice se encuentra directamente arriba del centro de la base, la **Pirámide** se llama **Recta**, ver la figura 10.4(a); y una **pirámide** es **oblicuo** cuando el vértice no se encuentra arriba del centro de la base, ver la figura 10.4 (b).

Un **tronco de pirámide** es la porción de pirámide comprendida entre la base y la sección que corte a todas las caras laterales, ver la figura 10.4(c). Se llama altura de la pirámide a la distancia perpendicular desde el vértice a la base.



a) Pirámide cuadrada **b) Pirámide Pentagonal** **c) Pirámide truncada Hexagonal.**

Fig.10.4 Pirámide: Poliedro Irregular.

10.2 PUNTOS CONTENIDOS EN CARAS DE POLIEDROS.

Un punto puede ser localizado en la cara de un poliedro, trazando un Plano Cortante que corte a la cara del Poliedro que contiene al punto. Este método permite determinar un punto en la cara de un poliedro, directamente en una proyección ortogonal.

10.2.1 PUNTO CONTENIDO EN LA CARA DE UN PRISMA.

Para localizar un punto en la superficie de un Prisma, se debe trazar un Plano Cortante que contenga al punto dado y que corte a la cara del prisma que contiene al punto dado; tal como se observa en la figura 10.5.

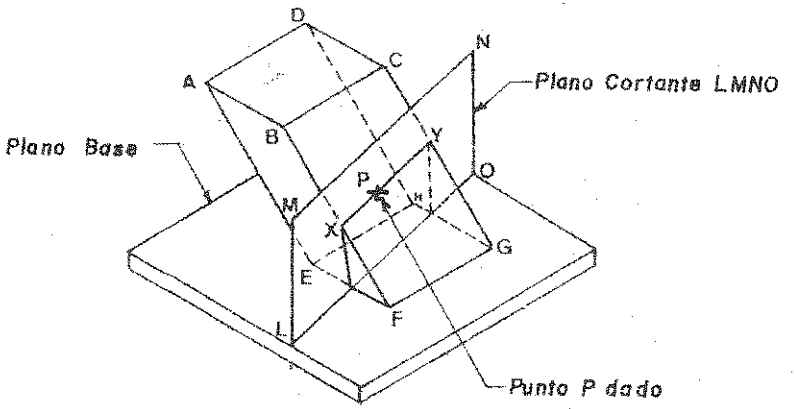


Fig.10.5 Localización de un Punto en la cara del Prisma.

PROBLEMA: En la figura 10.6 se dan las proyecciones principales del prisma oblicuo ABCD-EFGH, y la proyección frontal del punto P sobre la cara BCGF del prisma; se desea determinar la proyección horizontal del punto dado. A(1,4,11), B(2.5,4,9.5), C(5.5,4,10.5), D(4,4,12); E(3,1,7.5), F(4.5,1,6), G(7.5,1,7), H(6,1,8.5); P(5,3,-)

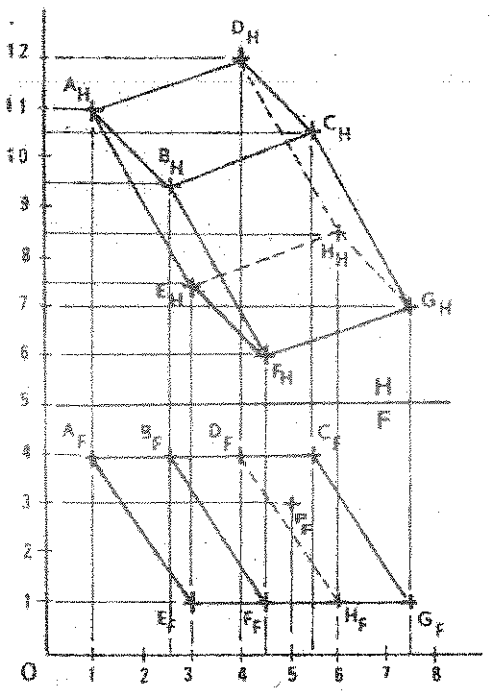


Fig.10.6 Vistas Principales del punto P y del Prisma oblicuo ABCD-EFGH.

SOLUCION:

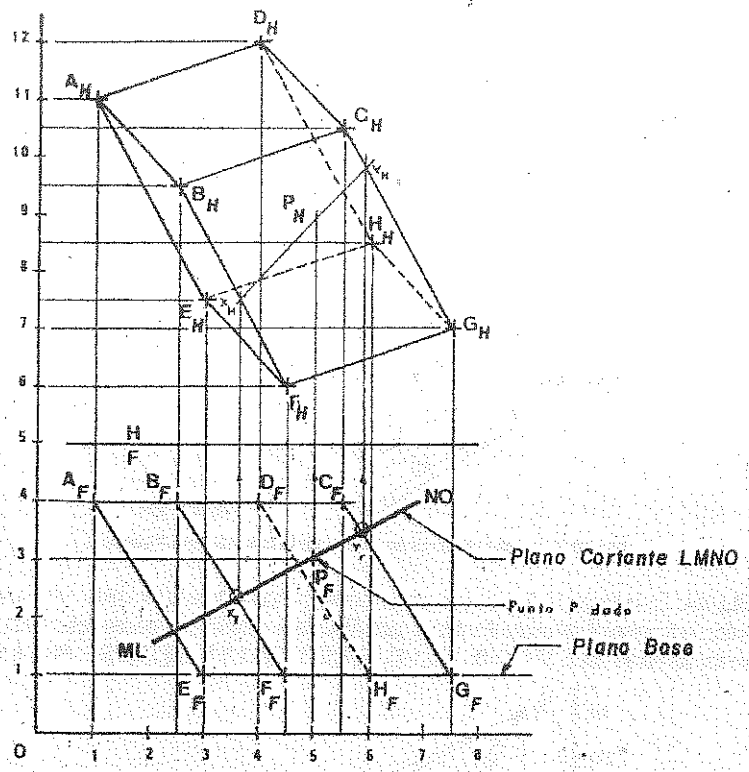


Fig.10.7 Localización de un punto en la cara de un Prisma.

PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos dados de la proyección frontal del punto P y del Prisma Oblicuo **ABCD-EFGH**; unir los vértices del prisma y mostrar la visibilidad de este. Por ejemplo: En **H:** se cruzan las aristas **BC** y **DH**, en el plano frontal observamos a la arista **BC** arriba de la arista **DH**, por lo tanto es visible **BC** en el plano horizontal. Luego como el vértice H es invisible, todas las aristas que partan de él serán invisibles. En F: es invisible **DH** por ser la arista mas alejada en el plano horizontal (Ver en el **capítulo 2**; página 25 en el punto **2.6** de Reglas de visibilidad), tal como se observa en la figura **10.6.**
2. Trazar el Plano Cortante **LMNO** de filo en el Plano Frontal, en posición arbitraria y que contenga al punto dado **P**; tal como se observa en la figura **10.7.**
3. El Plano Cortante **LMNO** corta a las aristas **BF** y **CG** de la cara **BCGF** del prisma oblicuo **ABCD-EFGH**, en los puntos **X** e **Y** respectivamente.
4. Proyectar al plano horizontal la línea de referencia del punto **P** y los puntos **X** e **Y** contenidas en las aristas **BF** y **CG** respectivamente.
5. En el plano horizontal de proyección, unir los puntos **X** e **Y**, esta recta se corta con la línea de referencia del punto **P**; determinándose la proyección horizontal de este punto.

6. Como existe un número infinito de Planos Cortantes que pasan por el punto P, entonces habrá un número infinito de soluciones para determinar este punto.

10.2.2 PUNTO CONTENIDO EN LA CARA DE UNA PIRAMIDE.

Para localizar un punto en la cara de una Pirámide, se debe trazar un Plano Cortante que contenga al punto dado y que corte a la cara de la Pirámide que contiene al punto; tal como se observa en la figura **10.8.**

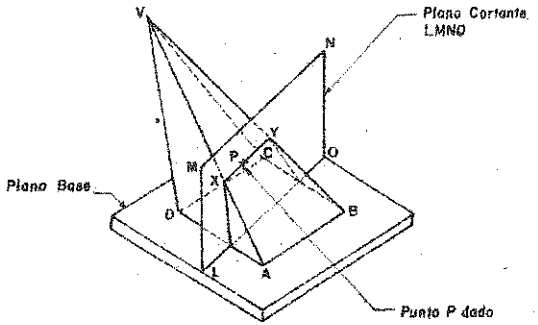


Fig.10.8 Localización de un Punto en la cara de una Pirámide.

PROBLEMA: En la figura **10.9** se dan las proyecciones principales de la Pirámide oblicua **V-ABCD**, y la proyección horizontal del punto **P** sobre la cara **AVB** de la pirámide; se desea determinar la proyección frontal del punto dado. **V(1,4,11); A(5,1,6), B(8,1,7), C(6,1,8.5), D(3,1,7.5); P(4,-,8.5).**

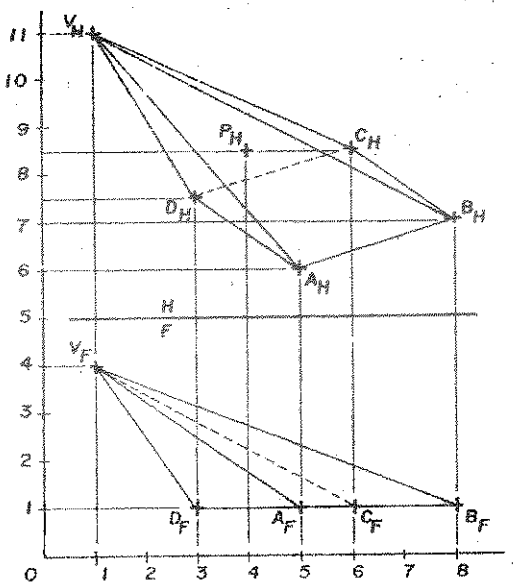


Fig. 10.9 Vistas Principales del punto P y de la Pirámide V-ABCD.

PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos dados de la proyección horizontal del punto P y de la Pirámide Oblicua V-ABCD; unir cada punto de la pirámide y mostrar la visibilidad de este. Por ejemplo: En H: se cruzan las aristas VA y DC, en el plano frontal observamos a la arista VA arriba de la arista DC, por lo tanto, es visible VA e invisible DC en el plano horizontal. En F: es invisible la arista VC, por ser la arista mas alejada en el plano horizontal (Ver en el capítulo 2, página 25 del punto 2.6 de Reglas de visibilidad), tal como se observa en la figura 10.9.
2. Trazar el Plano Cortante LMNO de filo en el plano horizontal en posición arbitraria y que contenga al punto dado P; tal como se observa en la figura 10.10.
3. El Plano Cortante LMNO corta a las aristas VA y VB de la cara AVB de la Pirámide oblicua V-ABCD, en los puntos X e Y respectivamente.
4. Trazar hacia el Plano Frontal la línea de referencia del punto P y los puntos X e Y contenidas en las aristas VA y VB respectivamente.
5. En el Plano Frontal de proyección unir los puntos X e Y, esta recta se corta con la línea de referencia del punto P; determinándose la proyección frontal de este punto.
6. Como existe un número infinito de Planos Cortantes que pasan por el punto P, entonces habrá un número infinito de soluciones para determinar este punto.

SOLUCION:

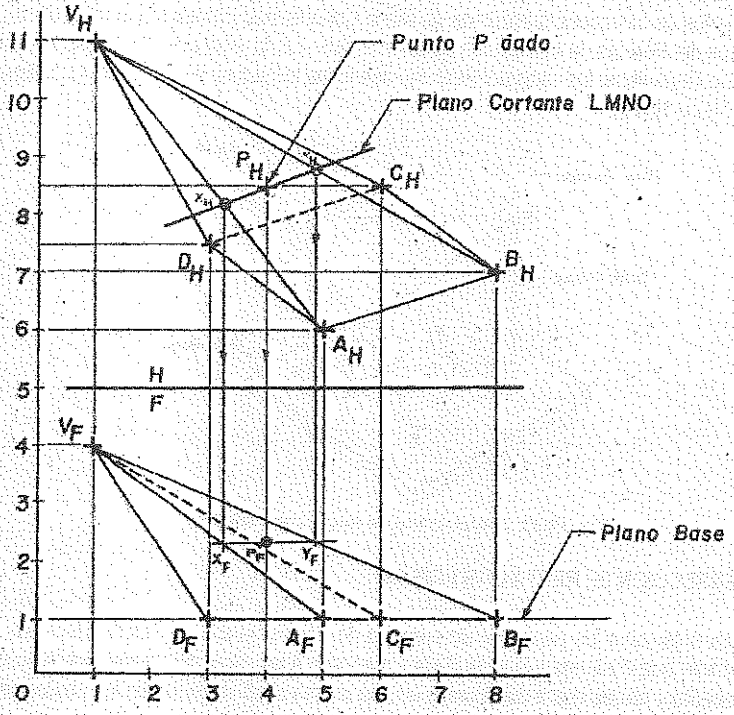


Fig. 10.10 Localización de un punto en la cara de una Pirámide.

10.3 REGLAS DE VISIBILIDAD.

Antes de aplicar estas reglas de visibilidad de rectas, generatrices, aristas o de las superficies planas, debemos aplicar correctamente sus reglas; pero teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Hallar la visibilidad del poliedro o de la superficie a interceptar, aplicando las reglas del **capitulo 2.**
2. Considerar al signo (+) como visible y el signo (-) como invisible.

A continuación enunciamos las reglas de visibilidad de los puntos de intersección:

1. Si una recta que se intercepta con una superficie plana son visibles, el punto de intersección será visible.
2. Si la recta o la superficie plana, o ambas están ocultas, el punto de intersección será invisible.
3. Si una recta que se intercepta con una generatriz son visibles, el punto de intersección será visible.
4. Si la recta o la generatriz, o ambas están ocultas, el punto de intersección será invisible.

10.4 INTERSECCION DE RECTAS CON POLIEDROS.

Una recta pasa a través de un poliedro, cortando a su superficie en dos puntos. Para determinar estos puntos de intersección, trazamos un Plano Cortante que contenga a la recta dada y que corte a las caras del Poliedro; la intersección de la recta dada con la recta que une los puntos originados por el Plano Cortante en las caras del Poliedro, determina los puntos de intersección; tal como se observa en la figura **10.11.**

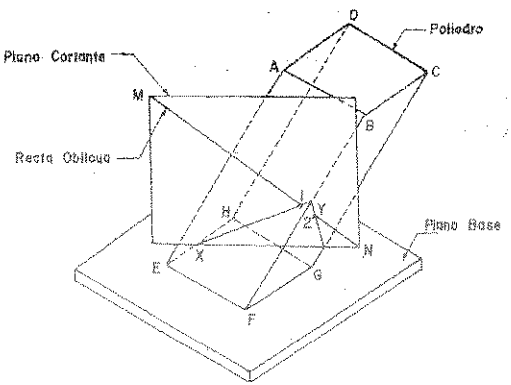


Fig. 10.11 Intersección de Recta con Poliedro.

10.4.1 INTERSECCION DE RECTA CON PRISMA.

Para determinar los puntos de intersección de una Recta con un Prisma, debemos trazar un Plano Cortante que contenga a la recta dada y que corte a las caras del prisma, que proyectadas al plano adyacente y unidas dos a dos (puntos en una misma cara) se cortan en los puntos de intersección buscados.

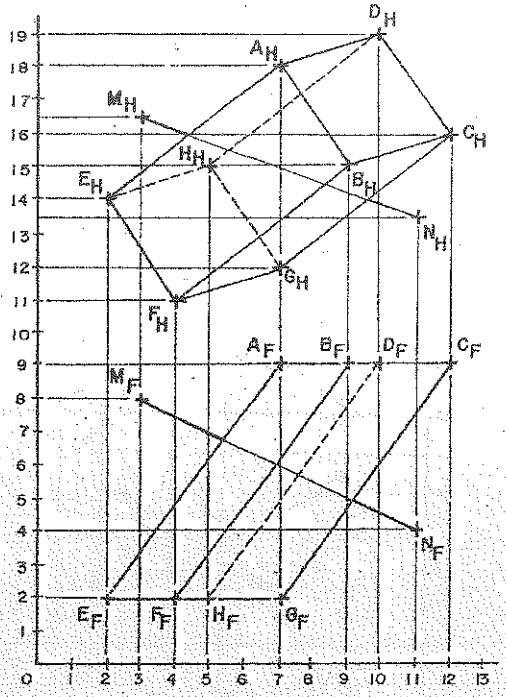


Fig. 10.12 Vistas Principales de la Recta MN y del Prisma ABCD-EFGH.

PROBLEMA: En la figura **10.12** se dan las proyecciones principales de la recta **MN** y del prisma oblicuo **ABCD-EFGH**; se desea determinar los puntos de intersección.
M(3,8,16.5), N(11,4,13.5);
A(7,9,18), B(9,9,15), C(12,9,16), D(10,9,19); E(2,2,14), G(7,2,12), H(5,2,15)

PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos dados según sus coordenadas, unirlos y formar la recta **MN** y el prisma oblicuo **ABCD-EFGH**; tal como se observa en la figura **10.12.** La visibilidad del poliedro se determina aplicando las reglas de visibilidad del ***Capítulo 2;*** por ejemplo en **H:** se cruzan las aristas **AB** y **DH**, desde el punto de cruce trazamos una línea de referencia hacia el plano frontal y encontramos primero **AB** y después a **DH**, luego **AB** es visible y **DH** invisible en el plano horizontal. El vértice **H** es invisible y está dentro del contorno de la proyección, luego todas las aristas que partan de él serán invisibles. En **F:** se requiere encontrar la visibilidad de las aristas **BF** y **DH**, en el plano horizontal observamos más cerca a la arista **BF** y más alejada a la arista **DH**, luego es visible e invisible respectivamente en el plano frontal.
2. Trazar el Plano Cortante **PC-1** (de filo en el plano horizontal) que pase por la recta **MN**; véase la figura **10.13.**
3. El Plano Cortante **PC-1** corta a las caras del Prisma **ABCD-EFGH**; luego empezamos a buscar los puntos de intersección, analizando a la recta **MN** con una cara del prisma.

SOLUCION:

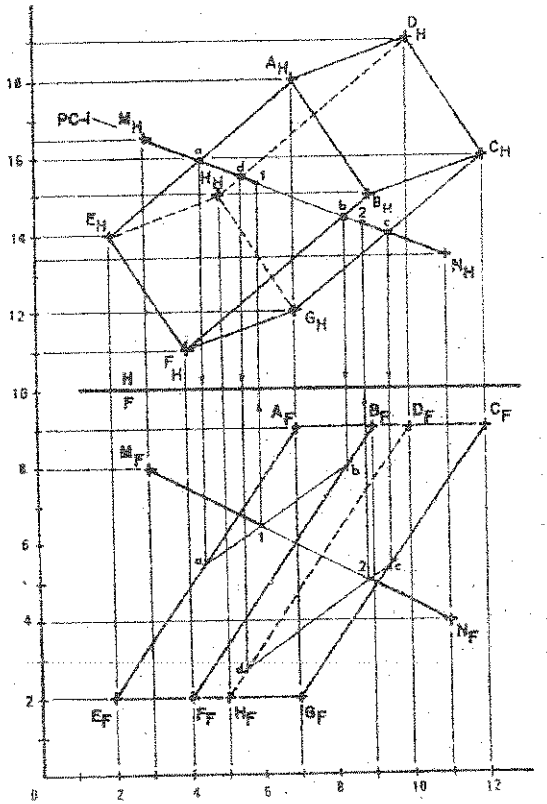


Fig. 10.13 Intersección de Recta con Prisma.

4. Analizando a la recta **MN** con la cara **ABFE** del prisma; el plano de corte determina los puntos a y b, las que proyectamos al plano frontal, unimos estos puntos; esta recta se corta con la recta **MN** en el punto de intersección "1", este punto la proyectamos al plano horizontal.
5. Analizando a la recta **MN** con la cara **CDHG** del prisma; el plano de corte determina los puntos c y d, las que proyectamos al plano frontal, unimos estos puntos; esta recta se corta con la recta **MN** en el punto de intersección "2", este punto la proyectamos al plano horizontal.
6. Los puntos "1" y "2" son los puntos de intersección de la recta dada con el prisma, luego se determina la visibilidad de la intersección; véase la tabla de visibilidad.

Tabla de Visibilidad:

RECTA	VISIB		PLANO	VISIB		INT	VISIB	
	H	F		H	F		H	F
MN	+	+	ABFE	+	+	1	+	+
MN	+	+	CDHG	-	-	2	-	-

10.4.2 INTERSECCION DE RECTA CON PIRAMIDE.

Para determinar los puntos de intersección de una Recta con una Pirámide, debemos trazar **un Plano Cortante** que contenga a la Recta dada y que corte a las caras de la Pirámide; luego proyectamos y unimos estos puntos en el plano adyacente, si estas rectas se cortan con la recta MN, se determinan los puntos de intersección.

PROBLEMA: En la figura **10.14** se dan las proyecciones principales de la Recta **MN** y de la Pirámide oblicua **V-ABCD**; se desea determinar la intersección sin utilizar vistas auxiliares.
M(2,6,14), N(14,3,9); V(2.5,3,10), A(8.5,4,17), B(12.5,2,15) C(11,5,11), D(7,7,13)

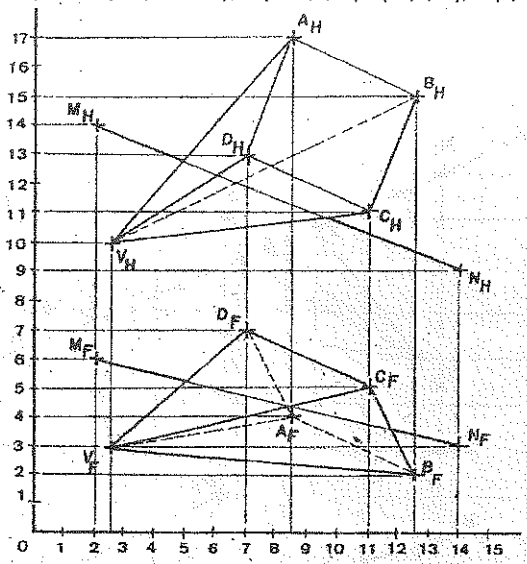


Fig. 10.14 Vistas Principales de la Recta y Pirámide V-ABCD.

PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos dados según sus coordenadas, unir la Recta **MN** y formar la Pirámide mostrando la visibilidad de sus aristas; tal como se observa en la figura 10.14. Por ejemplo la visibilidad en H: se cruzan las aristas **DC** y **VB**, desde el punto de cruce trazamos una línea de referencia hacia el plano frontal y encontramos primero a **DC** y después a **DH**, luego **DC** es visible y **VB** invisible en el plano horizontal.
2. La visibilidad en F: el vértice **A** está dentro del contorno de la proyección y observamos en el plano horizontal que es el vértice más alejado, luego este vértice es invisible y todas las aristas que partan de él tendrán su visibilidad, tales como **AB, AD y AV.**
3. Trazar el Plano Cortante **PC-1** (de filo en el plano horizontal) que pase por la recta **MN**; véase la figura **10.15.**
4. El Plano Cortante **PC-1** corta a las caras de la Pirámide **V-ABCD**, en los puntos **x, y, z y w**; luego empezamos a buscar los puntos de intersección, analizando a la recta **MN** con una cara de la pirámide.

5. Analizando a la Recta **MN** con la cara **ADV** de la Pirámide, el Plano Cortante corta a esta cara en los puntos **x** e **y**, las que proyectamos al plano frontal, unimos estos puntos y se cortan con la Recta **MN** en el punto de intersección **"1"**; este punto la proyectamos al plano horizontal.
6. Analizando a la Recta **MN** con la cara **BCV** de la Pirámide, el Plano Cortante corta a esta cara en los puntos **z** y **w**, las que proyectamos al plano frontal, unimos estos puntos y se cortan con la recta **MN** en el punto de intersección **"2"**; este punto la proyectamos al plano horizontal.
7. Los puntos **"1"** y **"2"** son los puntos de intersección de la Recta con la Pirámide; luego se determina la visibilidad de la intersección, ver la Tabla de Visibilidad.

SOLUCION:

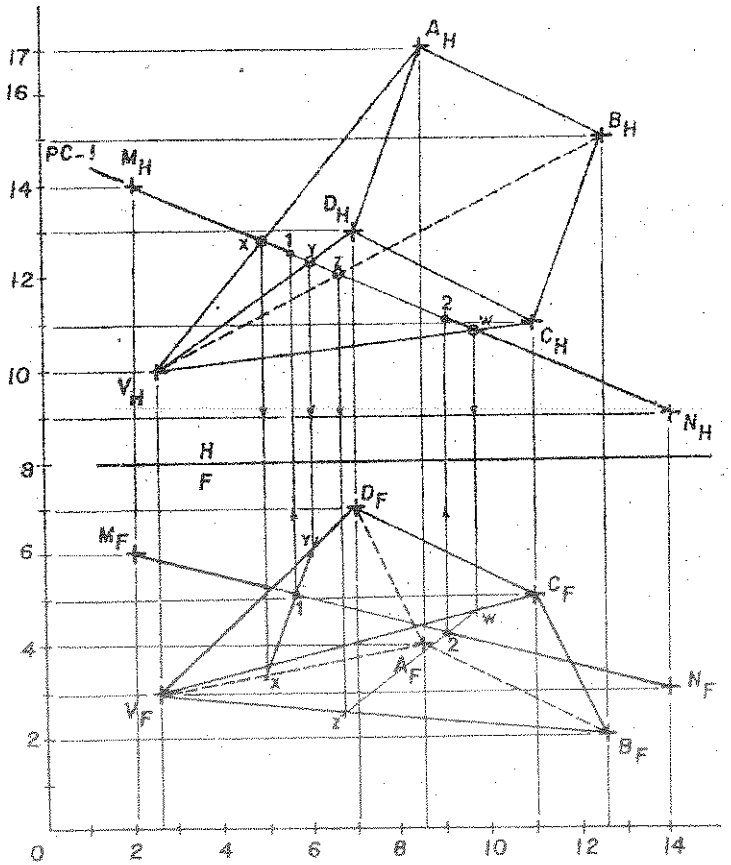


Fig. 10.15 Intersección de Recta con Pirámide (Método del Plano Cortante).

TABLA DE VISIBILIDAD:

RECTA	VISIB		PLANO	VISIB		INT	VISIB	
	H	F		H	F		H	F
MN	+	+	AVD	+	-	1	+	-
MN	+	+	BVC	-	+	2	-	+

10.5 SUPERFICIES: SU REPRESENTACIÓN.

10.5.1 REPRESENTACIÓN DE CONOS.

El cono está engendrado por el movimiento de una línea recta llamada generatriz, que se desplaza sobre una curva directriz y que pasa siempre por un punto fijo llamado vértice; véase la figura 10.16.

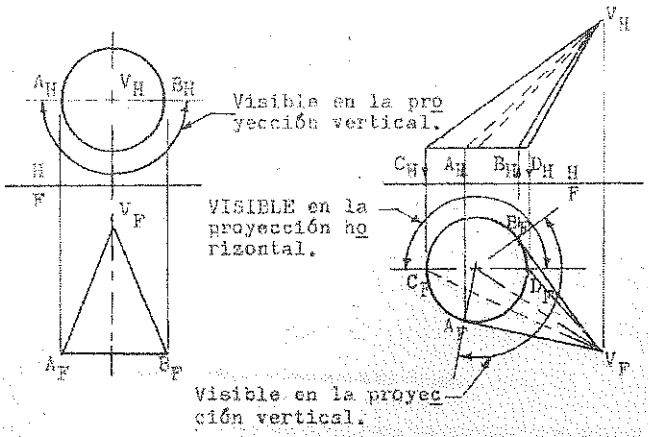


Fig. 10.17 Representación de conos.

10.5.2 REPRESENTACIÓN DE CILINDROS.

El cilindro es engendrado por el movimiento de una línea recta (generatriz) que se desplaza sobre una línea curva plana (directriz) permaneciendo siempre en todas sus posiciones paralela a su posición; véase la figura 10.18.

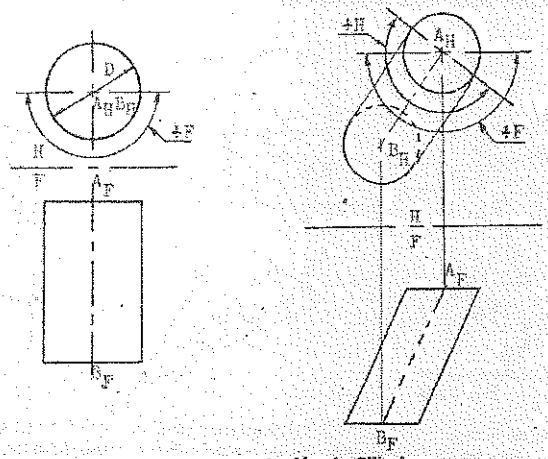


Fig. 10.18 Representación de Cilindros.

10.5.3 REPRESENTACIÓN DE ESFERAS.

La esfera es una superficie de doble curvatura, engendrada por el giro de un círculo alrededor de uno de sus diámetros. El centro del círculo generatriz es el centro de la esfera. Las proyecciones de la esfera se caracterizan por ser iguales en todas las vistas. Una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio, que equidistan de su centro una distancia igual al radio; véase la figura **10.19.**

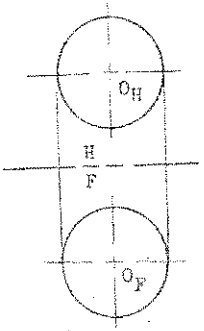
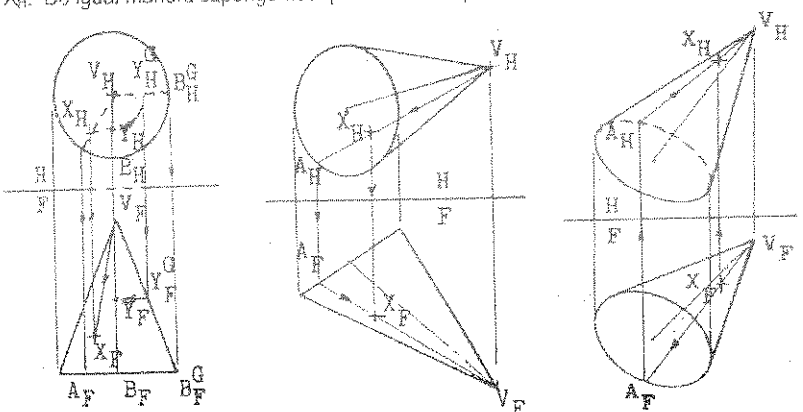


Fig. 10.19 Representación de Esferas.

10.6 PUNTOS CONTENIDOS EN UNA SUPERFICIE.

10.6.1 PUNTOS CONTENIDOS EN LA SUPERFICIE DE UN CONO.

Un punto puede ser localizado en la superficie de un cono, por medio de una recta o elemento que estando en esa superficie contenga a ese punto. En la figura 10.20(a) se supone que se da el punto X_F como visible sobre la superficie de un cono circular recto, solicitándose situar el punto X_H. De igual manera supongamos que nos dan el punto Y_H, solicitándose el punto Y_F.



a) Cono Circular Recto. b) Cono circular oblicuo. c) Cono oblicuo.

Fig. 10.20 Localización de un punto sobre la superficie de un cono.

En la figura 10.20 (b) supongamos conocer al punto X_H sobre la superficie de un cono circular oblicuo; se solicita encontrar la proyección frontal de dicho punto. Desde el vértice del cono se traza la generatriz que contenga a la proyección horizontal del punto X y que corta a la base en el punto A; luego hallamos esta generatriz en la proyección frontal en donde se proyecta la proyección frontal del punto X.

En la figura 10.20 (c) la base del cono no aparece de canto en ninguna de las dos proyecciones principales, y se conoce la proyección frontal del punto X; se solicita encontrar la proyección horizontal de dicho punto.

10.6.2 PUNTOS CONTENIDOS EN LA SUPERFICIE DE UN CILINDRO.

Se puede localizar un punto de la superficie de un cilindro localizando primeramente un elemento lineal recto que pase por ese punto. En la figura 10.21 el punto pedido X se encuentra colocado en el elemento CD, como puede observarse en las proyecciones principales.

Para localizar el elemento CD en las proyecciones 1 y 2 es necesario solamente localizar los puntos C_1 y C_2, en la base del círculo, debiendo ser el elemento siempre paralelo al eje del cilindro. Los puntos X_1 y X_2 pueden ya ser localizados sobre ese elemento por alineación.

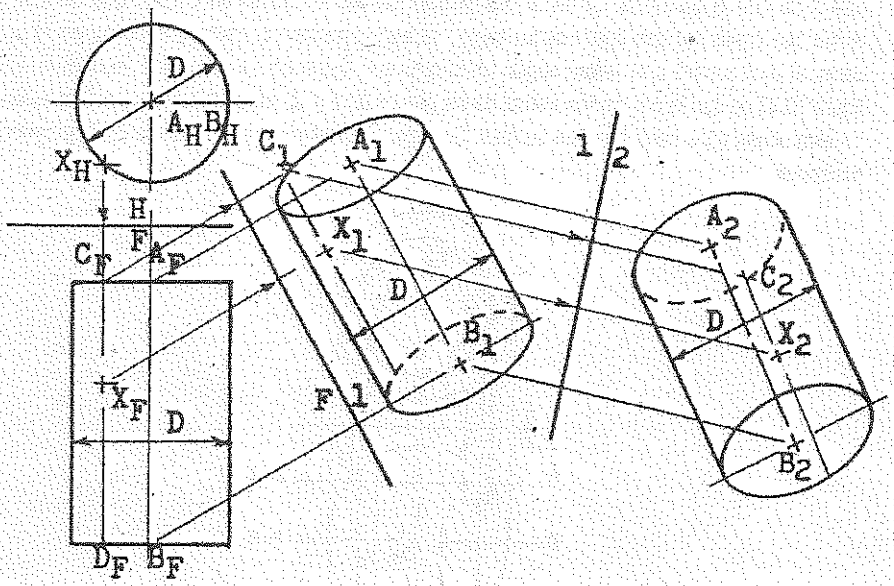


Fig. 10.21 localización de un punto sobre un cono.

De forma similar en la figura 10.22 se localiza un elemento CD y el punto X, en varias proyecciones de un cilindro oblicuo.

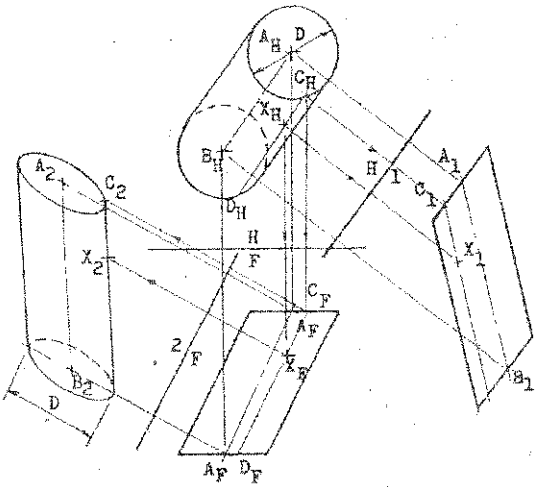


Fig. 10.22 localización de un punto sobre un cono.

10.6.3 PUNTOS CONTENIDOS EN LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA.

Para establecer un punto sobre una esfera habrá que determinar sobre su superficie, una recta que lo contenga. La recta más sencilla en una esfera es un círculo, que será el que tenga que pasar por ese punto dado, luego; se elige un plano cortante que contenga al punto dado, el cual cortará a la esfera según un círculo que figura en su dimensión verdadera. En la figura **10.23** se dan la proyección frontal de los puntos X, Y y Z, situados en la superficie esférica; Y_F está oculto y los otros dos son visibles. Se trata de determinar estos puntos en la proyección horizontal.

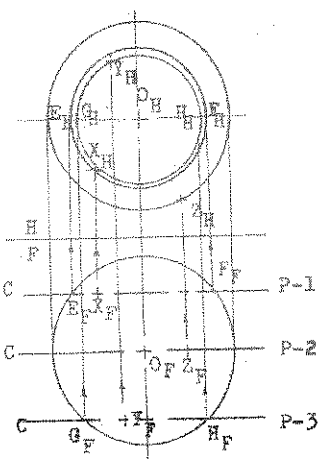


Fig. 10.23 Localización de puntos sobre una Esfera.

PROCEDIMIENTO:

1. Se traza el plano cortante CP-1, que pase por el punto X, que cortará a la esfera en los puntos E y F, que origina un círculo que se proyecta en dimensión verdadera en la vista horizontal. La proyección horizontal del punto X está situado en la mitad del círculo más cercana a la línea de referencia, siendo visible.
2. El plano cortante CP-2 se utiliza para localizar la proyección horizontal del punto Z sobre la esfera. Este plano de corte pasa por el centro O cortando a la esfera según un círculo meridiano, luego el punto buscado estará en el contorno que representa a la esfera en esa proyección horizontal.
3. El plano cortante CP-3 se utiliza para hallar la proyección horizontal del punto Y. Este plano de corta cortará a la esfera en los puntos G y H que origina un círculo menor oculto en la proyección horizontal. El hecho de que la proyección frontal del punto Y esté oculto, significa que en la proyección horizontal el punto Y está en la parte posterior de la esfera y en la mitad inferior de la misma.

10.8 INTERSECCIÓN DE RECTA CON SUPERFICIES.

10.8.1 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN CONO.

Una recta interseca la superficie de un cono en dos puntos. Para encontrar estos puntos de intersección se debe utilizar un plano de corte que contenga al vértice del cono y a la recta dada. Este plano interceptará al cono dado y encontrará elementos rectilíneos en la superficie del mismo, haciendo posible así la determinación de los puntos de intersección

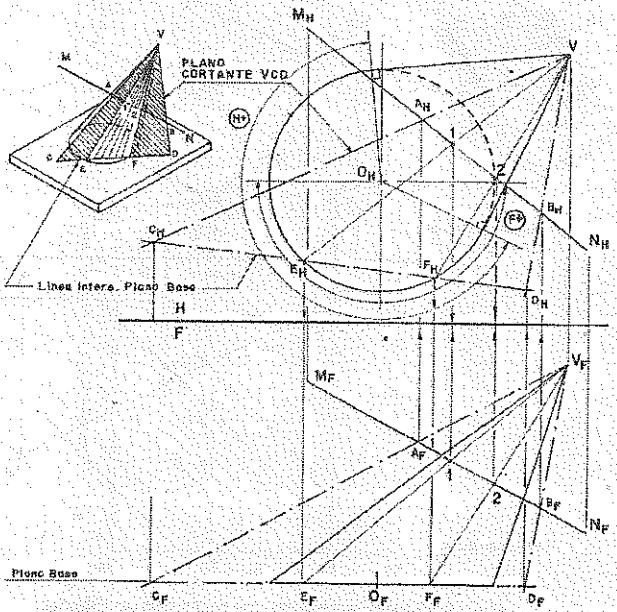


Fig. 10.24 Intersección de una recta con un Cono.

En la figura **10.24** se dan la proyección horizontal y frontal de un cono oblicuo con vértice **V** y de la recta **MN** que interseca al cono; se pide encontrar los puntos de intersección de la recta **MN** con la superficie del cono circular oblicuo de base horizontal.

PROCEDIMIENTO:

1. Se elige un plano cortante que contenga a la recta **MN** y que pase por el vértice **V** del cono.
2. Se prolonga el plano cortante hasta que corte al plano de la base del cono en los puntos **C** y **D**.
3. La recta **CD** corta a la circunferencia de la base en los puntos **E** y **F**, trazando las generatrices **VE** y **VF** encontramos los puntos **1** y **2**, que serán los puntos de intersección de la recta y el cono.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VISIB		GEN CON	VISIB		INT	VISIB	
	H	F		H	F		H	F
MN	+	+	EV	+	-	1	+	+
MN	+	+	FV	-	+	2	+	+

10.8.2 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN CILINDRO.

Para determinar los puntos de intersección de una recta con la superficie de un cilindro, se debe utilizar un plano de corte que contenga a la recta de intersección y que sea paralelo al eje del cilindro.

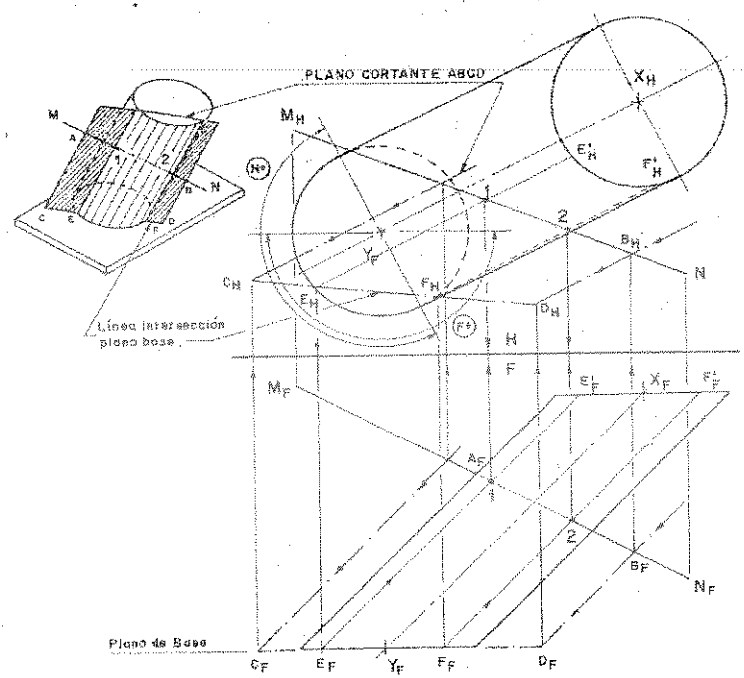


Fig. 10.25 Intersección de una recta con un Cilindro.

Como el plano de corte es paralelo al eje del cilindro, lo cortará en elementos rectilíneos de su superficie, prolongamos al plano de corte hasta que interseque al plano de base del cilindro, esta recta cortará a la base del cilindro en dos puntos; siendo estos dos puntos por los cuales pasan los elementos rectilíneos determinados por el plano de corte.

En la figura **10.25** se dan las proyecciones horizontal y frontal de un cilindro oblicuo de bases horizontales y de la recta **MN** que interseca al cilindro. Hallar los puntos de intersección de la recta **MN** con la superficie de un cilindro circular oblicuo de base horizontal.

PROCEDIMIENTO:

1. Se elige un plano cortante que pasa por la recta **MN** y sea paralelo al eje de cilindro.
2. Este plano corta a la base según la recta **CD**, luego se determina los puntos **E** y **F**.
3. Trazando generatrices de los puntos **E** y **F** paralelas al eje del cilindro, determinamos los puntos **1** y **2** que serán la intersección de la recta **MN** con el cilindro.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VISIB		GEN CIL	VISIB		INT	VISIB	
	H	F		H	F		H	F
MN	+	+	EE'	+	-	1	+	+
MN	+	+	FF'	-	+	2	+	+

10.8.3 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UNA ESFERA.

Para determinar los puntos de intersección de una recta con la superficie de una esfera, se debe utilizar un plano de corte que contenga a la recta de intersección y que corte a la esfera según un círculo, siendo su proyección frontal una elipse; por lo que es necesario dibujar una vista auxiliar que muestre a la recta en dimensión verdadera, para que el círculo de la intersección se vea también en su dimensión verdadera.

En la figura **10.26** se dan las proyecciones horizontal y frontal de la esfera de centro en **O**, cortada por la recta **MN**; se desea encontrar los puntos de intersección. Hallar los puntos de intersección de la recta **MN** con la superficie de una esfera.

PROCEDIMIENTO:

1. Se pasa un plano cortante que contenga a la recta **MN**, y que cortará a la esfera en los puntos **A** y **B**, luego trazamos un plano paralelo **H1** al plano cortante, proyectándose en esta vista en dimensión verdadera.
2. En la proyección **1**, hallamos la recta **MN** y la esfera, luego proyectamos al diámetro de la esfera los puntos **A** y **B**, que determina el diámetro de círculo menor con centro en O_1.
3. El círculo menor corta a la recta MN en los puntos **1** y **2**, que es la intersección que se busca de la recta y la esfera; luego estos puntos se proyectan a las vistas principales.

4. **Visibilidad:** El punto 1_H es visible porque en la proyección frontal y H_1 ocupa la parte superior de la esfera. El punto 1_F es visible porque en la proyección horizontal se observa que está en la mitad frontal de la esfera. El punto 2_H es invisible porque, se encuentra en la parte inferior de la esfera, tal como se observa en la vista frontal y en la vista H_1.

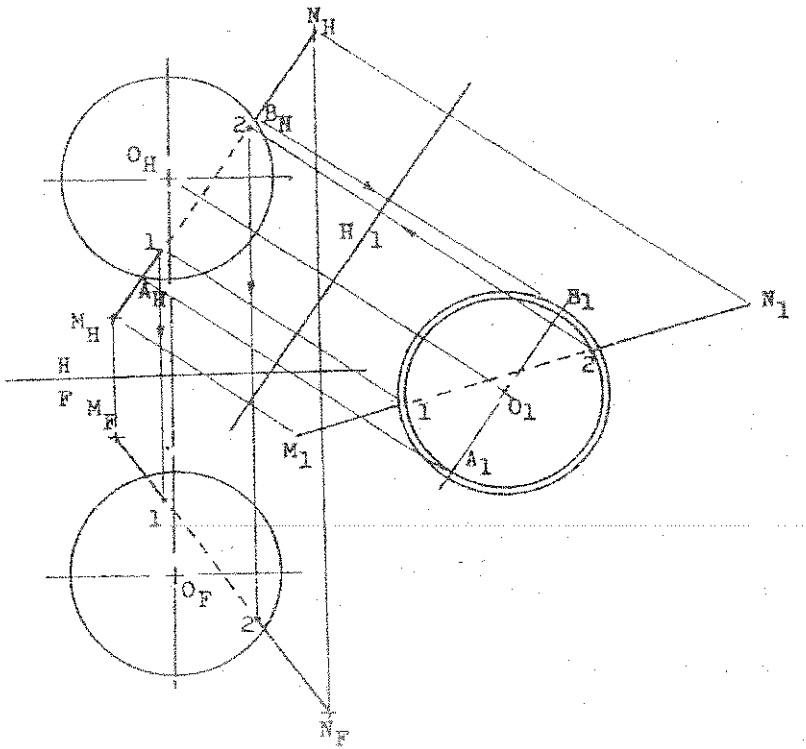


Fig. 10.26 Intersección de recta con esfera.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 10.1: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el prisma vertical de 10 centímetros de altura, cuyas bases horizontales son ABCD y EFGH; siendo AE una de sus aristas laterales. M(2,7,18), N(14,7,26); A(4,12,22), B(9,12,25), C(12,12,20), D(7,12,17)

SOLUCIÓN:

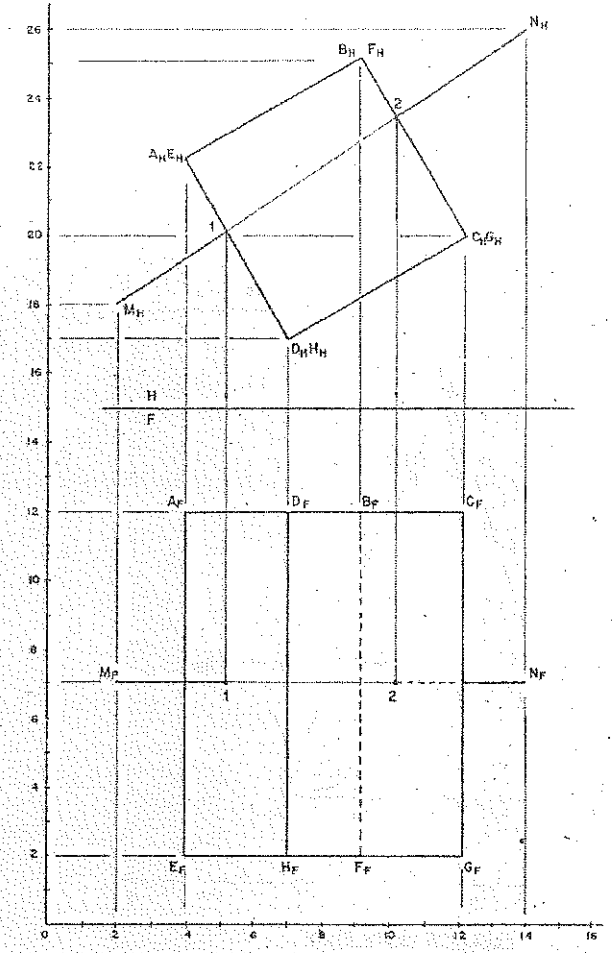


TABLA DE VISIBILIDAD:

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
MN	+	ADHE	+	1	+
MN	+	BCGF	-	2	-

PROBLEMA 10.2: Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con la pirámide vertical V-ABCD de base horizontal.
M(3,5,15), N(14,5,22); V(9,12,18), A(7,2,14.5), B(5.5,2,20), C(11,2,21.5), D(12.5,2,16).

SOLUCIÓN:

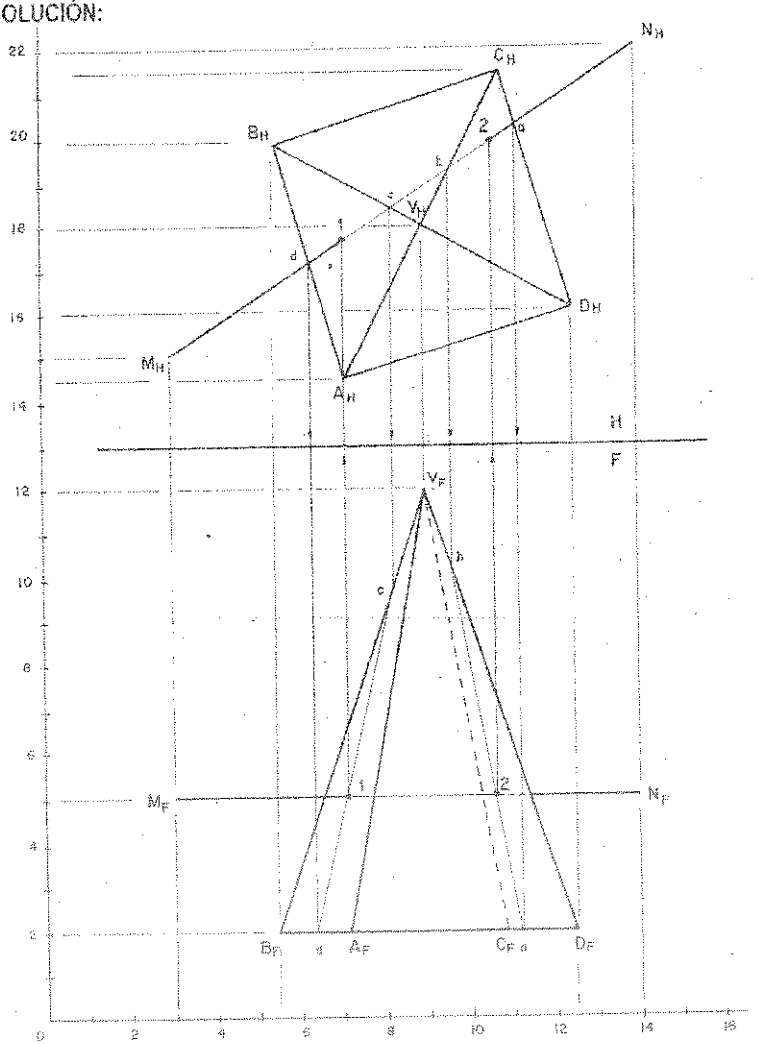


TABLA DE VISIBILIDAD:

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
MN	+	+	AVB	+	+	1	+	+
MN	+	+	CVD	+	-	2	+	-

PROBLEMA 10.3: Hallar los puntos de intersección y la visibilidad de una superficie cilíndrica de base frontal de 3 cm de diámetro; siendo OO' el eje del cilindro con la recta MN.
M(7.5,1.5,24), N(7.5,11,14); O(11.5,4,14.5), O'(4,9,21.5)

SOLUCIÓN:

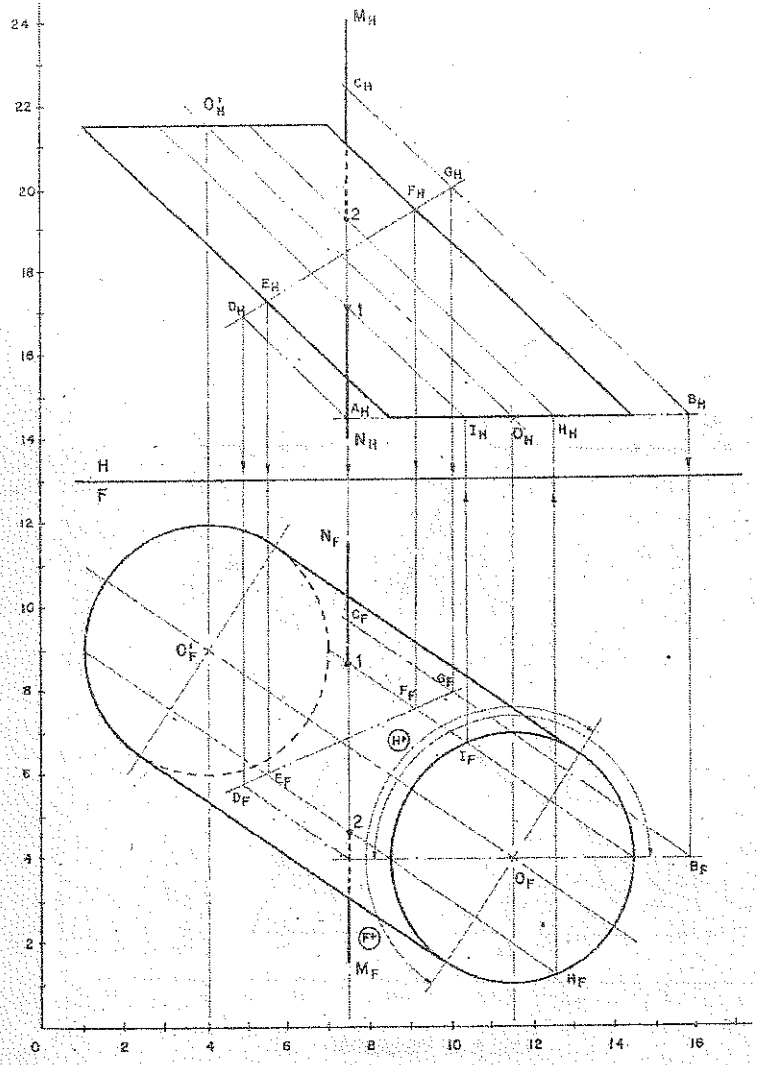


TABLA DE VISIBILIDAD

CIL.	VIS		REC	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
11'	+	+	MN	+	+	1	+	+
HH'	-	-	MN	+	+	2	-	-

PROBLEMA 10.4: Hallar los puntos de intersección y la visibilidad de la superficie de un cono circular recto, donde **V** es el vértice y **O** es el centro de base circular horizontal de **8 cm** de diámetro con la recta **MN**. M(4,2,13.5), N(14,9,19): V(9,11,18), O(9,1,18).

SOLUCIÓN:

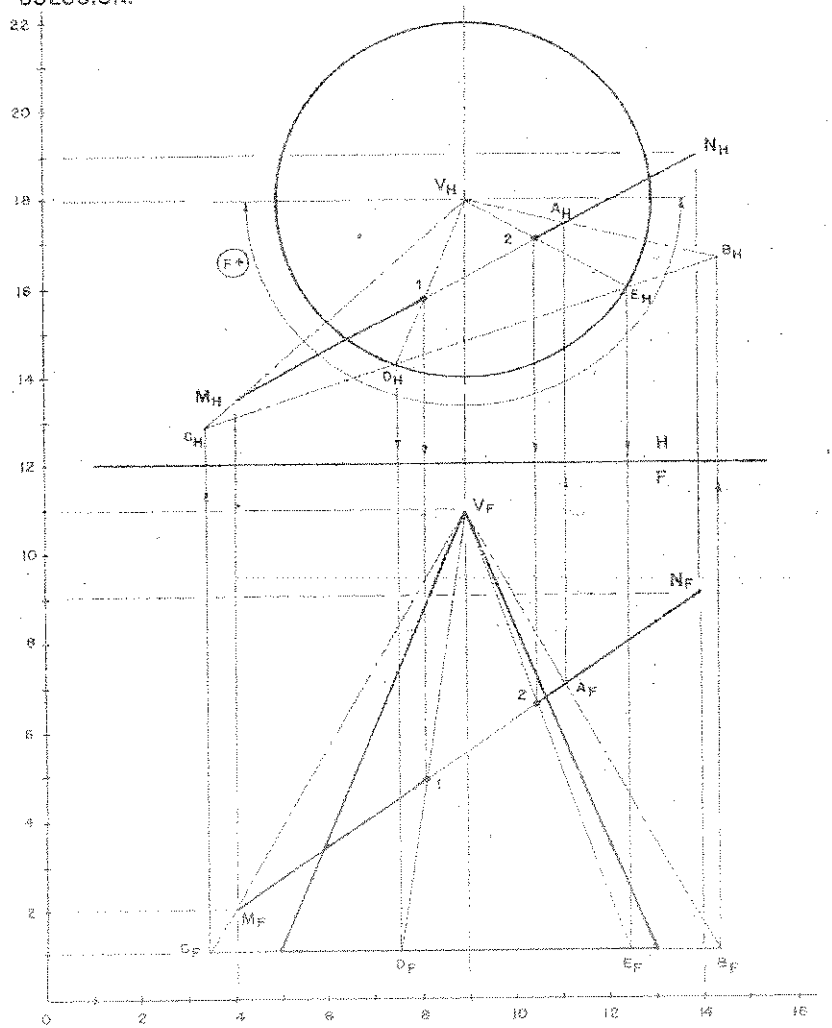
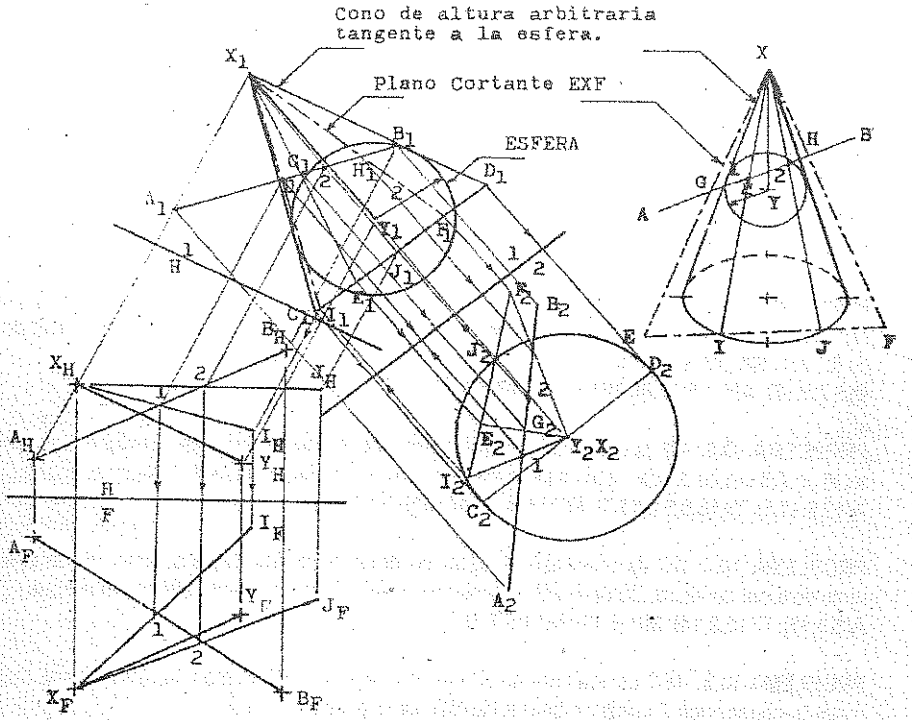


TABLA DE VISIBILIDAD

CON	VIS		RECT	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
VD	+	+	MN	+	+	1	+	+
VE	+	+	MN	+	+	2	+	+

PROBLEMA 10.5: Se dan los puntos X e Y y la recta AB, trazar por el punto X rectas que corten a la recta AB y que se encuentren a la distancia de 2 cm del punto Y. Dar todas las soluciones posibles. X(2,3,11); Y(6,5,9); A(1,7,9); B(7,3,12) Escala: 1:1.

SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

1. Unimos los puntos X e Y, luego hallamos la vista de punto de esta recta.
2. En la vista en donde la recta XY se proyecte en dimensión verdadera y con centro en el punto Y, trazamos una esfera de 2 cm de radio.
3. Desde el extremo X trazamos un cono de altura arbitraria, tangente a la esfera; luego hallamos la intersección de la recta AB con el cono trazado.
4. En la vista 2, la recta EF corta a la base del cono en los puntos I y J, que unidos al extremo X nos representan las soluciones posibles, que luego se proyectan a las demás vistas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 10.1: Encontrar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el tetraedro **ABCD**.
M(4,7.5,16.5), N(15,2.5,14); A(5,4,19), B(7.5,9,18), C(13,1,16.5), D(14,6,13)

PROBLEMA 10.2: Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el tetraedro **ABCD**.
M(5,7.5,16.5), N(15,5,13). A(6,9,14), B(7.5,2.5,16.5), C(14,7.5,18), D(13,4,11.5)

PROBLEMA 10.3: Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el tetraedro **ABCD**.
M(5,4,13), N(15,7.5,15). A(6,6,11.5), B(7.5,4,18), C(13,9,16.5), D(14,2.5,13).

PROBLEMA 10.4: Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el tetraedro **ABCD**.
M(2.5,5,18), N(16.5,7.5,15). A(5,2.5,15), B(10,5,20), C(15,5,11.5), D(9,10,15)

PROBLEMA 10.5: O es el centro de un pentágono regular horizontal base inferior de un prisma recto de **6 cm** de altura, siendo A un vértice del pentágono. Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el prisma.
O(5,2.5,15), A(5,2.5,11.5); M(1,5,15), N(7.5,4,11.5)

PROBLEMA 10.6: AD es una diagonal de un hexágono regular frontal, base frontal de un prisma recto de **7.5 cm** de altura. Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el prisma.
A(13,6,11.5), D(16.5,2.5,11.5), M(11.5,4.5,12), N(19.5,4.5,16)

PROBLEMA 10.7: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal, base superior de un prisma recto de **6 cm** de altura. Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el prisma.
A(5,9,15), C(10,9,14), M(1,4,13), N(11.5,7,16.5)

PROBLEMA 10.8: ABC es una base de un prisma que tiene a BD como una arista lateral. Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el prisma.
M(4.5,6,11.5), N(11,4,16.5); A(13,8,16.5), B(14, 4,14), C(11.5,6,13), D(4,2.5,14)

PROBLEMA 10.9: ABC es una base de prisma y BD es una de sus aristas laterales. Determinar la intersección y la visibilidad de la recta **MN** con el prisma.
M(7.5, 10, 12), N(7.5,3,16), A(10,9.5,15), B(11.5, 7.5, 17), C (13, 5.5,13), D (4,5.5,17).

PROBLEMA 10.10: JK es el eje de un prisma recto y AB es una diagonal de una de sus bases cuadradas. Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con el prisma.
M(7, 3, 15), N(7, 11, 18), J(10, 9, 15), K(2.5, 4, 15), A(9, 11, 15), B(11.5, 7, 15).

PROBLEMA 10.11: Determinar la intersección y visibilidad de la recta **MN** con la pirámide cuyo vértice es V, siendo ABC su base.
M(4, 7.5, 15), N(14, 5, 16.5), V(9.5, 7, 11.5), A(13, 10, 18), B(11, 2.5, 18), C(5, 7.5, 18).

PROBLEMA 10.12: AB es una diagonal de un cuadrado ortogonal, base se una pirámide recta cuyo vértice es V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la pirámide.
A(11, 6, 11.5), B(11, 6, 18), V(5.5, 2.5, 14.5), M(8, 2.5, 18), N(8, 8, 10).

PROBLEMA 10.13: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la pirámide cuyo vértice es V siendo ABC su base.
M(5, 7, 18), N (14, 7, 14), V(9, 6, 11.5), A(6, 10, 18), B(13.5, 6, 18), C(6,2.5,18).

PROBLEMA 10.14: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal base de una pirámide recta de 6 cm de altura. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la pirámide.
A(7.5,2.5,10); C(13,2.5.18); M(5,5,15), N(15,5,13).

PROBLEMA 10.15: AD es una diagonal de un hexágono regular horizontal base de una pirámide recta de 6 cm de altura. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la pirámide.
A(6,2.5,14), D(14,2.514); M(5,4.5,13), N(14,4.5,15).

PROBLEMA 10.16: O es el centro de un círculo horizontal de 7.5 cm de diámetro, base de un cono recto con vértice V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
O(10,9.5,15); V(10,2.5,15); M(5,7.5,13), N(14,6,14).

PROBLEMA 10.17: O es el centro de un círculo horizontal de 6 cm de diámetro, base de un cono recto con vértice V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
O(10,2.5,15), V(10,9,15); M(7.5,7,16), N(15,2.5,18).

PROBLEMA 10.18: V es el vértice de un cono, y O es el centro de su base circular frontal de 6 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
V(10,5,13), 0(5,7.5,18); M(9,4,12), N(10,7,13).

PROBLEMA 10.19: O es el centro de un círculo frontal de 6 cm. de diámetro, base de un cono con vértice V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
O(7.5,6,13), V(13,2.5,18); M(6,2.5,16), N(12,9,13).

PROBLEMA 10.20: C es el centro de un círculo horizontal de 6 cm. de diámetro base de un cono con vértice V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
C(5,2.5,13), V(10,7.5,18)Ñ M(4,6,17), N(9,3.5,10).

PROBLEMA 10.21: V es el vértice de un cono y C es el centro de su base horizontal de 6 cm. de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
V(10,7.5,14), C(15,2.5,15); M(11,4,12), N(16,5,19).

PROBLEMA 10.22: O es el centro de un círculo horizontal de 5 cm de diámetro, el cual es la base de un cono oblicuo cuyo vértice es V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono. O(4,2,19), V(8.5,6,16); M(7.5,6,14), N(7.5,2,21).

PROBLEMA 10.23: V es el vértice de un cono oblicuo cuya base horizontal de 6 cm de diámetro tiene su centro en C. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
V(9,7,18.5), C(4,2,18.5); M(8,6,16), N(8,2,21).

PROBLEMA 10.24: C es el centro de un círculo frontal de 6 cm de diámetro base de un cono cuyo vértice es V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cono.
C(16.5,4,20), B(15,2.5,13); M(15,2,21), N(15,7.5,16).

PROBLEMA 10.25: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
A(7.5,9,16.5), B(15,2.5,13): M(14,9,19), N(9,4,12).

PROBLEMA 10.26: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
A(7.5,5,18), B(13,7.5,13); M(7.5,10,13), N(13,7,18).

PROBLEMA 10.27: PQ es el eje de,un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 4 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
P(5,100,15), Q(10,2.5,20) M(4,4,20), N(9,9,14).

PROBLEMA 10.28: PQ es el eje de un cilindro circular recto de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
P(7.5,7.5,16.5), Q(15,2.5,16.5); M(5,4,19); N(15,7.5,17).

PROBLEMA 10.29: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
A(18,6,20), B(14,2.5,15); M(16.5,2,21), N(16.5,9.5,14).

PROBLEMA 10.30: CD es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 6 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
C(15,8.5,21), D(7.5,3.5,14); M(10,1,21), N(10,9,13).

PROBLEMA 10.31: JK es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
J(6,2.5,19), K(14,9,13); M(10,2.5,21), N(10,9,10).

PROBLEMA 10.32: JK es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
J(7.5,9,16.5), K(15,2.5,13); M(14,9,19), N(9,4,12).

PROBLEMA 10.33: JK es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
J(7.5,5,11.5), K(13,7.5,18); M(7.5,9,15), N(15,2.5,13).

PROBLEMA 10.34: AB es el eje de un cilindro circular recto de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
A(5,5,18), B(13,5,13.5); M(5,10,13), n(13,2,17).

PROBLEMA 10.35: JK es el eje de un cilindro circular recto de 5 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el cilindro.
J(6,9,20), K(6,9,12), M(2.5,8,14), N(3.5,9,15).

PROBLEMA 10.36: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la esfera de 5 cm de diámetro con centro en O.
M(10,7.5,18), N(16.5,1,11.5); O(15,5,15).

PROBLEMA 10.37: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la esfera de 5 cm de diámetro con centro en Q. M(9,2.5,18), N(2.5,9,11.5); Q(5,5,15).

PROBLEMA 10.38: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la esfera de 5 cm de diámetro con centro en O. M(9,8,18), N(9,2,12); O(10,5,15).

PROBLEMA 10.39: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la esfera de 5 cm de diámetro con centro en Q. M(1,8,10), N(5,1,16); Q(4,5,13).

PROBLEMA 10.40: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la esfera de 5 cm de diámetro con centro en O. M(5,7,12), N(5,1,18); O(4,4,15).

PROBLEMA 10.41: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la esfera de 7.5 cm de diámetro con centro en Q. M(5,9,16.5), N(16.5,1,19); Q(10,4,15).

PROBLEMA 10.42: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con el prisma de bases triangulares ABC y DEF. M(5,7,13), N(13.5,2,11),
A(5,1.5,15), B(7,5,15), C(8.5,1.5,15) D(9.5,3,9.5), E(11.5,6.5,9.5), F(13.5,3,9.5).

PROBLEMA 10.43: Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la esfera de 6 cm de diámetro con centro en P. M(6,2.5,13.5), N(14,8,13.5); P(10,5.5,14.5).

PROBLEMA 10.44: Determinar los puntos donde las rectas MN y MS cortan al cilindro de eje AB y cuyas bases son círculos frontales de 3 cm. de radio con centros en A y B.
A(5,5,17), B(11,6,10), M(2,6,13), N(14,7,12), S(14,5,16).

PROBLEMA 10.45: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal, base de una pirámide recta con vértice V. Determinar la intersección y visibilidad de la recta MN con la pirámide.
A(2,2.5,14), C(5.5,2.5,16.5), V(5,9,15); M(2,3,15), N(6,6,15)

PROBLEMA 10.46: Determinar en la recta LM los puntos P y Q de tal manera que los ángulos APB y AQB sean 90°. L(5,7,18), M(9,11,14); A(5.5,10,15), B(7,9,17)

PROBLEMA 10.47: Trazar por A una recta de 7 cm que se corte con MN y que pase a una distancia de 3 cm del punto B. M(7,6,20), N(12,8,14), A(14,4,20), B(8,10,15).

PROBLEMA 10.48: Trazar por el punto P, una recta a la recta MN y que forme con el plano ABC un ángulo de 60°.
P(7,9,18), M(7.5,10.5,19), N(8,9,15), A(3.5,10.5,16), B(9,12,17), C(5,9,14).

PROBLEMA 10.49: Trazar una recta que pase a 2.5 m de P, a 1 m de Q, y que mida 9 m y que corte a la recta MN. ESCALA: 1:100. P(5,12,16), Q(7,10.5,16), M(4,10,18), N(8,11.5,16)

PROBLEMA 10.50: Determinar las proyecciones de la recta **PQ**, tal que la intersección de esta recta con un cilindro de revolución de eje **AB** y radio igual a **2.5 m**, estén contenidas en dos generatrices cuya distancia entre ellas sea de **3.5 m**, además **PQ** forma un ángulo de **60°** con el eje **AB**. Escala: **1:100**. **P(4,10,16.5); A(3,12.5,17), B(6,11,15).**

PROBLEMA 10.51: Ubicar un punto **P** en el plano **ABC**, que se encuentre a **2 m** de **R** y **3 m** de **S** (tomar **P** a la izquierda de **R**). **ESCALA: 1:100.**
A(2,10,16), B(6,12,15.5), C(4,8,13.5), R(4,11.5,14.5).

PROBLEMA 10.52: **VA** y **VB** son dos generatrices de un cono recto, estando **A** y **B** en la directriz circular del cono. **VA** y **VB** hacen **60°** y la altura del cono es **4 cm**. El vértice **V** está **1 cm** detrás de **A**. Hallar el eje del cono.
A(10,13,19), B(12.5,14.5,16.5)

PROBLEMA 10.53: Trazar por el punto **P** una recta de **6 cm** que se corte con **AB** y que haga un ángulo de 30° con MN.
P(2,6,16), A(5,6,20), B(9,3,14), M(10,8,13), N(6,8,11.5)

PROBLEMA 10.54: Determinar la intersección y visibilidad de la recta **PQ** con la pirámide de vértice **V** y base horizontal **ABC**; el punto **C** pertenece a la recta **AM** y es tal que el ángulo **ACB** es igual a dos veces el ángulo **ACD** (**D** pertenece al plano **ABC**)
A(3,2,10), B(6, ?, 12); P(4,3.5,12.5), Q(12,4,11); D(5, ?,8) M(8,2,8.5), V(11,7,13).

PROBLEMA 10.55: **ABCD** y **EFGH** son las bases de un Prisma de base cuadrada, determine la intersección y mostrar la visibilidad de la recta **MN** con el Prisma dado. Hacer la Tabla de visibilidad. Resolver sin vistas auxiliares. **M(9,10.5,25), N(9,2,13); A(12,11,20),**
B(16,8.5,19), C(14.5,6,23), D(11,8.5,24), E(3.5,6,14.5), F(7,3.5,13), G(6.1,17), H(2.5,3.5,18.5)

PROBLEMA 10.56: Dado el Prisma **ABCD – EFGH** de bases horizontales de **9 cm.** de altura, donde **AE** es una de sus aristas laterales, interceptarlo con la recta **MN**. Determinar la visibilidad de la intersección. Resolver sin vistas auxiliares. Hacer la Tabla de visibilidad.
M(3.5,6,16), N(14.5,3.5,16); A(5.5,10,18), B(7.5,-,20), C(11.5,-,18.5), D(9.5,-,16.5); E(5.5,-,13)

CAPÍTULO 11

PLANOS TANGENTES A SUPERFICIES

11.1 RECTAS TANGENTES.

Se dice que son tangentes entre sí, dos rectas (una curva y otra recta, o dos curvas) cuando ambas rectas tienen solamente un punto de contacto. En la figura 11.1 la recta MN es tangente al círculo porque en la proyección frontal coincide con el círculo, es decir están en un mismo plano horizontal.

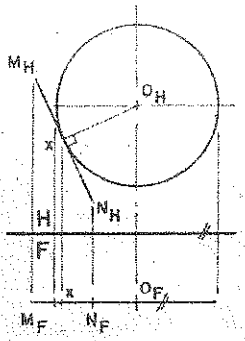


Fig. 11.1 Recta tangente a un círculo

11.2 RECTAS TANGENTES A SUPERFICIES

Se dice que una recta es tangente a una superficie, si es tangente a cualquier recta que esta contenida en la superficie. En la figura 11.2 la recta MN es tangente a la superficie en el punto T, porque es tangente a una sección plana elíptica situada en la superficie. La recta XY es tangente a la base de la superficie en el punto Q, porque está en un mismo plano.

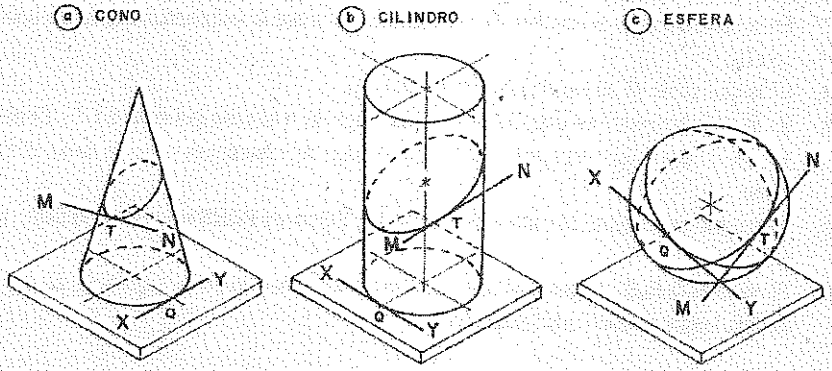


Fig. 11.2 Rectas tangentes a una superficie.

11.3 PLANOS TANGENTES A CONOS.

11.3.1 POR UN PUNTO CONTENIDO EN SU SUPERFICIE.

Un plano que es tangente a un cono, está determinado por dos rectas que se interceptan, una de ellas es la generatriz que pasa por el punto dado y la otra es la recta tangente a la base del cono en el punto de intersección con la generatriz. Se solicita determinar un plano tangente a un cono que pase por el punto A_F contenido en su superficie.

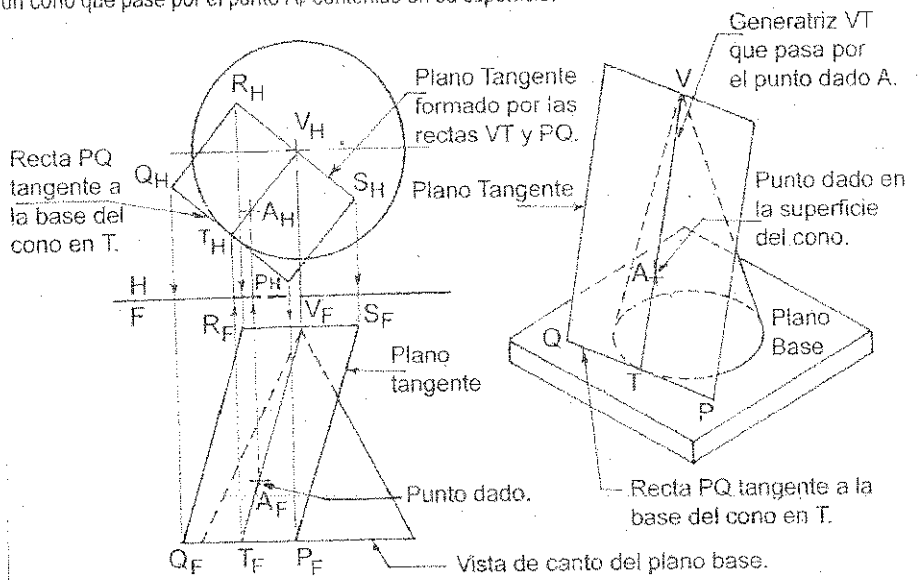


Fig. 11.3: Plano tangente a un cono por un punto contenido en su superficie.

PROCEDIMIENTO:

1. Desde el vértice V del cono trazamos la generatriz que pase por el punto dado A_F, hasta encontrar a la base en el punto T_F, tal como V_FT_F.
2. En la base del cono se localiza T_H, proyectando T_F sobre la vista horizontal, luego unimos V_H con T_H.
3. En la generatriz VT se localiza A_H proyectando A_F.
4. En la vista horizontal se traza la recta P_HQ_H tangente a la base del cono en T_H. El elemento VT del cono y la recta tangente PQ son rectas que se interceptan y, por lo tanto, definen un plano.
5. Este plano es tangente al cono a lo largo de VT. Entonces PQRS representa el plano tangente.
6. El plano $P_HQ_HR_HS_H$ tangente al cono, por un punto contenido en su superficie, se proyecta a la vista frontal, limitado arbitrariamente.

11.3.2 POR UN PUNTO EXTERIOR A SU SUPERFICIE.

El plano tangente solicitado está determinado por dos rectas, una de ellas es la recta que parte del vértice del cono y que pasa por el punto dado exterior a su superficie, que se prolonga hasta que encuentre al plano de la base desde el cual se traza la otra recta tangente a la base del cono. En la figura 11.4 se dan las vistas horizontal y frontal de un cono oblicuo y de un punto A exterior a su superficie; se desea trazar un plano tangente al cono por el punto dado.

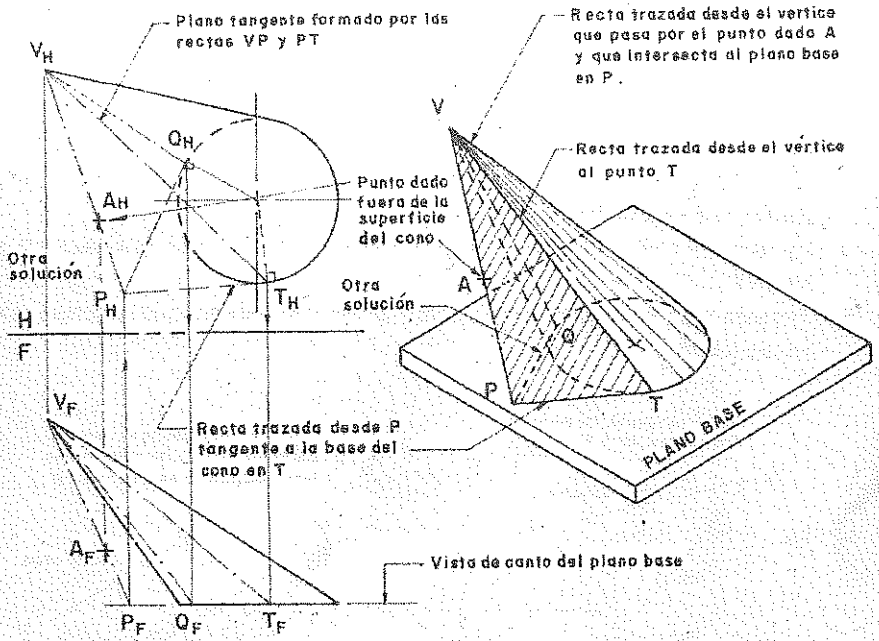


Fig. 11.4 Plano tangente a un cono desde un punto exterior a su superficie.

PROCEDIMIENTO:

1. Desde el vértice V_F se traza la recta que pasa por el punto dado A_F y se prolonga hasta encontrar al plano base en el punto P_F.
2. Se localiza P_H en la intersección de la recta que parte del vértice V_H y que pasa por el punto A_H dado, con la línea de referencia de la proyección P_F.
3. Desde P_H se traza una recta tangente al círculo de base del cono en el punto T_H. Luego lo proyectamos a la vista frontal para determinar T_F en el plano base.
4. Las rectas VP y PT definen el plano tangente VTP requerido, que contiene además a la generatriz VT.
5. Trazando desde P una recta tangente al lado opuesto del primer punto tangente, determina otra solución.

11.3.3 PARALELO A UNA RECTA DADA.

El plano tangente solicitado está determinado por dos rectas, una de ellas es la recta que parte del vértice del cono y que sea paralelo a la recta dada, que se prolonga hasta que encuentre al plano de la base, desde el cual se traza la otra recta tangente a la base del cono. En la figura **11.5** se dan las vistas horizontal y frontal de un cono oblicuo y de una recta **MN**; se desea trazar un plano tangente al cono y paralelo a la recta dada.

PROCEDIMIENTO:

1. Desde el vértice V_F se traza una recta paralela a la recta dada **MN** y se prolonga hasta encontrar al plano base en el punto P_F.
2. De igual manera desde el vértice V_H se traza una recta paralela a la recta dada **MN** y se prolonga hasta interceptarse con la línea de referencia de **P**.
3. Desde **PH** se traza una recta tangente al círculo de base del cono en el punto **T**, luego lo proyectamos a la vista frontal.
4. Las rectas VP y **PT** definen el plano tangente **VTP** requerido, que contiene además a la generatriz **VT**.
5. Trazando desde P una recta tangente al lado opuesto del primer punto de tangencia, determina otra solución.

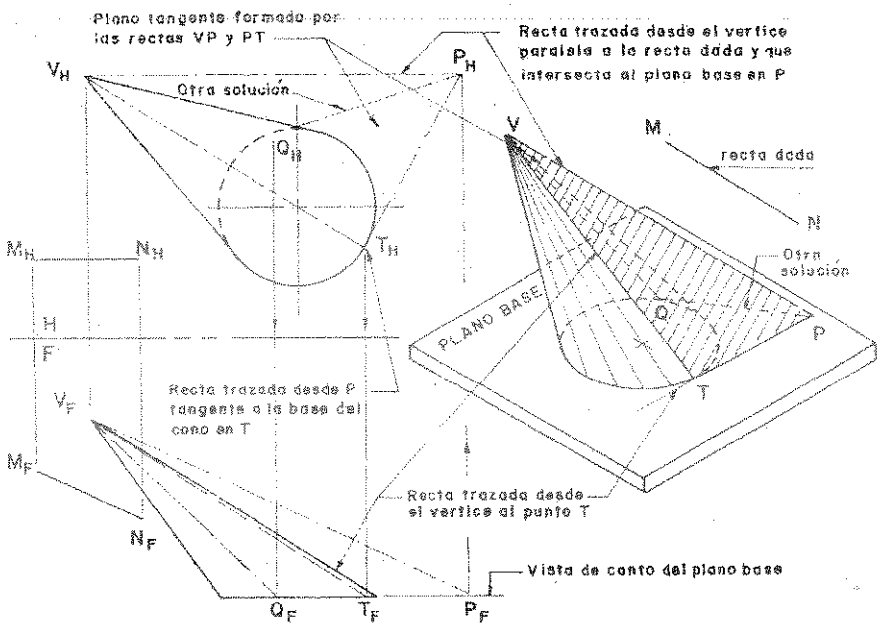


Fig. 11.5 Plano tangente a un cono y paralelo a una recta dada.

11.4 PLANO TANGENTE A UN CILINDRO.

11.4.1 POR UN PUNTO CONTENIDO EN SU SUPERFICIE.

El plano tangente solicitado está determinado por dos rectas que se cortan; una de ellas es la generatriz que pasa por el punto dado y la otra es la recta tangente a la base, en el punto de intersección con la generatriz.

En la figura **11.6** se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro oblicuo con eje AB y de un punto P de su superficie; se desea trazar un plano tangente al cilindro por el punto dado.

PROCEDIMIENTO:

1. En la vista horizontal se traza la generatriz CD paralelo al eje del cilindro AB y que pase por el punto dado P.
2. Desde el punto C, trácese la recta RU tangente al círculo de la base inferior.
3. El elemento CD y la recta RU se cortan para formar el plano tangente requerido (limitado por RSTU).

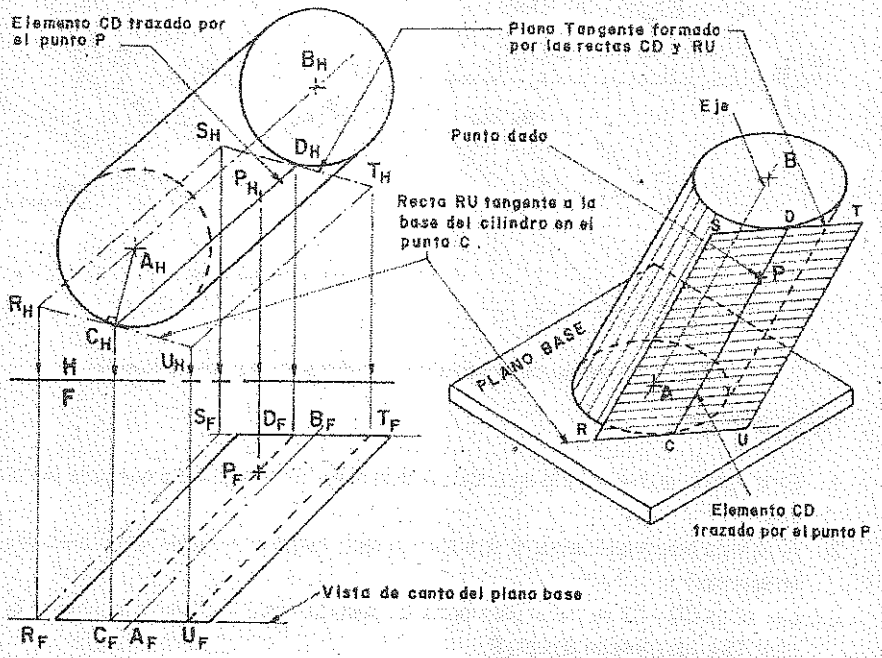


Fig. 11.6 Plano tangente a un cilindro por un punto de su superficie.

11.4.2 POR UN PUNTO EXTERIOR A SU SUPERFICIE.

El plano tangente solicitado está determinado por dos rectas, una de ellas es la recta paralela al eje del cilindro y que pasa por el punto dado exterior a su superficie, que se prolonga hasta que encuentre al plano de la base desde el cual se traza la otra tangente a la base del cono.

En la figura 11.7 se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro oblicuo con eje **AB** y de un punto **P** exterior a su superficie; se desea trazar un plano tangente al cilindro y que contenga al punto dado.

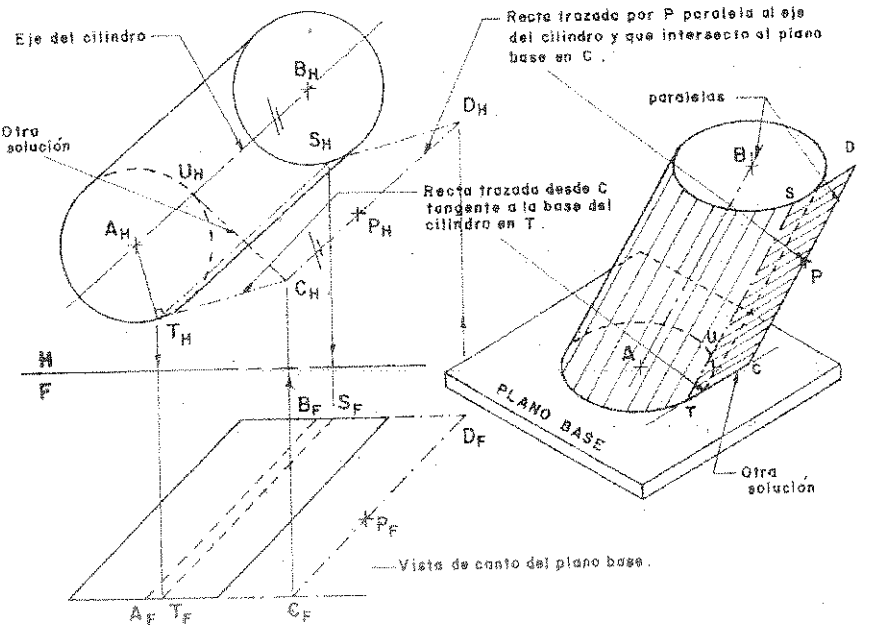


Fig. 11.7 Plano tangente a un cilindro por un punto exterior.

PROCEDIMIENTO:

1. En la vista frontal se traza la recta **CD** paralela al eje del cilindro **AB** y que pase por el punto dado **P**.
2. En la vista horizontal y desde **C** se traza una recta tangente al círculo de la base del cilindro en el punto **T**.
3. Las rectas **CD** y **CT** se cortan para formar un plano tangente al cilindro a lo largo de la generatriz **TS** y que contiene al punto **P**.
4. Una tangente desde **C** hacia el otro lado del círculo, determinará un segundo plano.

11.4.3 PARALELO A UNA RECTA DADA.

El plano tangente solicitado está determinado por dos rectas, una de ellas es la recta tangente a la base del cilindro y la otra es la generatriz que pasa por el punto de tangencia, siendo además este plano paralelo a la recta dada.

En la figura **11.8** se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro oblicuo con eje **AB** y la recta **MN**, se desea trazar un plano paralelo a la recta dada y tangente al cilindro.

PROCEDIMIENTO:

1. En la vista frontal, se asume el punto **P** en la recta **MN**.
2. Luego trazar una recta **RS** que pase por el punto asumido, y que sea paralelo al eje del cilindro **AB**.
3. Se prolonga la recta **MN** hasta que corte al plano base en el punto **Y**.
4. En la vista horizontal, se traza la recta **CD** paralela a **RY** y tangente en **T** a la base del cilindro.
5. Luego trazar la generatriz **TU** paralelo al eje del cilindro.
6. **CDEF** representa el plano tangente al cilindro y paralelo a la recta **MN**. Por el lado opuesto determina una segunda solución.

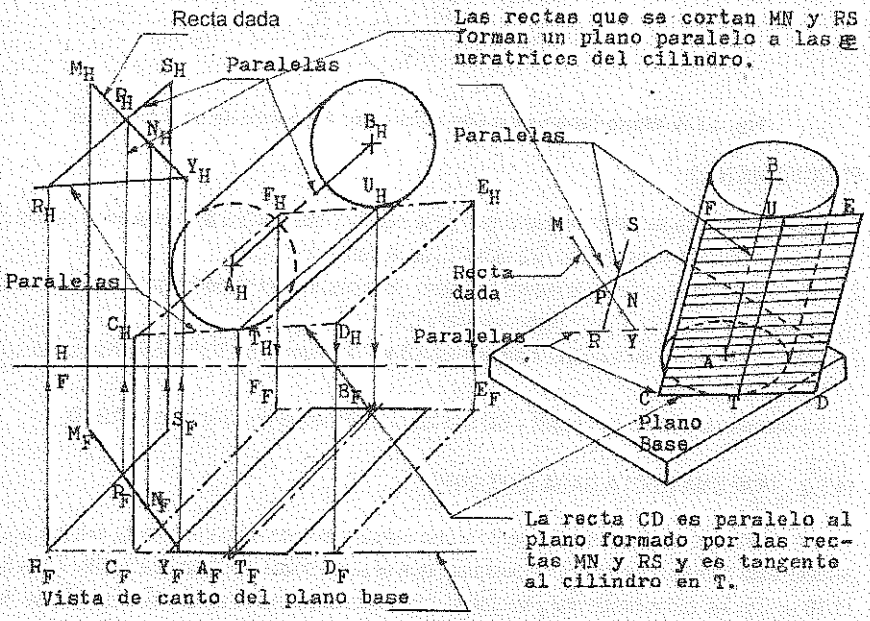


Fig. 11.8 Plano tangente a un cilindro y paralelo a una recta.

11.5 PLANO TANGENTE A UNA ESFERA.

11.5.1 POR UN PUNTO CONTENIDO EN SU SUPERFICIE.

Un plano que sea tangente a una esfera, será perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia. En la figura **11.9** se dan las vistas horizontal y frontal de una esfera cuyo centro es **O** y la vista frontal del punto **T** de su superficie se desea trazar un plano tangente en el punto dado.

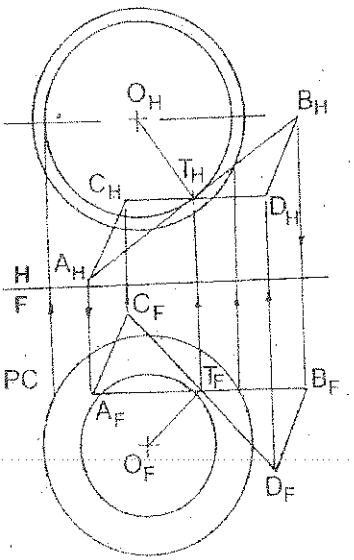


Fig. 11.9 Plano tangente a una esfera por un punto de su superficie.

PROCEDIMIENTO:

1. Para localizar T_H se utiliza un plano que pase por A_F y que corte a la esfera en el círculo horizontal en la vista superior; localizándose T_H en el frente del círculo.
2. La recta **OT** es el radio de la esfera del punto de contacto, y el plano tangente solicitado deberá pasar por el punto **T** y ser perpendicular a **OT**.
3. Trácese las rectas de longitudes arbitrarias **AB** y **CD** tangente en **T** al círculo horizontal y frontal respectivamente.
4. La intersección de las rectas **AB** y **CD** son las que definen el plano solicitado **ABCD**.

11.5.2 POR UNA RECTA DADA EXTERNA.

Para que un plano sea tangente a una esfera y que contenga una recta externa a la superficie, esta deberá proyectarse de punta par que el plano solicitado aparezca de filo. En la figura **11.10** se dan las vistas horizontal y frontal de una esfera cuyo centro es **O** y la recta **AB**; se desea trazar un plano tangente a la esfera que pase por la recta dada.

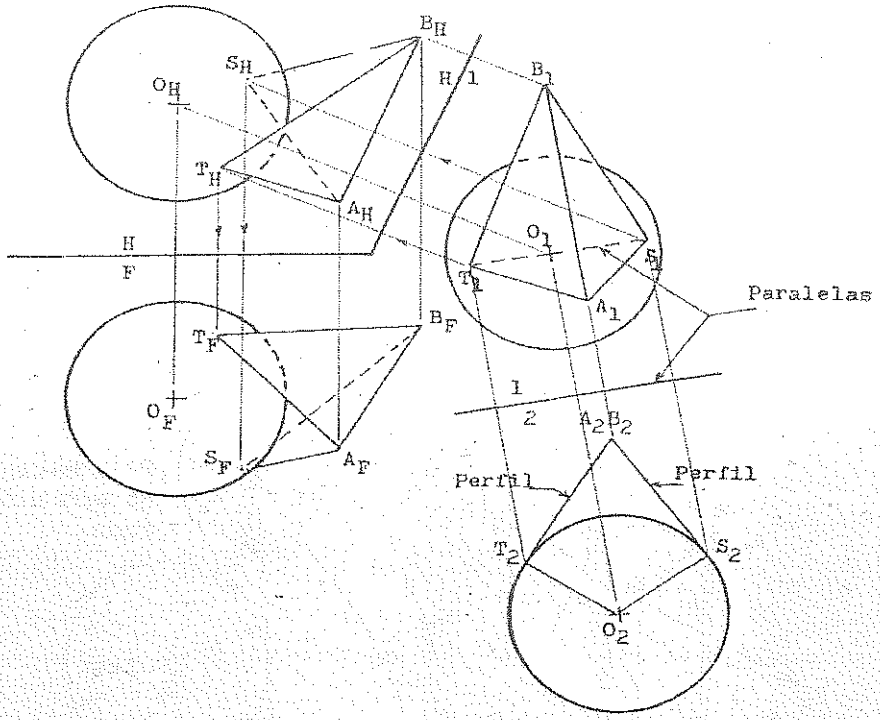


Fig. 11.10 Planos tangentes a una esfera, trazados a partir de una recta externa.

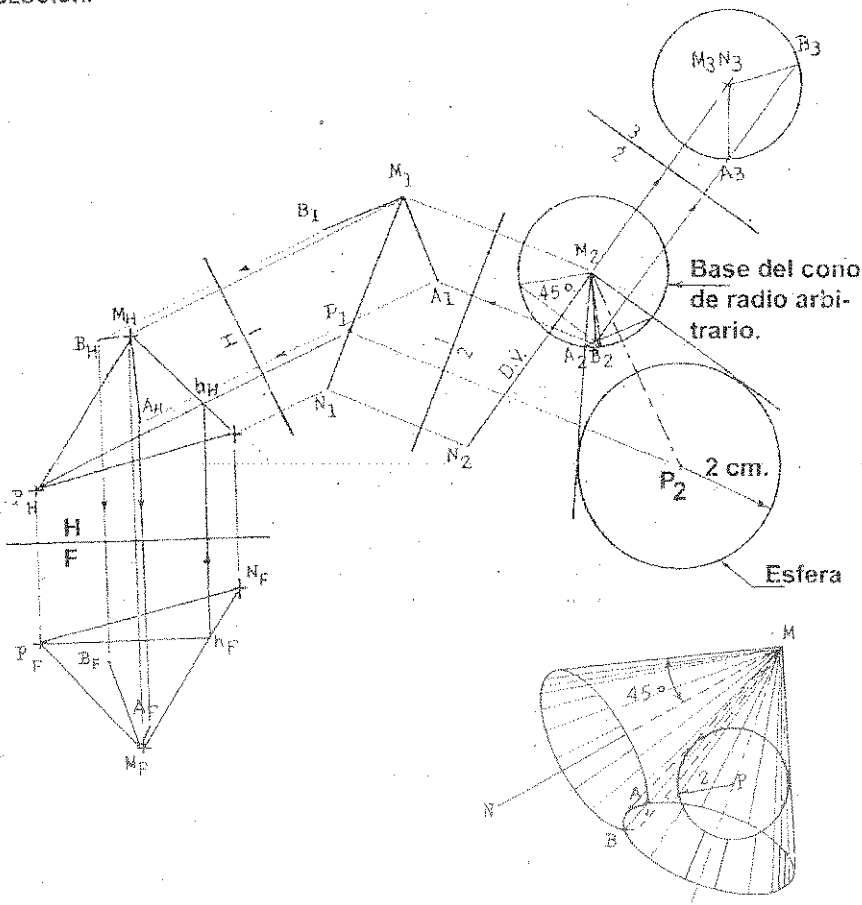
PROCEDIMIENTO:

1. Mostrar a la recta **AB** de punta, usando una elevación auxiliar.
2. A partir de la vista de punta de la recta AB, se trazan dos planos, figurando cada uno de perfil y tangentes a la esfera en los puntos **S** y **T**.
3. Regresamos los puntos de tangencia a las vistas principales, los cuales unidos con **AB** nos dan los planos buscados (dos soluciones).
4. Como los puntos **S** y **T** están situados en el círculo máximo, que forma el contorno del plano de proyección **2**; los puntos **S** y **T** en el plano de proyección **1** están situados en un diámetro de la esfera a la línea de referencia **1/2**.
5. La visibilidad de los puntos de tangencia en cada proyección se determina, observando en una proyección adyacente si estos puntos están situados en la semiesfera más cercana o la más alejada del observador.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 11.1: Vienen dados en la recta **MN** y el punto **P**. Trazar por el punto **M** rectas que cortan a **MN** bajo un ángulo de **45°** y que se encuentren a la distancia de **2** cm del punto **P**.
M(3, 4, 12), N(5, 7 10), P(1, 6, 9)

SOLUCIÓN:



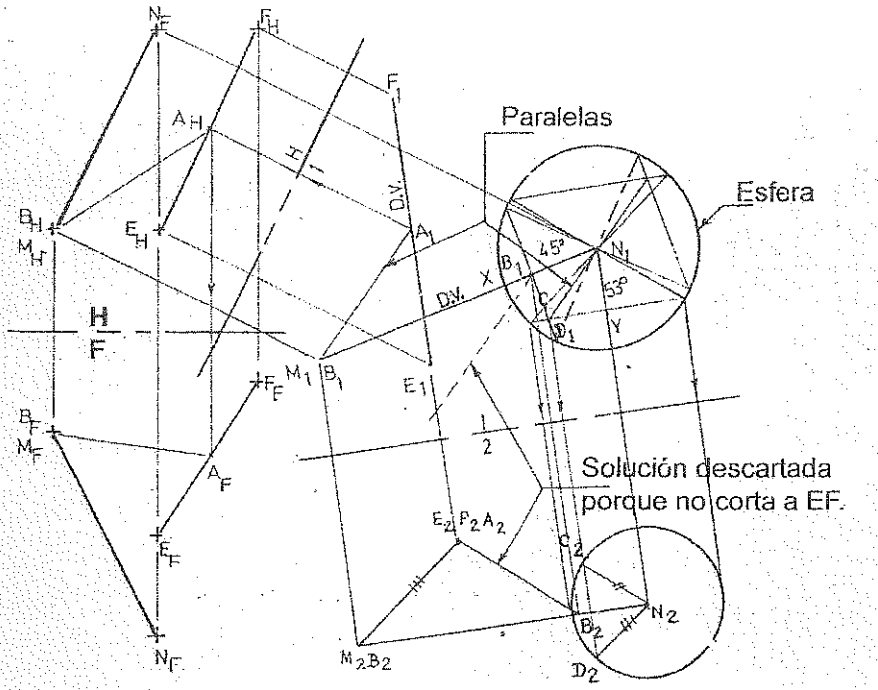
PROCEDIMIENTO:

1. El punto **P** y la recta **MN** definen un plano; luego a este plano en la proyección **1** la proyectamos de filo, y en la proyección **2** la proyectamos en dimensión verdadera.
2. En el plano de proyección **2**, con centro en **P** trazamos una esfera de **2** cm de radio. Desde el punto **M** trazamos un cono de altura arbitraria, tangentes a la esfera o circunscrita a la esfera.

3. Desde el extremo M, trazamos otra superficie cónica, con eje a la recta MN y con un ángulo de 45° de inclinación de las generatrices al eje.
4. En el plano de proyección 3 se utiliza para ubicar la posición de los puntos A y B, la cual proyectamos a las vistas principales.
5. Las rectas buscadas MA y MB son las rectas de intersección de dos superficies cónicas con vértice en el punto M: una con el eje MN y el ángulo de 45° de inclinación de las generatrices al eje la otra, circunferencia a la esfera de radio de 2 cm con centro en P.

PROBLEMA 11.2: Están dados dos rectas que se cruzan MN y EF. Trazar la recta AB que corta a dichas rectas y que forma con la recta MN un ángulo de 45° y con la recta EF un ángulo de 53°. M(1, 8, 12), N(3, 4, 17), F(5, 9, 16).

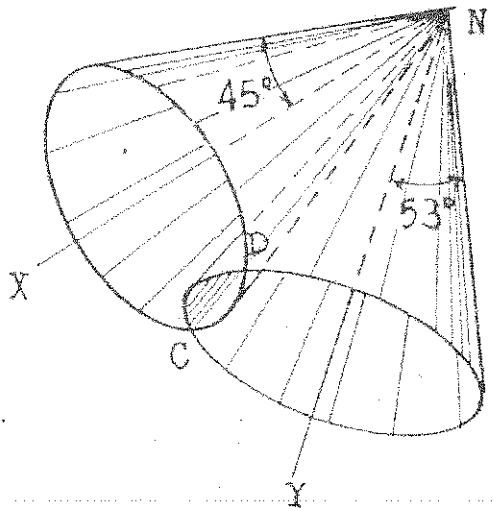
SOLUCIÓN:



PROCEDIMIENTO:

1. Para determinar la dirección de la recta AB, es necesario trazar por un punto arbitrario (N) las rectas NX//MN y NY//EF; circunscribir a estas superficies cónicas con los ángulos de inclinación de las generatrices al eje 45° y 53° respectivamente, y hallar la línea de intersección NC y ND. La recta AB es paralela a esta recta.

2. En el plano de proyección 1 las rectas **MN** y **EF** se proyectan en dimensión verdadera. Luego en el plano de proyección **2** la recta **EF** se proyecta de punta.
3. En el plano de proyección **1**, con centro en **N** trazamos una esfera de radio arbitrario. Luego trazamos dos conos con inclinaciones de **45°** y de **53°** de sus generatrices con respecto al eje y circunscrita a la esfera. El plano de proyección 3 se utiliza para ubicar la posición de los puntos de intersección **C** y **D** y de la recta paralela a NC y **ND**.



PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 11.1: O es el centro de un circulo de 6 cm de diámetro, base de un cono con vértice V. Por el punto C del cono trazar el plano VAB tangente al cono.
O(13, 2.5, 15), V(13, 7.5, 15), A(7.5,?, ?), B(13, ?, ?), C (12, ?, 14).

PROBLEMA 11.2: V es el vértice de un cono y O es el centro de su base circular frontal de 6 cm de diámetro. Por el punto Y del cono pasa el plano VRS tangente al cono.
V(13, 7.5, 18), O(5, 7.5, 18), Y(6, 9, ?), R(2.5, ?, ?), S(7.5, ?, ?).

PROBLEMA 11.3: V es el vértice de un cono recto y C es el centro de su base de 6 cm de diámetro. Trazar un plano VRS por el punto N tangente al cono y con inclinación hacia atrás.
V(13, 7.5, 15), C(13, 2.5, 15), R(5, ?, ?), S(13, ?,?), N(9, 5, 14).

PROBLEMA 11.4: C es el centro de un círculo horizontal de 6 cm de diámetro base de un cono con vértice V. Pasar un plano por X tangente al cono y con inclinación hacia delante.
C(5 ,2.5, 13), V(10, 7.5, 18), X(12, 5, 14).

PROBLEMA11.5: O es el centro de un círculo frontal de 6 cm de diámetro, base de un cono con vértice V. Trazar un plano paralelo a la recta AB, tangente al cono y con inclinación hacia atrás.
O(7.5, 6, 13), V(13, 2.5, 15), A (15, 6, 18), B(18, 7.5, 14).

PROBLEMA 11.6: V es el vértice de un cono y C es el centro de su base horizontal de 6 cm de diámetro. Trazar un plano paralelo a la recta RS, tangente al cono y con inclinación hacia atrás.
V (10, 7.5, 14), C(15, 2.5, 15), R(5, 7.5, 14), S(2.5, 4, 15).

PROBLEMA 11.7: Por el punto A de la superficie del cono de vértice V y base circular horizontal de 6 cm de diámetro con centro en O, trazar un segmento de recta de 3 cm de longitud, normal a la superficie de dicho cono.
V(11, 8, 11), O(4.5, 2, 16), A(3, ?, 14.5).

PROBLEMA 11.8: Se dan el cono de vértice V y base de centro O y el plano ABC, se desea trazar un plano tangente al cono dado y a la vez perpendicular al plano dado. Además se sabe que la directriz del cono es un círculo de 5 cm de diámetro.
C(5.5,6.5,12.5), V(9,9,11.5), 0(9,5.5,11.5), A(1.5,5,10.5), B(3.5,7.5,9)

PROBLEMA 11.9: El vértice de un cono de revolución es B y su directriz circular de 5 cm de diámetro tiene como centro P. Trazar una esfera de centro T tangente a dicho cono.
B(6,9,21), P(2,13.5,18), T(6,12.5,17.5)

PROBLEMA 11.10: RS es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 5 cm de diámetro. Trazar el plano ABCD por el punto K en el lado frontal del cilindro, tangente a este.
R(7.5,2.5,13), S(13,7.5,15), A(10, ¿?,?), B(14,?,?), C(9,?,?,), D(5, ¿?,?), K(10,6,?)

PROBLEMA 11.11: GE es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 5 cm de diámetro. Trazar un plano por el punto T, tangente al lado inferior del cilindro.
G(5,7,13), E(9,3,11), T(4,5,11)

PROBLEMA 11.12: AB es el eje de un cilindro oblicuo, cuyos extremos son círculos frontales de 4 cm de diámetro. N es un punto del lado superior del cilindro. Trazar un plano por N tangente al cilindro.
A(7.5,7.5,18), B(13,5,13), N(7.5,?,16.5)

PROBLEMA 11.13: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene en sus extremos bases circulares horizontales de 4 cm de diámetro. Trazar un plano por K tangente al lado inferior del cilindro.
A(5,7.5,15), B(10,2.5,13), K(4,5,13)

PROBLEMA 11.14: LM es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 5 cm de diámetro. Trazar un plano por Y tangente al lado superior del cilindro.
L(7.5,5,18), M(13,7.5,13), Y(15,5,15)

PROBLEMA 11.5: PQ es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 4 cm de diámetro. Trazar un plano paralelo a la recta RS tangente al lado inferior del cilindro.
P(5,7.5,13), Q(10,1,18), R(13,6,13), S(15,7.5,10)

PROBLEMA 11.16: LM es el eje de un cilindro oblicuo con extremos circulares frontales de 4 cm de diámetro. Trazar un plano paralelo a la recta AB tangente al lado superior del cilindro.
L(9,5,13), M(15,7.5,18), A(2.5,11.5,16.5), B(5,7.5,13)

PROBLEMA 11.17: LM es el eje de un cilindro oblicuo cuyas bases son círculos frontales de 4 cm de diámetro. Trazar un plano que pase por el punto T y sea tangente al cilindro.
L(5,5,15), M(9,7,11), T(11,5,13).

PROBLEMA 11.18: El segmento XY es el eje de un cilindro oblicuo cuyas bases son círculos horizontales de 4 cm de diámetro. Trazar un plano tangente al cilindro y que forme con el plano frontal de proyección un ángulo de 60°.
X(6,3,11), Y(10,7,13)

PROBLEMA 11.19: O es el centro de una esfera de 5 cm de diámetro y R es un punto de su superficie superior. Trazar el plano RST tangente a la esfera en R.
O(10,5,15), R(9,?,14), S(13,?,?), T(11,?,?)

PROBLEMA 11.20: Q es el centro de una esfera de 6 cm de diámetro, y B es un punto de su superficie frontal. Dibujar el triángulo opaco ABC tangente a la esfera en B, e indicar la visibilidad.
Q(7.5,5,15), B(5.5,6,?), A(2.5,?,?), C(8,?,?)

PROBLEMA 11.21: O es el centro de una esfera de 5 cm de diámetro. Dibujar el triángulo opaco LMN tangente a la superficie superior de la esfera en N. Indicar la visibilidad.
O(4,5,13), L(5,8,16.5), M(9,4,14.5)

PROBLEMA 11.22: Q es el centro de una esfera de 5 cm de diámetro. Dibujar los triángulos opacos RST y RSU tangentes a la esfera en los puntos T y U respectivamente. Indicar la visibilidad.
Q(4,5,15), R(9,9,16.5), S(7.5,6,13)

PROBLEMA 11.23: O y Q son los centros de dos esferas de 4 y 3 centímetros de diámetro respectivamente. Trazar un plano por A, que se incline hacia atrás y sea tangente a ambas esferas.
O(3,4,13), Q(6,3,14.5), A(7,4,13.5)

PROBLEMA 11.24: Hallar las proyecciones horizontal y frontal de la esfera de centro O, tangente a las rectas AB y CD en L y M respectivamente.
A(3,4,13), B(7,4,13), L(4,4,11.5), C(8,3,12), D(12,7,8), M(9,4,11)

PROBLEMA 11.25: O es el centro de una esfera de 5 cm de diámetro. Q es el centro de una esfera de 2.5 cm de diámetro. Trazar un plano por R que se incline hacia atrás y sea tangente a ambas esferas.
O(4,4,15), Q(7.5,2.5,17), R(9,5,16)

PROBLEMA 11.26: A es el centro de una esfera de 2.5 cm de diámetro. B es el centro de una esfera de 5 cm de diámetro. Pasar un plano por D tangente a ambas esferas en sus lados de abajo. A(14,2.5,16.5), B(16.5,4,14), D(11.5,5,15)

PROBLEMA 11.27: Trazar a través de los tres puntos X, Y y Z una esfera tangente a la esfera de centro O y de 6 cm de diámetro.
X(4.5,3.5,11), Y(6,3.5,13), Z(8,3.5,11.5), O(11,8,14)

PROBLEMA 11.28: Hallar el centro y las proyecciones de la esfera tangente al plano ABCD y a la recta XY, y que para por el punto P el cual se encuentra sobre la circunferencia determinada por un plano que pasa por el centro de la esfera, circunferencia que es también tangente al plano ABCD y a la recta XY. Indicar la visibilidad.
A(2,7.5,11.5), B(4.5,7.5,8.5), C(4.5,4,8.5), D(2,4,11.5). X(5.5,5,9), Y(7.5,7.5,11.5), P(5,?,12)

PROBLEMA 11.29: Dibujar las proyecciones de un plano que pasa por la recta AB y forma un ángulo de 60° con el plano RST.
A(3,6,12), B(7,4,14), R(3,7,13), S(5,3,15), T(7,5,12)

PROBLEMA 11.30: Trazar un plano por la recta XY que haga un ángulo de 45° con el plano de perfil. X(4,8,13), Y(8,3,16)

PROBLEMA 11.31: Se da la recta XY y un plano ABC ortogonal, que forme un ángulo de 60° con el plano horizontal. Trazar por O una recta que haga un ángulo de 75° con ABC y 70° con XY.
X(3,6,19), Y(5,2,13.5), O(6,3,12.5), A(11,10,?)

PROBLEMA 11.32: Hallar las proyecciones de una esfera que pase por los puntos R, S y T, y sea tangente a la recta AB.
R(7,4,9.5), S(9,4,10), T(10,4,8), A(6.5,2.5,10), B(9.5,3.5,9)

PROBLEMA 11.33: Trazar por P un plano paralelo a la recta AB y que haga un ángulo de 55° con el plano vertical LMN.
A(3,2,11), B(5,5,10), P(4,4,9), L(3.5,2,8), M(6,1,7), N(8,2.5,9)

PROBLEMA 11.34: Trazar una recta XY de 2.5 cm de longitud, pero que haga un ángulo de 45° con RS y 30° con PQ.
P(3, 10, 16), Q(6, 11, 14), X(4, 9, 18), R(5, 7, 20), S(9, 6, 19).

PROBLEMA 11.35: Pasar por P una recta de 4 cm que pase a una distancia de 1.5 cm de RS pero que tenga una pendiente de 45°.
S(12, 3, 12), R(14, 6, 15), P(16, 3, 11).

PROBLEMA 11.36: Trazar una recta MN con 5 cm de longitud que pase a una distancia de 1.5 cm de P, pero que tenga una pendiente de 45°.
P(8, 2, 10), L(10, 1, 12).

PROBLEMA 11.37: El plano LMN tiene pendiente de 60° y pasa a una distancia de 2 cm de la recta RS. Completar las proyecciones del plano.
R(13, 5, 11), S(16, 7, 13), L(15, ?, 16), M(17, ?, 17), N(16, ?, 14).

PROBLEMA 11.38: Trazar una recta RS contenida en el plano ABC que tenga una pendiente de 30° pero que pase a una distancia de 2 cm de L.
C(7, 8, 17), A(9, 6, 15), B(11, 10, 16.5), L(11, 8, 16).

PROBLEMA 11.39: Desplazar el punto B paralelamente a una recta de orientación N30°E y pendiente 110% hasta B' de tal manera que AB' sea tangente a la esfera, de 3 cm de radio.
A(6, 6, 14), B(10, 4, 10), O(10.5, 4.5,14).

PROBLEMA 11.40: O y O' son los centros de dos esferas de 4 cm y 2 cm de diámetro respectivamente. Trazar por un plano por el punto P tangente las dos esferas.
O(8, 9, 14), O'(10, 10, 16), P(8, 11, 15).

CAPÍTULO 12

INTERSECCIÓN DE PLANOS CON POLIEDROS Y SUPERFICIES

12.0 INTRODUCCION.

Cuando un plano intercepta a una superficie reglada* lo hará según una figura llamada sección plana. La intersección de dos superficies planas es una recta, por lo tanto, cuando una superficie plana intercepta las caras de un poliedro o las generatrices de una superficie (ver la figura 12.1); intercepta a cada una de las caras respectivamente, según una recta o un punto definido.

* Superficie Reglada:
Es engendrado por el movimiento de una línea recta. Se clasifican en: a) Poliedros b) Superficies de simple curvatura c) Superficies alabeadas.

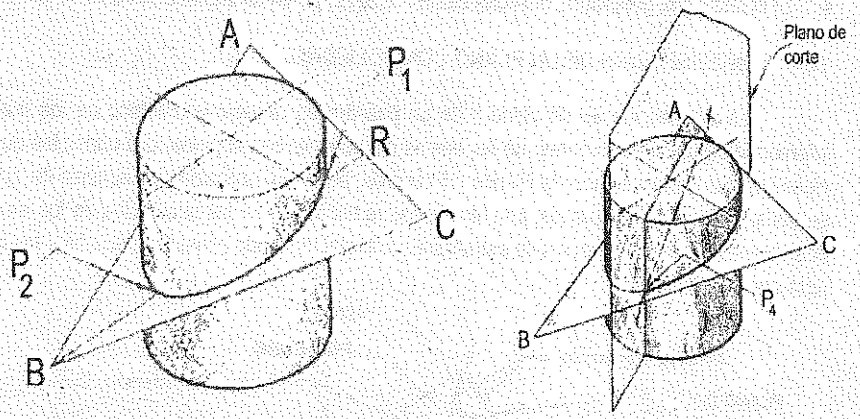


Fig.12.1 Intersección de un plano con una superficie de simple curvatura.

12.1 METODOS PARA HALLAR LA INTERSECCION.

1. METODO DE LA VISTA DE CANTO: Consiste en mostrar el plano en vista de canto o de filo (perfil), ya sea empleando una proyección adyacente a la horizontal o a la proyección frontal.

2. METODO DEL PLANO CORTANTE: Consiste en pasar el plano cortante por una de las aristas del poliedro, o por una de las generatrices de la superficie, o por uno de los lados del plano.

12.2 REGLAS DE VISIBILIDAD.

Antes de aplicar estas reglas de visibilidad de rectas, generatrices, aristas o de las superficies planas, debemos aplicar correctamente sus reglas; pero teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

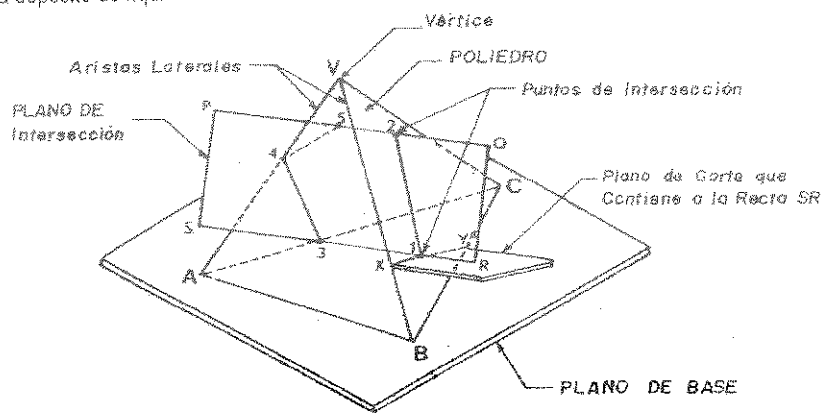
1. Hallar la visibilidad del poliedro o de la superficie a interceptar, aplicando las reglas del **capítulo 2.**
2. Considerar al signo (+) como visible y el signo (-) como invisible.
3. No se aplica la regla de los signos.

A continuación enunciamos las reglas de visibilidad de los puntos de intersección:

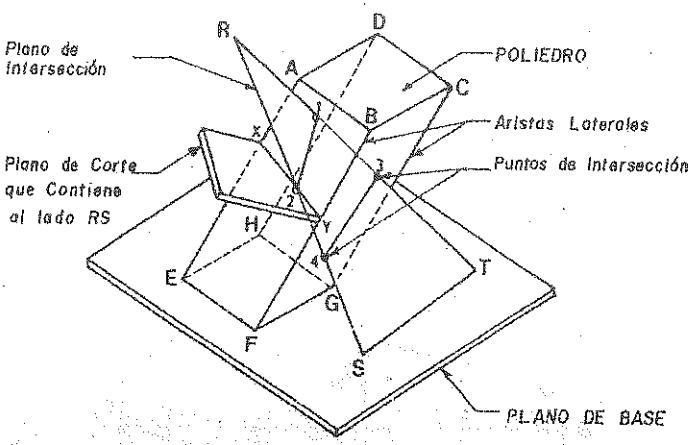
1. Si una recta o la generatriz que se intercepta con una superficie plana son visibles, el punto de intersección será visible.
2. Si la recta(o la generatriz) o la superficie plana, o ambas están ocultas, el punto de intersección será invisible.
3. Si una recta que se intercepta con una generatriz son visibles, el punto de intersección será visible.
4. Si la recta, o la generatriz, o ambas están ocultas el punto de intersección es invisible.

12.3 INTERSECCION DE UN PLANO CON POLIEDRO.

La intersección de un plano y de un poliedro es el lugar geométrico de los puntos de intersección (puntos perforantes) de las aristas del poliedro con el plano. Los principios que intervienen en las intersecciones de Planos y Poliedros, tienen su aplicación en el corte de aberturas en las superficies de los techos, en chimeneas, ventiladores, en las superficies de los muros, tubos, rampas, en la construcción de estructuras de metal laminado como las calderas y los tanques para depósito de líquidos.



a) Intersección de Plano con Pirámide.



b) Intersección de Plano con Prisma.
Fig. 12.2 Intersección de Plano con Poliedro.

Si un plano corta a las caras de un poliedro (prisma ó Pirámide), al intersecar a sus caras laterales lo hará según líneas rectas que al unirlas forman una figura plana llamada "la sección plana de intersección"; tal como se observa en la figura 12.2 (a y b).

La sección plana de intersección entre un plano y un poliedro se puede determinar usando los siguientes métodos:

1. **Método de la Vista de Canto:** Este método consiste en proyectar al plano dado en vista de canto, utilizando un plano de elevación o de inclinación.

2. **Método del Plano Cortante:** Este método consiste en buscar la intersección del Plano Cortante que pasa por una arista del plano (o del poliedro) con una cara del poliedro (con la superficie plana dada).

12.3.1 INTERSECCION DE UN PLANO CON UNA PIRAMIDE.

Se utilizará el método del Plano Cortante para encontrar la sección plana solicitada, en que la pirámide perfora al plano dado.

PROBLEMA: En la figura 12.3 se dan las proyecciones principales del Plano **RST** y de la Pirámide oblicua **V-ABCD**, cuya base cuadrangular es normal, se desea determinar la intersección y mostrar la visibilidad que produce en la pirámide el plano dado.
R(1,3,9), S(2,7,16), T(8,4,11)
V(5,1,12.5), A(1,6,12), B(6,?,15.5), C(9,8,13), D(4,?,9.5).

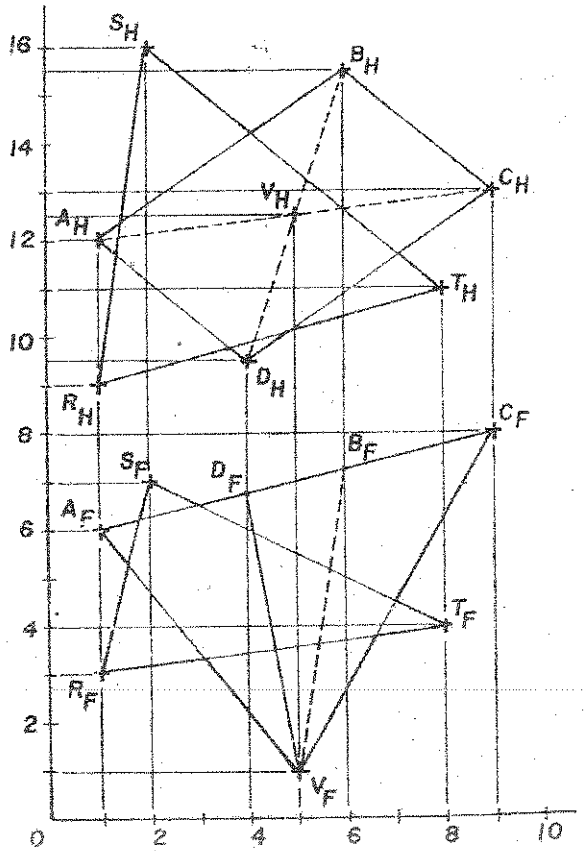


Fig. 12.3 Vistas Principales del Plano RST y de la Pirámide V-ABCD.

12.3.1.1 METODO DEL PLANO CORTANTE.

Para hallar los puntos de intersección se debe trazar un Plano Cortante que contenga a una arista del Plano ó de la Pirámide y analizar utilizando el método de Recta con Plano; tal como se observa en la figura 12.2 (a).

TABLA DE VISIBILIDAD:

RECTA	VISIB		PLANO	VISIB		INT	VISIB	
	H	F		H	F		H	F
ST	+	+	AVB	-	-	1	-	-
AV	-	+	RST	+	+	2	-	+
DV	-	+	RST	+	+	3	-	+
ST	+	+	CVD	-	+	4	-	+

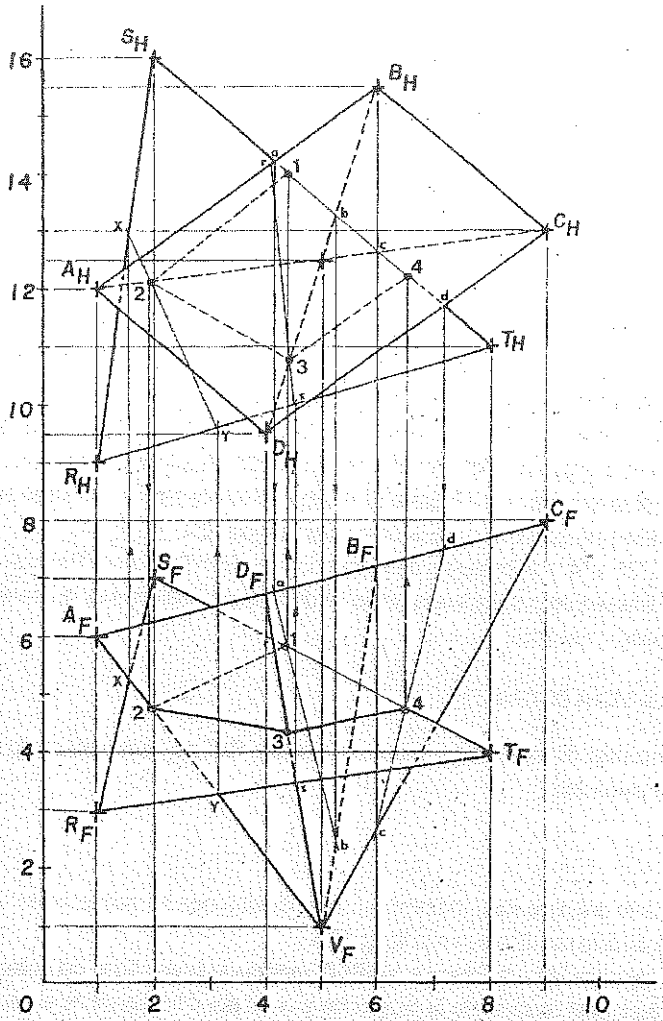


Fig.12.4 Intersección de un Plano con una Pirámide. Método del Plano Cortante

PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos dados según sus coordenadas, unir los puntos del Plano **RST** y formar la Pirámide mostrando la visibilidad de sus aristas, tal como se observa en la figura **12.3.** Por ejemplo en H: el vértice V es invisible porque está dentro del contorno de la proyección y en el Plano frontal es el vértice más alejado, luego todas las aristas que partan del vértice V tendrán su visibilidad. En F: las aristas BV y DV, en el plano horizontal BV están detrás y DV delante de éste; luego BV será invisible y DV visible.

2. En el Plano Horizontal trazar el PC-1 que contenga a la arista ST y que corte a la cara AVB de la Pirámide, en los puntos "a" contenida en la arista AB y "b" contenida en la arista BV. Proyectamos y unimos estos puntos en el Plano Frontal, la recta ab corta a la arista ST en el punto de intersección "1", luego se proyecta este punto al Plano Horizontal, tal como se observa en la figura 12.4.
3. En el Plano Frontal trazar el PC-2 que contenga a la arista AV y que corte al plano RST en los puntos "x" contenida en la arista RS e "y" contenida en la arista RT. Proyectamos y unimos estos puntos en el Plano Horizontal, la recta xy corta a la arista AV en el punto de intersección "2"; luego proyectar este punto al Plano Frontal, tal como se observa en la figura 12.4.
4. En el Plano Frontal trazar el PC-3 que contenga a la arista DV y que corte al plano RST en los puntos "r" contenida en la arista ST y "s" contenida en la arista RT. Proyectamos y unimos estos puntos en el Plano Horizontal, la recta rs corta a la arista DV en el punto de intersección "3"; luego proyectar este punto al Plano Frontal, tal como se observa en la figura 12.4.
5. Utilizando el PC-1 que contiene a la arista ST y que corte a la cara CVD de la Pirámide, en los puntos "c" contenida en la arista CV y "d" contenida en la arista CD. Proyectar y unir estos puntos en el Plano Frontal, la recta cd corta a la arista ST en el punto de intersección "4"; luego proyectar este punto al Plano Horizontal, tal como se observa en la figura 12.4.
6. Los puntos "1", "2", "3" y "4" son los puntos de intersección del Plano RST con la Pirámide V-ABCD, siendo esta intersección por mordedura; luego se determina la visibilidad de la intersección, aplicando la Tabla de visibilidad.

12.3.1.2 METODO DE LA VISTA DE CANTO.

Para hallar los puntos de intersección, proyectar al plano RST de canto, utilizando un plano de elevación o de inclinación.

PROCEDIMIENTO:

1. Hallar la vista de canto del plano RST, utilizando el plano de elevación H1 perpendicular a la recta horizontal Th, tal como se observa en la figura 12.5.
2. Proyectar al plano de elevación a la Pirámide V-ABCD, mostrando la visibilidad del poliedro. El vértice A está dentro del contorno de la proyección y en el plano horizontal es el vértice más alejado, luego este vértice es invisible y todas las aristas que parten de él tendrán su visibilidad.
3. En el plano de elevación observamos que el plano de canto RST corta a la Pirámide en los puntos 3, a, b y 4 contenidas en las aristas AV, BV, CV y DV respectivamente.
4. Proyectar los puntos de la sección plana de intersección 3, a, b y 4 al plano horizontal sobre sus respectivas aristas que están contenidas, unimos estos puntos y limitamos la sección teniendo en cuenta al plano RST. En este plano de proyección observamos que los puntos "a" y "b" no se encuentra contenida en el plano RST, pero si los puntos "3" y "4" respectivamente.

5. Proyectar los puntos de intersección al Plano frontal sobre sus respectivas aristas en donde están contenidas y mostrar la visibilidad de la intersección del plano RST con la pirámide V-ABCD.

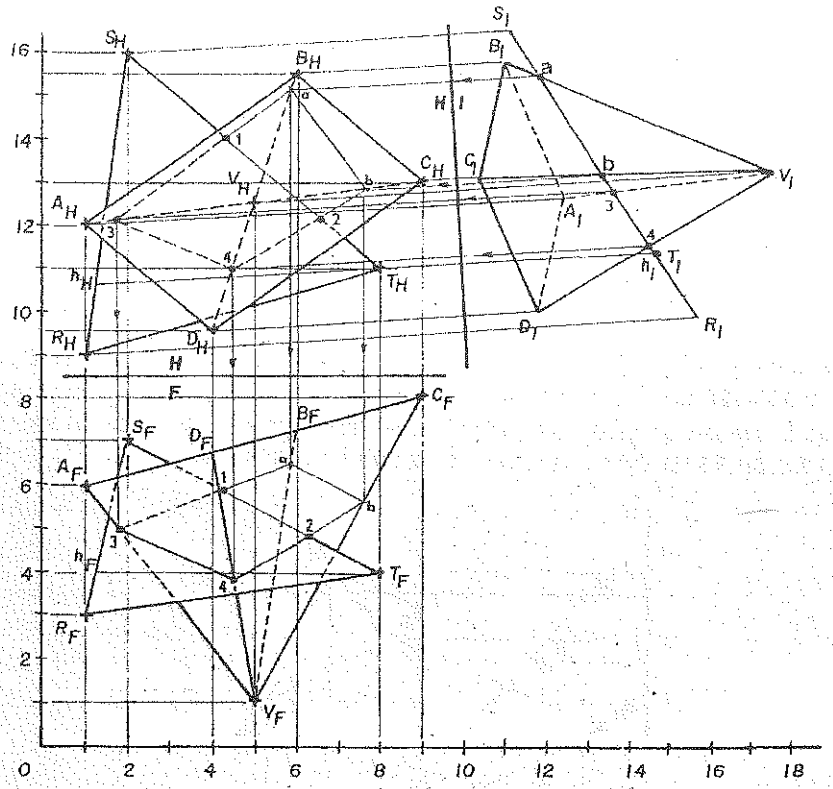


Fig. 12.5 Intersección de un Plano con un Pirámide. (Método de la Vista de Canto).

12.3.2 INTERSECCIÓN DE UN PLANO CON UN PRISMA.

La intersección de un plano con una superficie plana del prisma puede ser por penetración o por mordedura.

a. PENETRACIÓN: Se dice que la intersección es por penetración cuando los puntos de intersección están en una misma superficie plana. En la figura 12.6 los puntos de intersección **1** y **2** están en la misma superficie plana **ADHE** del prisma.

b. MORDEDURA: Se dice que la intersección es por mordedura cuando los puntos de intersección están indiferentes superficies planas. En la figura 12.6 los puntos de intersección **3** y **5** están en las superficies planas **DCGH** y **EFGH** respectivamente, el punto de intersección **4** se encuentra en el lado común **HG** de las dos superficies planas del prisma.

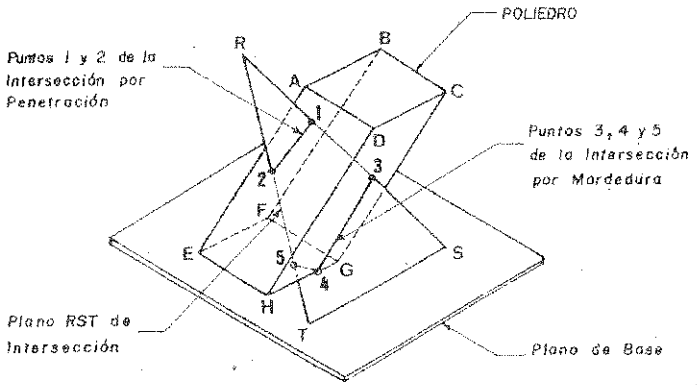


Fig. 12.6 Intersección de Plano Con Prisma.

PROBLEMA: En la figura 12.7 se dan las proyecciones principales del plano **RST** y del Prisma oblicuo **ABC-DEF** cuyas bases triangulares son normales; se desea determinar la intersección y mostrar la visibilidad que produce en el prisma el plano dado. R(10,3,13), S(6,1.5,8), T(1.5,5.5,13); A(4,1,8.5), B(1,3.5,10), C(2.5, - ,11.5), D(9,4,10.5), E(6,6.5,12), F(7.5, - ,13.5)

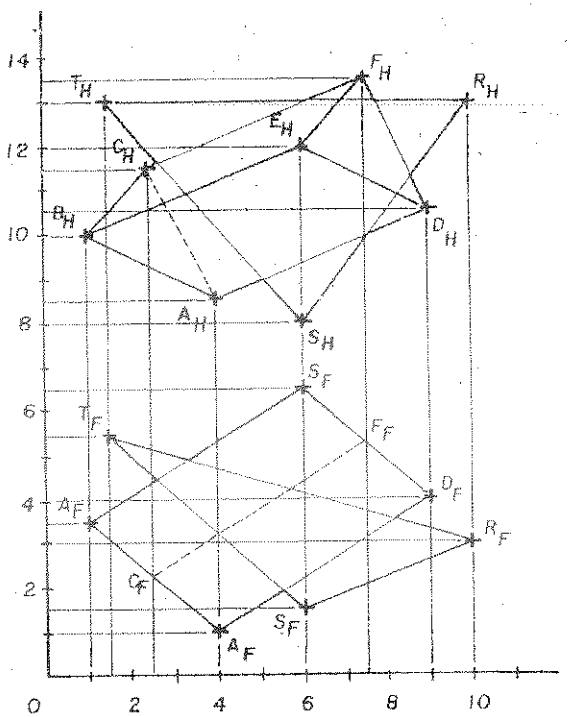


Fig. 12.7 Vistas Principales del Plano RST y del Prisma ABC-DEF

12.3.2.1 METODO DEL PLANO CORTANTE.

Para hallar los puntos de intersección entre un plano con un prisma, se debe trazar un Plano Cortante que contenga a una arista del plano o del Prisma, y se analiza utilizando el método de recta con plano; tal como se observa en la figura 12.6.

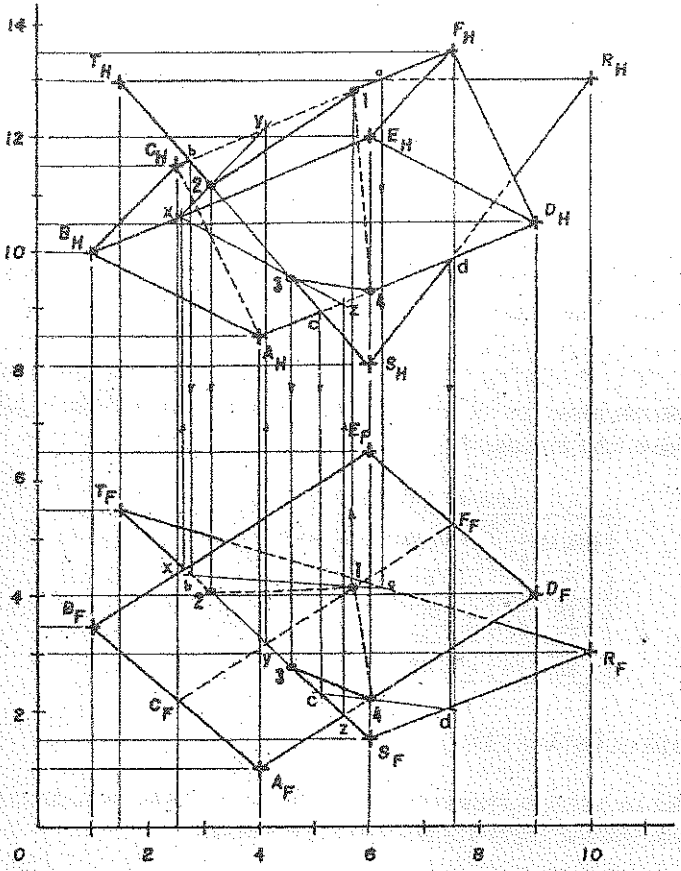


Fig. 12.8 Intersección del Plano RST con el Prisma ABC-DEF. (Método del Plano Cortante)

PROCEDIMIENTO:

1. Graficar los puntos dados según sus coordenadas, unir los puntos del Plano RST y formar el Prisma mostrando la visibilidad de sus aristas; tal como se observa en la figura 12.8. Por ejemplo en H: se cruzan las aristas BE y AC, desde el punto de cruce trazamos una línea de referencia al plano frontal y encontramos AC arriba de BE luego es visible e invisible respectivamente en el plano horizontal. En F: la arista CF es invisible porque en el plano horizontal es la arista más alejada.

2. En el Plano Horizontal trazar el PC-1 que contenga a la arista CF y que corte al plano RST, en los puntos **a** y **b** contenida en las aristas TR y TS respectivamente. Proyectar y unir estos puntos en el Plano Frontal, la recta **ab** corta a la arista CF en el punto de intersección **"1"**; luego proyectar este punto al Plano Horizontal, tal como se observa en la figura 12.8.
3. En el Plano Frontal trazar el PC-2 que contenga a la arista TS y que corte a la cara BCFE del prisma en los puntos **x** e **y** contenida en las aristas BE y CF respectivamente.
4. Proyectamos y unimos estos puntos en el Plano Horizontal, la recta **xy** corta a la arista TS en el punto de intersección **"2"**; luego proyectar este punto al Plano Frontal, tal como se observa en la figura 12.8.
5. Para hallar el punto de intersección "3", utilizamos el PC-2 y repetir el mismo procedimiento explicado en el paso (3), analizando a la recta TS con la cara ABCD del prisma.
6. En el Plano Horizontal trazar el PC-3 que contenga a la arista AD y que corte al plano RST en los puntos **c** y **d** contenida en las aristas TS y RS respectivamente.
7. Proyectar y unir estos puntos en el Plano Frontal, la recta **cd** corta a la arista AD en el punto de intersección **"4"**; luego proyectar este punto al Plano Horizontal tal como se observa en la figura 12.8.
8. Los puntos **"1"** , **"2"** , **"3"** y **"4"** son los puntos de intersección del Plano RST con la Prisma ABC-DEF, siendo esta intersección por mordedura; luego se determinan la visibilidad de la intersección, aplicando la Tabla de visibilidad.

TABLA DE VISIBILIDAD:

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
CF	+	-	RST	+	+	1	+	-
TS	+	+	BCFE	+	-	2	+	-
TS	+	+	ABED	+	+	3	+	+
AD	+	+	RST	+	+	4	+	+

12.3.2.2 METODO DE LA VISTA DE CANTO.

Para hallar los puntos de intersección entre un plano y un prisma, proyectar al plano RST en vista de canto, utilizando un plano de elevación o de inclinación.

PROCEDIMIENTO:

1. Hallar la vista de canto del Plano RST, utilizando el plano de elevación H1 perpendicular a su recta horizontal Rh.
2. Proyectamos al plano de elevación al Prisma ABC-DEF, mostrando la visibilidad del poliedro. El vértice B está dentro del contorno de la proyección y en el Plano Horizontal es el vértice más alejado, luego este vértice es invisible y todas las aristas que partan de él tendrán su visibilidad.
3. En el Plano de Elevación observamos que el plano de canto RST corta al Prisma en los puntos **"1"**, **"x"** y **"4"** contenida en las aristas CF, BE, AD respectivamente.

SOLUCION:

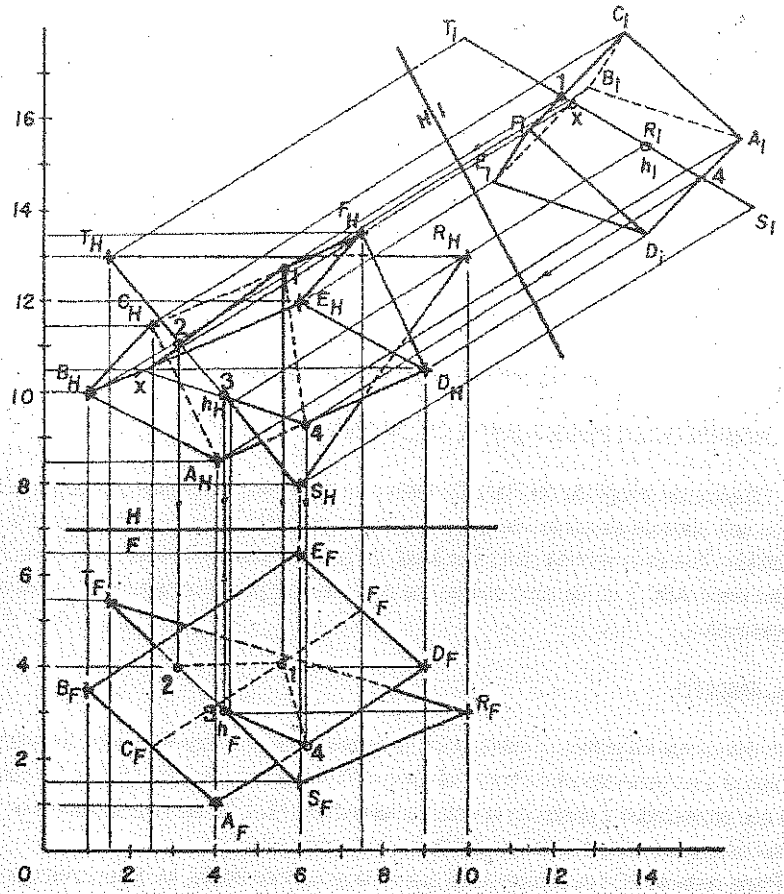


Fig. 12.9 Intersección del Plano RST con el Prisma ABC-EFD (Método de la Vista de Canto).

12.4 INTERSECCION DE PLANO CON SUPERFICIE..

La figura 12.5 muestra que el plano de corte vertical XY intercepta al cono a lo largo de dos elementos en línea recta O-2 y O-8 y al plano a lo largo de la recta RS. Los puntos G y H, donde los elementos interceptan a la recta RS, son puntos a lo largo de la recta de intersección requerida, porque ambos puntos quedan en el plano dado ABCD y están sobre la superficie del cono.

Cuando el plano de intersección es oblicuo como en la figura 12.10, es preferible utilizar el método del plano de corte.

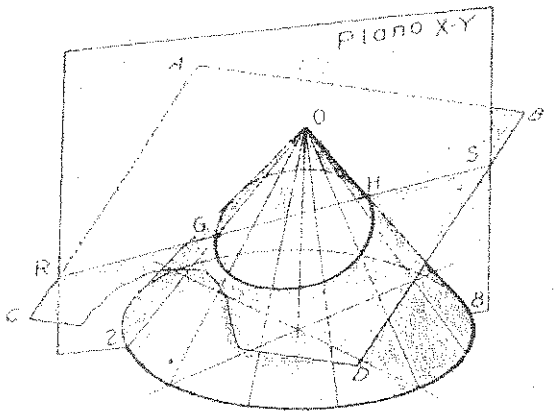


Fig. 12.10 Intersección de Plano con Cono.

12.4.1 INTERSECCION DE UN PLANO CON UN CONO.

Ubicaremos el método del Plano Cortante para determinar los puntos de intersección del plano con una serie de elementos del cono igualmente espaciados, se pueden trazar una línea curva continua que es la sección plana solicitada. En la figura **12.6** se dan las vistas horizontal y frontal del plano **ABC** y de un cono oblicuo; se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos elementos.

PROCEDIMIENTO:

1. Para determinar los puntos de intersección, debemos trazar una serie de planos cortantes que contenga a las generatrices del cono, tal como el PC-I que corta al plano ABC en los puntos a y b que proyectados y unidos en la vista frontal cortan a PC-I, localizando el punto 1 de la intersección, que será uno de los puntos de la intersección solicitada.
2. El Plano cortante PC-I es importante ya que en la proyección frontal, es el punto de tangencia de la curva con el elemento extremo, donde la curva pasa de invisible a visible.
3. De manera similar se establecen los demás puntos de intersección. La visibilidad se determina aplicando las reglas de visibilidad que se ven en el punto 12.2.

TABLA DE VISIBILIDAD:

GEN	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
CONO	H	F		H	F		H	F
V1	-	+	ABC	+	+	1	-	+
V2	-	+	ABC	+	+	2	-	+
V3	-	+	ABC	+	+	3	-	+
V4	+	+	ABC	+	+	4	+	+
V5	+	-	ABC	+	+	5	+	-
V6	-	-	ABC	+	+	6	-	-

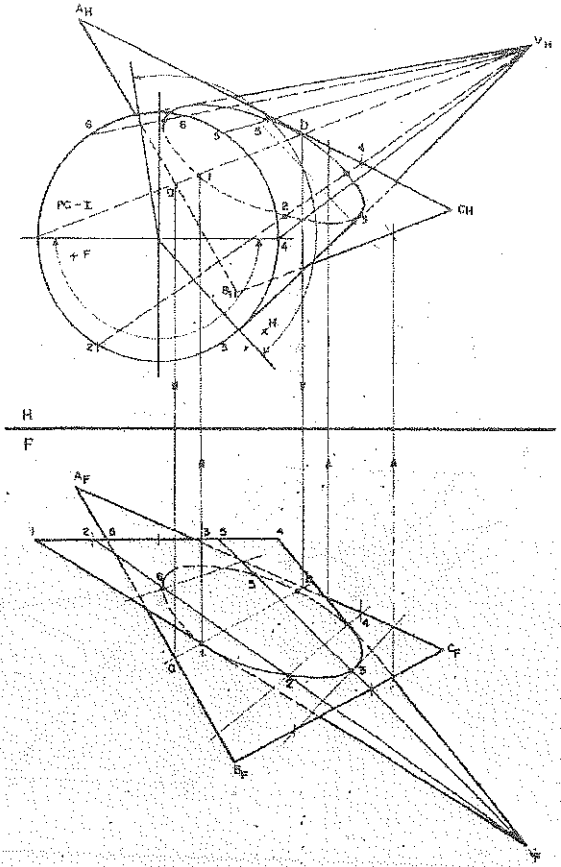


Fig. 12.6 Intersección de un Plano con un cono oblicuo (Método del Plano Cortante)

12.4.2 INTERSECCION DE UN PLANO CON UN CILINDRO

Utilizaremos el método del Plano Cortante para determinar los puntos de intersección del plano con una serie de elementos del cilindro, determinándose una línea curva continua que es la sección plana solicitada. En la figura 12.7 se dan las vistas horizontal y frontal del plano **ABC** y de un cilindro oblicuo; se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos elementos.

PROCEDIMIENTO:

1. Para determinar los puntos de intersección, debemos trazar una serie de planos cortantes que contenga a las generatrices del cilindro.
2. Trazar el Plano Cortante **PC-II** que contiene a la generatriz **2-2** del cilindro y que corta a las aristas **AB** y **AC** del plano **ABC** en los puntos **a** y **b** respectivamente.

3. Proyectar los puntos a y b a la vista horizontal, se unen y esta recta se corta con el plano cortante PC-II, en el punto "2" de intersección; que será uno de los puntos de la intersección solicitada.
4. De manera similar se obtienen los demás puntos de intersección.
5. La visibilidad se determinan aplicando las reglas de visibilidad del punto 12.2.

TABLA DE VISIBILIDAD:

GEN CILIN	VIS H	VIS F	PLANO	VIS H	VIS F	INT	VIS H	VIS F
11'	+	+	ABC	+	+	1	+	+
22'	+	+	ABC	+	+	2	+	+
33'	-	+	ABC	+	+	3	-	+
44'	-	+	ABC	+	+	4	-	+
55'	-	+	ABC	+	+	5	-	+
66'	+	-	ABC	+	+	6	+	-
77'	+	-	ABC	+	+	7	+	-

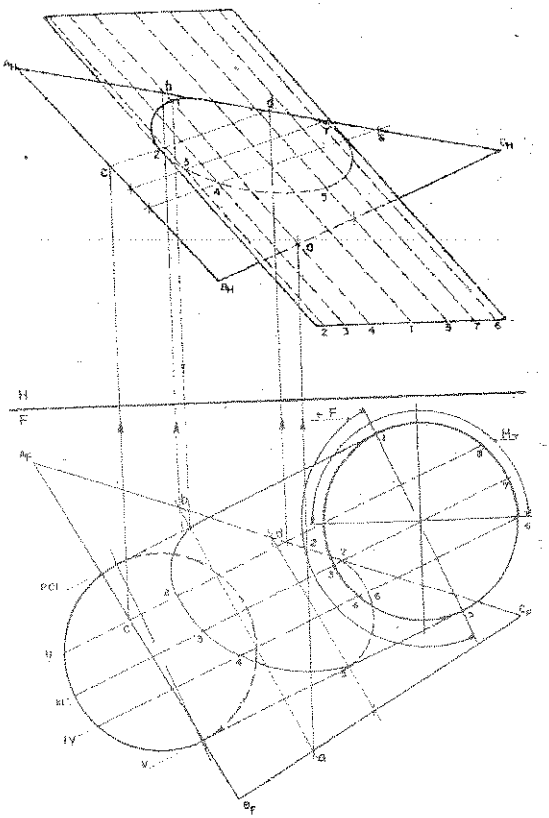


Fig. 12.7 Intersección de un Plano con un Cilindro (Método del Plano Cortante).

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 12.1: Determinar la intersección y visibilidad del plano ABC con el prisma oblicuo cuyos bases son MNPQ y RSTU.

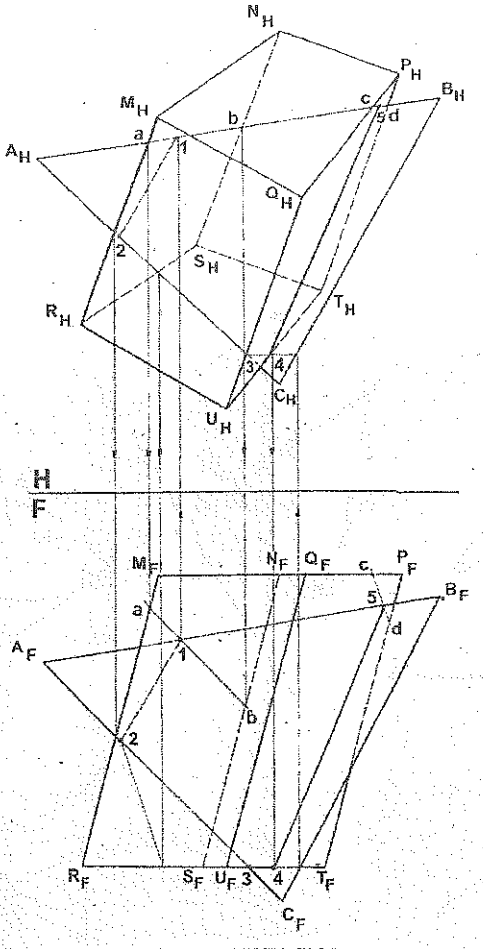


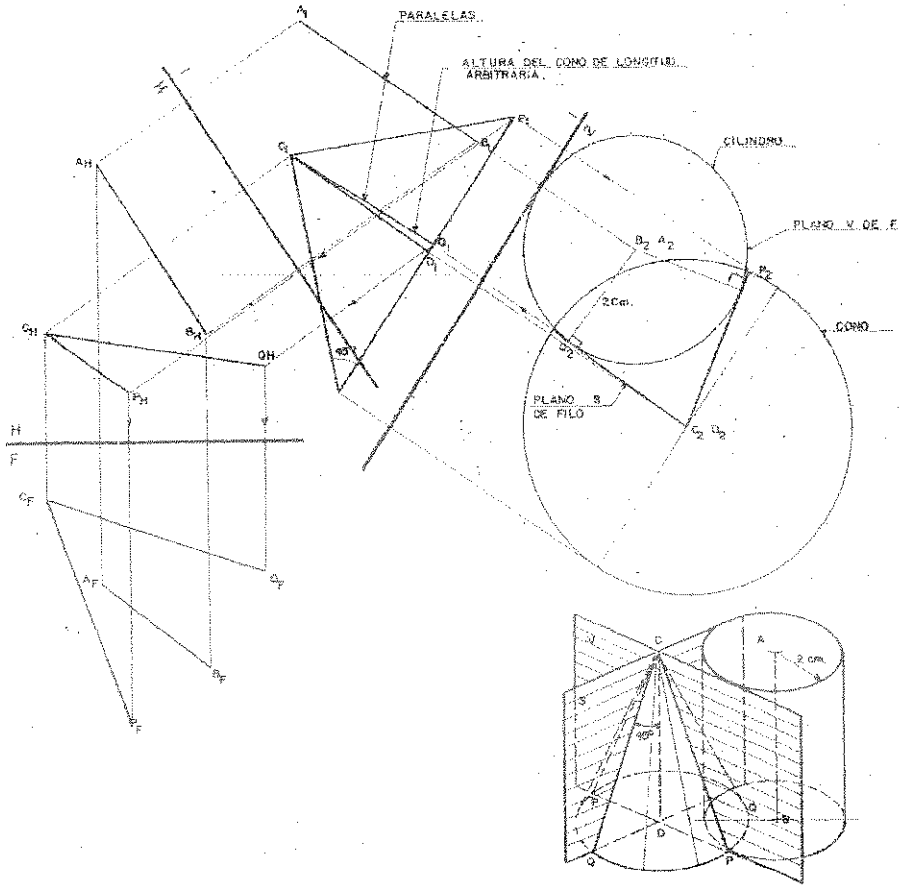
TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
AB	+	+	MNSR	-	-	1	-	-
AC	+	+	MNSR	-	-	2	-	-
AC	+	+	RSTU	-	+	3	-	+
UT	+	+	ABC	+	+	4	+	+
AB	+	+	QPTU	+	+	5	+	+

PROCEDIMIENTO:

1. Trazar el plano cortante de canto **PC-I** que contenga a la arista **AB** del plano dado; tal como se observa en la vista horizontal.
2. Este plano cortante corta a las caras **MNSR** y **QPTU** del prisma dado, en los puntos **a, b y c, d** respectivamente; las que proyectados y unimos en la vista frontal, estas rectas cortan a AB, determinando los puntos 1 y 5 de intersección buscados. En forma similar se determinan los demás puntos de intersección.

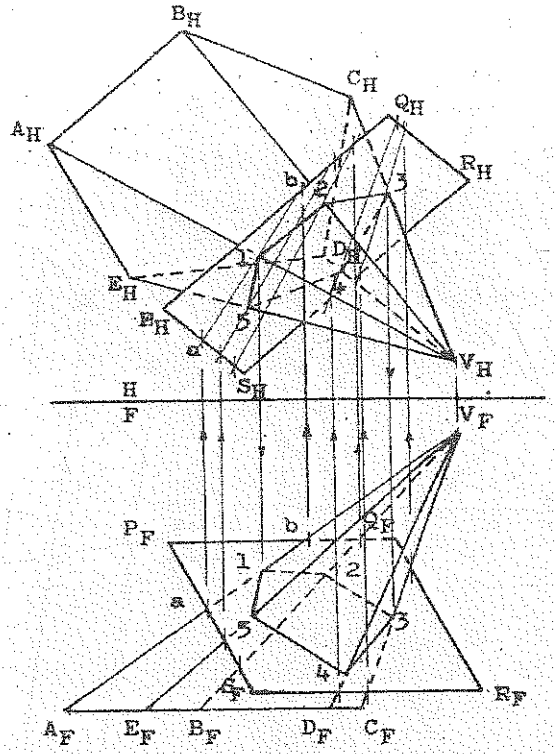
PROBLEMA 12.2: Se dan el punto **C** y la recta **AB**. Trazar por el punto **C** las rectas que se encuentran a la distancia de **2** cm de la recta **AB**, y que forman con ella un ángulo de **45°**. De todas las soluciones posibles, dar solo aquellas en las que las rectas que pasan por el punto **C**, se aproximen al punto **B** y no al **A**.



PROCEDIMIENTO:

1. Hallar la vista de punta de la recta AB.
2. Las rectas buscadas, en primer lugar se encuentran en los planos V y S que pasan por el punto C y que son tangentes a la superficie cilíndrica de 2 cm de radio y cuyo eje es AB; en segundo lugar, pertenecen a la superficie cónica cuyo vértice es el punto C, su eje es la recta paralela a AB, y las generatrices de la cual forman con el eje el ángulo de 45°.
3. Las rectas buscadas se obtienen como resultado de la intersección de esta superficie con los planos V y S.

PROBLEMA 12.3: Determinar la intersección y visibilidad del plano PQRS con la pirámide V-ABCDE, siendo su base horizontal.



PROCEDIMIENTO:

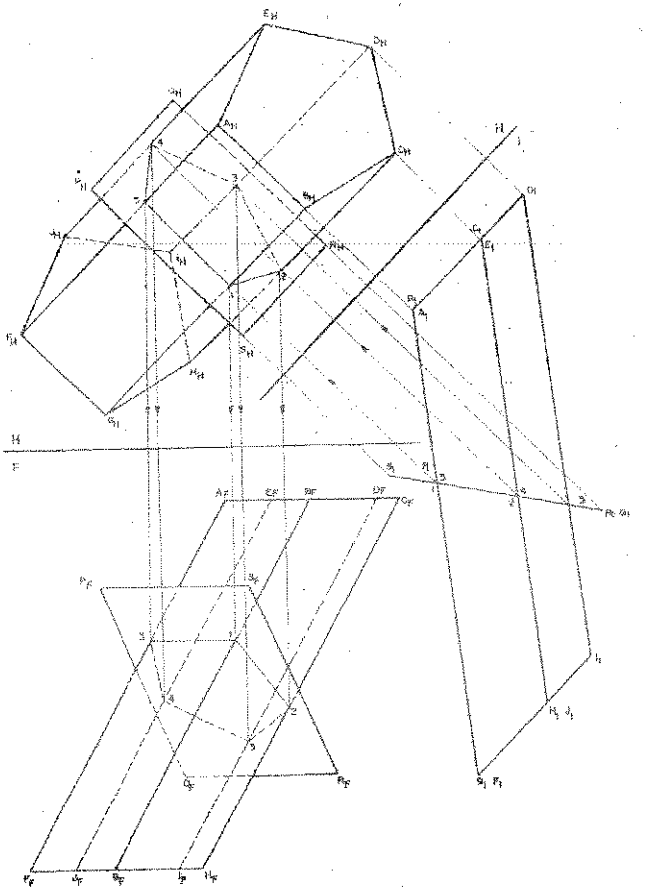
1. En la vista frontal trazar un plano cortante que pase por la arista VA y que corte al plano PQRS en las aristas Ps y PQ y en a y b respectivamente, proyectamos y unimos estos puntos en la vista horizontal; esta recta se corta con la arista Va en el punto de intersección 1.

2. Se repite este procedimiento hasta encontrar todos los puntos de intersección, se unen estos puntos con su visibilidad correspondiente formándose la sección plana 12345 buscada.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
AV	+	+	PQRS	+	+	1	+	+
BV	+	-	PQRS	+	+	2	+	-
CV	+	+	PQRS	+	+	3	+	+
DV	-	+	PQRS	+	+	4	-	+
EV	+	+	PQRS	+	+	5	+	+

PROBLEMA 12.4: Determinar la intersección y visibilidad del plano **PQRS** con el Prisma **ABCDE - FGHIJ**, siendo sus bases frontales.



PROCEDIMIENTO:

1. Determinar la visibilidad del Prisma.
2. Trazar el plano de elevación H1 perpendicular a las aristas horizontales PS y QR.
3. En el plano de elevación el plano PQRS se proyecta de canto y corta a las aristas del Prisma AF, BG, CH, DI y EJ y en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.
4. Proyectar los puntos de intersección a sus vistas principales, unimos estos puntos encontrándose la sección plana de la intersección.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
BG	+	+	PQRS	+	+	1	+	+
CH	+	+	PQRS	+	+	2	+	+
DI	-	-	PQRS	+	+	3	-	-
EJ	+	-	PQRS	+	+	4	+	-
AF	+	+	PQRS	+	+	5	+	+

PROBLEMA 12.4: Determinar la intersección y visibilidad del plano RST con el Prisma ABCD - EFGH, siendo sus bases frontales.

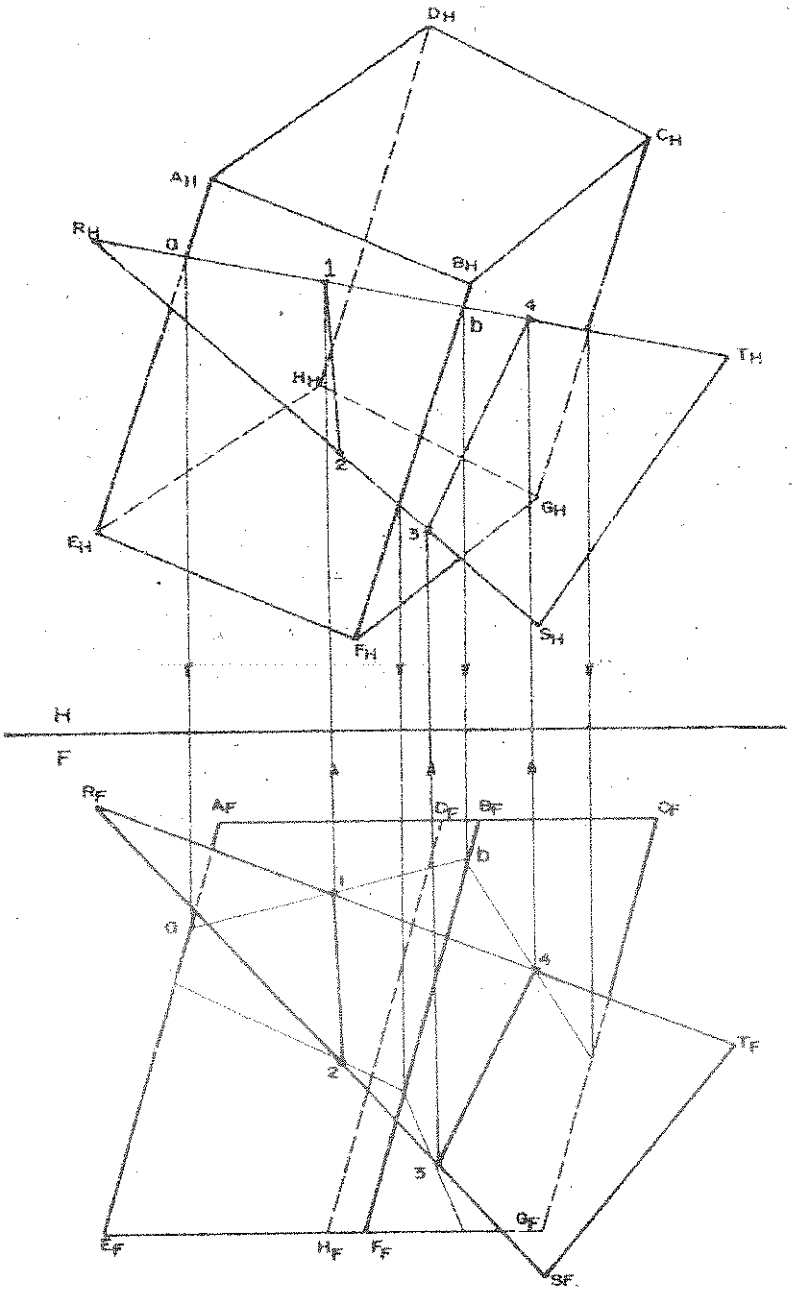
PROCEDIMIENTO:

1. Para hallar los puntos de intersección, debemos trazar una serie de planos cortantes; tal como el PC-I, que es un plano de corte de canto y que contiene al lado RT del plano dado, como se observa en la vista horizontal de la figura 12.4.
2. Este plano de corte intercepta al prisma ARCD, EFGH en los puntos a y b, las que proyectamos y unidos en la vista frontal, esta recta se corta con RT, en el punto 1 de la recta intersección; la que proyectamos a la vista horizontal.
3. En forma similar se introducen otros planos cortantes de canto, para encontrar todos los puntos de intersección. La visibilidad se determina por las reglas estudiadas.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
RT	+	+	ABFE	+	+	1	+	+
RS	+	+	ABFE	+	+	2	+	+
RS	+	+	BCGF	+	+	3	+	+

SOLUCIÓN 12.4 :



PROBLEMAS PROPUESTOS

PLANO CON PRISMA:

PROBLEMA 12.1: ABC y DEF son las bases de un prisma oblicuo, determinar la intersección y visibilidad del plano XYW con el prisma.
A(4,8,13), B(4,11,15), C(7,11,14), D(8,1,20). X(2,9,18), Y(12,12,16), W(6,3,13).

PROBLEMA 12.2: Determinar la intersección y visibilidad del plano ABCE con la pirámide VMNS.
A(2.5,9,20.5), B(18,8,23), C(2.5,5,16.5), E(18,4,19). V(13,10,20.5),
M(2.5,7.5,24.5), N(10,5,15.5), S(18,2.5,20.5)

PROBLEMA 12.3: En la representación isométrica, determine la recta de intersección del plano MNO y el tetraedro VABC. Complete la presentación de la visibilidad.
M(5,20,?), N(17,19.5,?), O(14,4,?). V(13,21.5,?), A(6.5,9,?), B(11.5,4,?), C(18,11.5,?)

PROBLEMA 12.4: Determinar la intersección y visibilidad del plano LSD con el tetraedro TBCE.
L(2,3,12), S(8,4,13.5), D(6,7.5,10.5). T(3,7,12), B(5,5,14), C(9,6,9.5), E(4,2,10)

PROBLEMA 12.5: Q es el centro de un pentágono regular horizontal, que es la base inferior de un prisma recto de 5 cm. de altura, siendo P el vértice del pentágono. Determinar la intersección y visibilidad que produce en el prisma el plano LSD.
Q(4,3,13), P(4,3,10); L(1,5,13), S(8,6,13), D(6,4,10)

PROBLEMA 12.6: Determinar la intersección y visibilidad de la pirámide V-ABCD con un plano que pasa por el punto P, cuya orientación es S45°O, siendo su pendiente 45°SE.
P(10,7.5,14.5), V(13,8.5,14.5). A(11.5,1.5,17), B(16,1.5,16), C(16,1.5,11.5), D(10.5,1.5,12.5)

PROBLEMA 12.7: P es un punto de la arista AV de la pirámide V-ABCD. Pasar por P un plano de tal manera que la sección producida por dicho plano en la pirámide sea paralelogramo.
P(7.5,?,13.5), V(10,6,15). A(5,3,12), B(6,5,11.5), C(9,3,10), D(7,2,11)

PROBLEMA 12.8: C es el centro de un pentágono regular horizontal que es la base inferior de un prisma recto de 5 cm. de altura, siendo M el vértice del pentágono. Determinar la intersección y visibilidad que produce en el prisma el plano RST.
C(4,2,12), M(4,2,9), R(1,4,12), S(8,5,12), T(6,3,9)

PROBLEMA 12.9: Dado el tetraedro regular ABCD, trazar un plano por el punto medio de la arista AC, que sea paralelo a las aristas AB y CD, determinar la sección plana producida en el tetraedro por dicho plano. A(2.5,9,9), B(8.5,9,9), C(5.5,9,14), D(5.5,3.5,?)

PROBLEMA 12.10: ABCD es la base delantera de un prisma recto de 2 cm de altura. Por el punto V pasar un plano de modo que corte al prisma según una sección cuadrada.
V(7,1.5,7.5); A(5.5,4,9), B(8,8.5,9); C(13,6,9), D(10.5,1.5,9).

PROBLEMA 12.11: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal que es la base de una pirámide recta de vértice V. Hallar la sección producida en la pirámide por el plano que pasa por el punto X, cuya orientación es S50°E, siendo su pendiente 30°SO.
A(1.5,2,11); C(6.5,2,13); V(4,7,12), X(4,4.5,13).

PLANO CON SUPERFICIE:

PROBLEMA 12.12: O es el centro de un círculo horizontal de 6 cm de diámetro, base de un cono recto de vértice V. Hallar la sección que produce en él un plano normal que pasa por AB.
O(12,2,12), V(12,6,12), AB(10,1,?), B(15,6,?)

PROBLEMA 12.13: C es el centro de un círculo horizontal de 4 cm de diámetro, base de un cono oblicuo de vértice V. Hallar la sección que produce en él un plano orto-frontal que pasa por AB.
C(3,1,15), V(6,5,13); A(3,5,?), B(7,2,?)

PROBLEMA 12.14: C es el centro de un círculo horizontal de 5 cm de diámetro, base de un cono recto con vértice V. Determinar la intersección y visibilidad que produce en él un plano ABC.
C(9,2,12), V(9,7,12), A(5.5,3,12); B(10,6.5,14), C(13,4,10).

PROBLEMA 12.15: O es el centro de un círculo horizontal de 5 cm de diámetro, base de un cono oblicuo cuyo vértice es V. Determinar la intersección y visibilidad que produce en él un plano ABC.
O(9,2,12), V(6.5,7,15), A(5.5,3,12), B(10,6.5,14); C(13,4.10).

PROBLEMA 12.16: V es vértice de un cono oblicuo, y O es el centro de su base horizontal de 4 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad que produce en el un plano RST.
B(13, 2, 16), O(7, 7, 12), R(6, 8, 15), S(8, 13, 11), T(12, 5, 12).

PROBLEMA 12.17: Los puntos X, Y, y Z son los centros de 3 arcos de circunferencias horizontales descritos en la siguiente forma. Con centro en X y radio en XM. Se traza una arco de circunferencia en sentido contrario a las agujas de reloj, desde M hasta N, desde este punto y con centro en Y se traza una semicircunferencia en sentido de las agujas del reloj hasta P y con el centro en Z una semicircunferencia en sentido contrario de las agujas del reloj desde P a Q. La curva así obtenida es la directriz de un cono de vértice V. Hallar la sección producida en el por un plano vertical que pasa por AB. V(1, 1, 24), M(6, 11, 17), N(8, 11, 15), P(13, 11, 15), Q(17, 11, 15), X(6,11, 15), Y(10.5, 11, 15), Z(15, 11, 15), A(1, 11, 17), B(15, 5, 20).

PROBLEMA 12.18: Q es el centro de un circulo frontal de 4 cm de diámetro, base de un cono oblicuo cuyo vértice es B. Determinar la intersección y visibilidad que produce en él un plano JKL.
Q(11, 5, 10), V(5, 2, 15), J(7, 2, 15), K(7, 8 5, 11), L(12, 2, 11).

PROBLEMA 12.19: Q es el centro de un circulo frontal de 5 cm de diámetro base de un cono oblicuo cuyo vértice es V. Determinar la intersección y visibilidad que produce en el un plano RST.
Q(9, 5, 17), V(5, 9, 12), R(4, 6, 16), S(9, 3, 13), T(11, 9,16).

PROBLEMA 12.20: RS es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 4 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad que produce en la superficie el plano JKL. R(5,7,11), S(10, 2,15); J(4,4,16), K(11,7,16), L(8.5,4,9).

PROBLEMA 12.21: RS es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 4 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad que produce en la superficie el plano LMN.
R(10,7,11), S(5,3,16); L(4,2,11), M(7,9,14), N(11,2,14).

PROBLEMA 12.22: LM es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 4 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad que produce él la superficie el plano LMN. L(5,7,11), M(10,2,16), R(3,6,13), S(7,2,17), T(11,7,9).

PROBLEMA 12.23: PQ es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 4 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad que produce en la superficie el plano LMN. P(5,3,16), Q(10,7,11), L(4,9,11), M(7,1,17) N(12,5,12).

PROBLEMA 12.24: JK es el eje de un cilindro recto de 4 cm de diámetro. Determinar la visibilidad e intersección que produce en la superficie el plano ABCD. Bases del cilindro: horizontales.
J(8,1,11) K(8,7,17) A(5,3,18) B(12,3,15.5) C(11,7.5,11) D(4,7.5, 14).

PROBLEMA 12.25: MN es el eje de un cilindro recto que tiene extremos circulares frontales de 4 cm de diámetro. Determinar la intersección y visibilidad que produce en la superficie el plano RSTU. M(7,3,13) N(7,9,19) R(3,4.5, 17) R(4,9,12.5) T(11,6.5 12.5) U(10,1.5, 17).

PROBLEMA 12.26: LM es el eje de un cilindro recto de 4 cm de diámetro; determinar la intersección y visibilidad que produce el plano ABCD.
D(9,8,10.5) L (8,7,14) M(8,2,14) A(4.5,8,13) B(7,3,17.5) C(11.5,3,15).

PROBLEMA 12.27: A es el centro de una esfera de 7.5 cm de diámetro, determinar la intersección y visibilidad que produce en la superficie el plano RST.
A(10,4,15) R(5,9,16.5) S(16.5,1,7.5) T(13,9,14)

PROBLEMA 12.28: C es el centro de una esfera de 7.5 centímetros de diámetro, determinar la intersección y visibilidad que se produce en el plano JKL. C(6,6,16) J(1,6,14) K(7.5,1,20) L(11.5, 3.5,14).

PROBLEMA 12.29: Una columna de apoyo cilíndrica esta fijada en una saliente rocosa cuya superficie superior es un plano que pasa por el punto A y tiene una orientación N30°O, con una inclinación 30°SO. Calcule en metros cúbicos el volumen de roca retirada y trace en la vista frontal la intersección de la columna y de la superficie de la saliente. Eje de la columna OS. O(5,9,19) S(5,2.5,19) A(9.5,8,23). ESCALA: 1:50

CAPÍTULO 13

INTERSECCION DE POLIEDROS

13.0 INTRODUCCIÓN.

La intersección completa entre dos poliedros, origina en sus superficies líneas quebradas o mixtas, cuyo trazado requiere un trabajo cuidadoso y metódico. La solución de los problemas relacionados con las intersecciones requiere conocer con todo detalle los diferentes procedimientos que se emplean para obtener la intersección; saber relacionar el procedimiento más adecuado y tener hábitos de trabajo ordenado y claro, que son imprescindibles en la obtención de las intersecciones. Las intersecciones se aplican en la construcción de edificios, metalistería, construcción de máquinas y en cualquier campo de la ingeniería. Para encontrar los puntos de intersección se debe tener en cuenta los siguientes principios:

1. Una recta penetra a un plano en un punto.
2. Una recta penetra a un poliedro en dos puntos (entrada y salida).

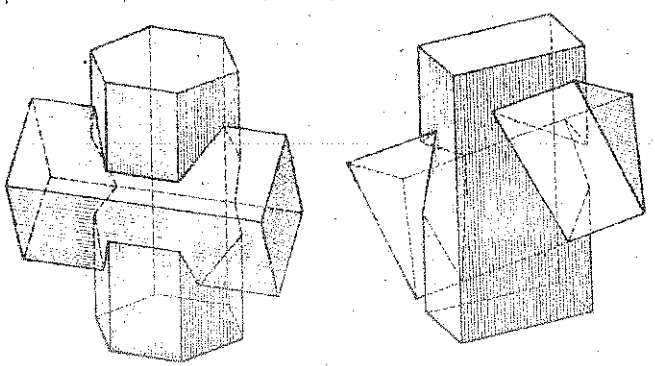


Fig. 13.1 Intersección entre poliedros.

13.1 MÉTODOS PARA HALLAR LA INTERSECCIÓN.

13.1.1 **Método de la vista de canto:** consiste en mostrar a las aristas de uno de los poliedros en vista de punta. Este método es conveniente aplicarlo cuando uno de los poliedros figure de perfil en una de las proyecciones principales para que las caras laterales aparezcan como líneas.

13.1.2 **Método del plano cortante:** cuando se cortan a ambos poliedros por una serie de planos cortantes que podrán ser verticales de perfil, o en forma oblicua pero deben ser siempre seleccionadas y que corten a la superficie plana en una recta. Cuando el plano cortante pasa por una de las aristas del poliedro y el punto donde la arista perfora a una superficie plana se localiza en la intersección con la línea de corte de una superficie.

13.2 REGLAS DE VISIBILIDAD.

Antes de aplicar estas reglas de visibilidad de rectas, generatrices, aristas o de las superficies planas, debemos aplicar correctamente sus reglas; pero teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Hallar la visibilidad del poliedro o de la superficie a interceptar, utilizando las reglas del **capítulo 2**; y antes de aplicar la presente regla de visibilidad.
2. Considerar al signo (+) como visible y el signo (-) como invisible.
3. No se aplica la regla de los signos.

A continuación enunciamos las reglas de visibilidad de los puntos de intersección:

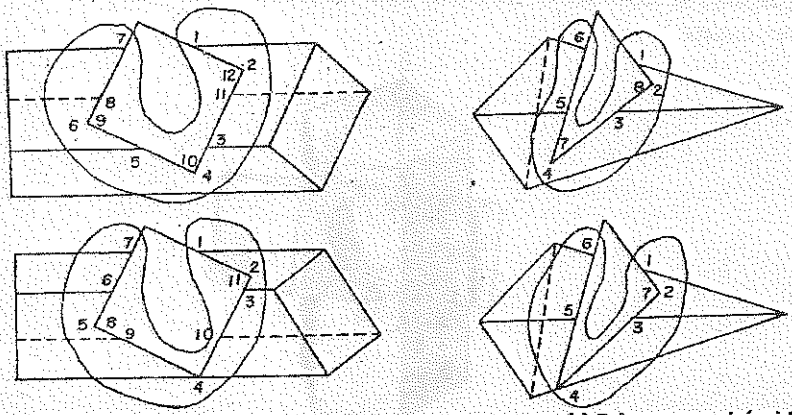
1. Si una recta que se intercepta con una superficie plana son visibles, el punto de intersección será visible.
2. Si la recta o la superficie plana, o ambas están ocultas, el punto de intersección será invisible

13.3 TIPOS DE INTERSECCIÓN Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

Después de localizar todos los puntos de intersección de los poliedros, se conectan estos por líneas rectas que complementan la intersección completa. El sentido de la numeración puede ser horario o antihorario y se presentan los siguientes casos:

13.3.1 MORDEDURA.

Cuando la introducción es parcial de uno de los poliedros con respecto al otro. Los puntos de intersección se numeran consecutivamente, comenzando con los puntos de intersección que aparecen más próximos al observador (puntos visibles) y se invierte su sentido para identificar los más lejanos al observador (puntos invisibles) tal como se muestra en la figura **13.2**.

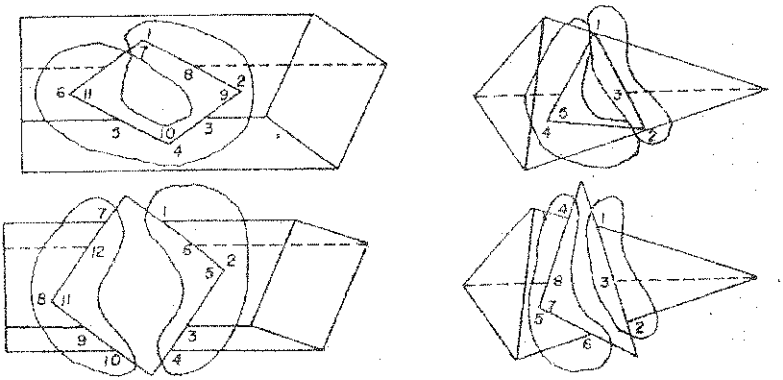


a) Prisma con prisma **b) Prisma con pirámide.**

Fig. 13.2 intersección por mordedura.

13.3.2 PENETRACION.

Cuando uno de los poliedros esta introducido en el otro. Los puntos de intersección se muestran primero una porción consecutivamente, comenzando con los puntos visibles y se invierte el sentido para identificar los puntos invisibles. Luego se completa la numeración de los puntos de intersección en la otra porción, siguiendo el mismo criterio anterior, tal como se muestra en la figura 13.3.



a) Prisma con prisma **b) Prisma con pirámide.**

Fig. 13.3 Intersección por penetración.

13.4 INTERSECCION DE DOS PRISMAS.

La intersección de dos prismas consiste en determinar la ubicación de las líneas de intersección de las superficies limitadas de los sólidos. Estas líneas de intersección se obtienen encontrando los puntos de penetración existentes de las aristas de un prisma con las superficies del otro, y luego, los puntos de penetración de las aristas del segundo con la superficie del primero; tal como se observa en la figura 13.4. Los métodos a utilizar es el de la vista de canto y del plano cortante.

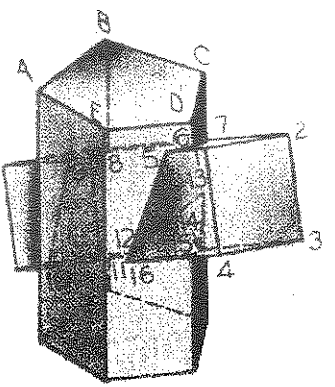


Fig. 13.4 Intersección de dos prismas.

13.4.1 METODO DE LA VISTA DE CANTO.

La vista de punta del eje de cualquiera de los prismas muestra los puntos donde las aristas del otro prisma perforan sus caras. Para aplicar este método es conveniente que las superficies laterales de uno, o de los dos prismas no aparezcan de canto en las vistas principales.

En la figura 13.5 se dan las vistas frontal y horizontal de dos prismas (vertical e inclinado), se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.

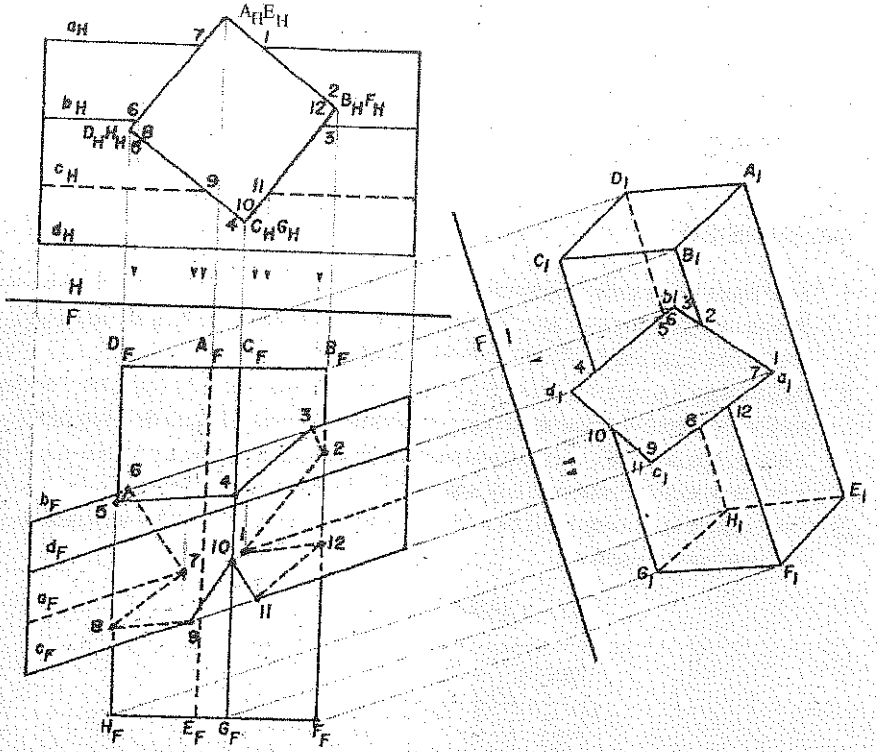


Fig. 13.5 Intersección de dos prismas(método de la vista de canto)

PROCEDIMIENTO:

1. Trazar la vista de inclinación F1, en donde se observa la base del prisma inclinado; tal como se observa en la figura 13.5.
2. En la vista horizontal numeramos los puntos de intersección, y proyectamos a la vista frontal los puntos **1, 3, 6, 7, 9,** y **11.**
3. En el plano auxiliar **F1** obtenemos los puntos **2, 12; 4, 10** y **5, 8.** Por ejemplo la arista **BF** corta en los puntos **2** y **12** a las caras de canto b_1a_1 y a_1c_1 respectivamente.
4. Para analizar la visibilidad se aplica las reglas visto en el acápite **13.3** y se muestran en la siguiente tabla de visibilidad.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F	RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
a	-	ABFE	-	1	-	a	-	ADHE	-	7	-
BF	+	a - b	-	2	-	DH	+	a - c	-	8	-
b	+	BCGF	+	3	+	c	+	DCGH	+	9	+
CG	+	b - d	+	4	+	CG	+	c - d	+	10	+
DH	+	b - d	+	5	+	c	+	BCGF	+	11	+
b	+	ADHE	-	6	-	BF	+	a - c	-	12	-

13.4.2 METODO DEL PLANO CORTANTE.

Los dos prismas deben cortarse por una serie de planos cortantes que determinan los puntos de intersección, y si los planos cortantes escogidos son paralelos a las aristas del prisma la solución es más sencilla. En la figura **13.6** se dan las vistas frontal y horizontal de dos prismas (vertical e inclinado) se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.

PROCEDIMIENTO:

1. En la figura **13.6** y en la vista horizontal se localizan los puntos **1, 3, 6, 7, 9** y **11**; intersección de una recta con un plano de canto, luego proyectamos a estos puntos de intersección a la vista frontal, cada una de ellas en sus aristas respectivas.
2. Para localizar los puntos **2, 12; 4, 10** y **5, 8** es necesario utilizar planos cortantes. Por ejemplo para hallar el punto **2** trazamos el plano cortante que pase por el plano de canto **ABFE** y que contenga a la arista **BF**, y que corta al prisma inclinado en los puntos **1** y **Xh** que proyectados y unidos en la vista frontal corta a la arista **BF** en el punto de intersección **2.**
3. Para analizar la visibilidad se aplica las reglas visto en el acápite **13.3** y se muestran en la siguiente tabla de visibilidad.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS H	PLANO	VIS F	INT	VIS F
a	-	ABFE	-	1	-
BF	+	a - b	-	2	-
b	+	BCGF	+	3	+
CG	+	b - d	+	4	+
DH	+	b - d	+	5	+
b	+	ADHE	-	6	-
a	-	ADHE	-	7	-
DH	+	a - c	-	8	-
c	+	DCGH	+	9	+
CG	+	c - d	+	10	+
c	+	BCGF	+	11	+
BF	+	a - c	-	12	-

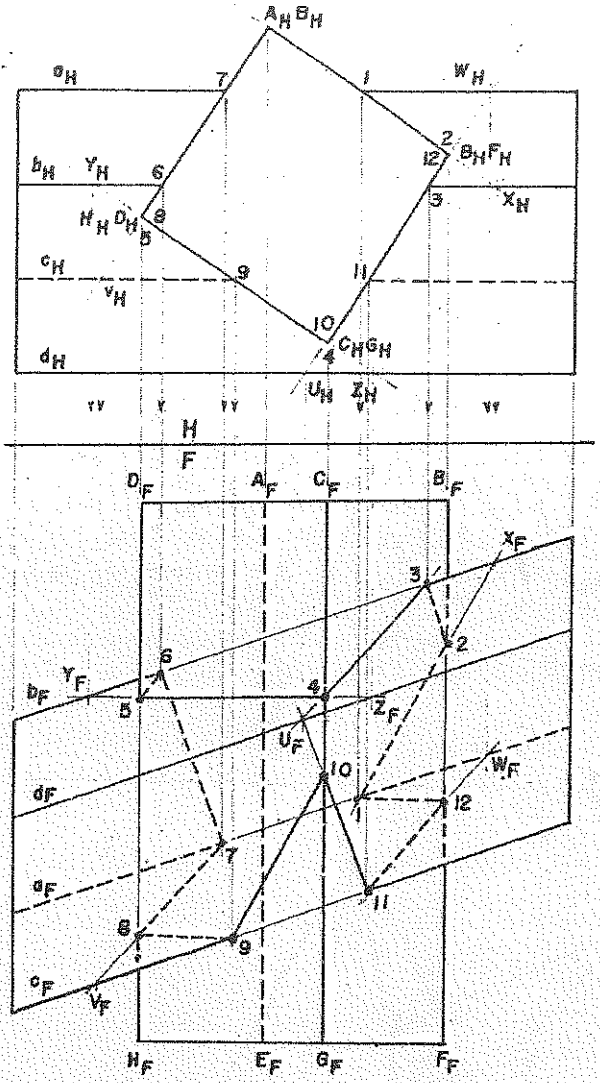


Fig. 13.6 Intersección de dos prismas(Método del plano cortante)

13.5 INTERSECCION DE DOS PIRAMIDES.

Utilizaremos el método del plano cortante para determinar todos los puntos de intersección en que las aristas de una pirámide perforan a las caras de la otra pirámide, siendo el número de puntos a determinar desconocido. En la figura **13.7** se dan las vistas frontal y horizontal de dos pirámides, se desea encontrar la intersección y la visibilidad de ambos.

PROCEDIMIENTO:

1. Para determinar los puntos de intersección trazamos, un plano cortante que contenga a la arista JT y que corta a la superficie plana CVD de la otra pirámide en a y b; la que proyectamos y unidos en la vista frontal, esta recta corta a la arista JT, siendo este punto, el punto 1 de la intersección.
2. Se continúa este proceso hasta encontrar todos los puntos de perforación requeridos, se unen los puntos por líneas rectas, se determina la visibilidad y se dibuja el objeto como una pieza.

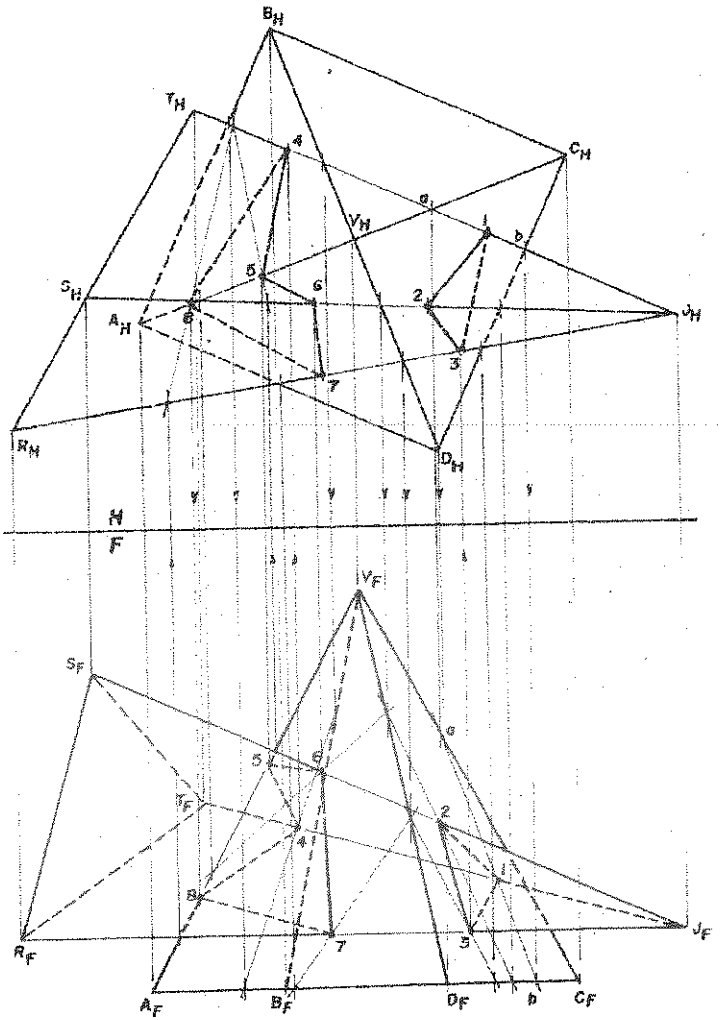


Fig. 13.7 Intersección de dos pirámides.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
JT	+	-	CVD	+	+	1	+	-
JS	+	+	CVD	+	+	2	+	+
JR	+	+	CVD	+	+	3	+	+
JT	+	-	AVB	+	-	4	+	-
AV	+	+	SJT	+	-	5	+	-
JS	+	+	AVD	+	+	6	+	+
RJ	+	+	AVD	+	+	7	+	+
AV	+	+	TJR	-	-	8	-	-

13.6 INTERSECCION DE UNA PIRAMIDE CON UN PRISMA.

Para hallar la intersección de una Pirámide y un Prisma, se deben determinar los puntos perforantes de las aristas de cada uno de los poliedros a su vez con las superficies del otro poliedro. La figura de la intersección se completa uniendo estos puntos por su orden de numeración; tal como se observa en la figura **13.8**, por lo que se requiere un trabajo minucioso y sistemático.

La obtención de las intersecciones de las aristas con los planos de las caras se logra siguiendo los siguientes métodos:

1. Método del Plano Auxiliar.
2. Método del plano cortante para determinar todos los puntos de intersección, en que las aristas de una pirámide perfora a las caras del prisma o viceversa.

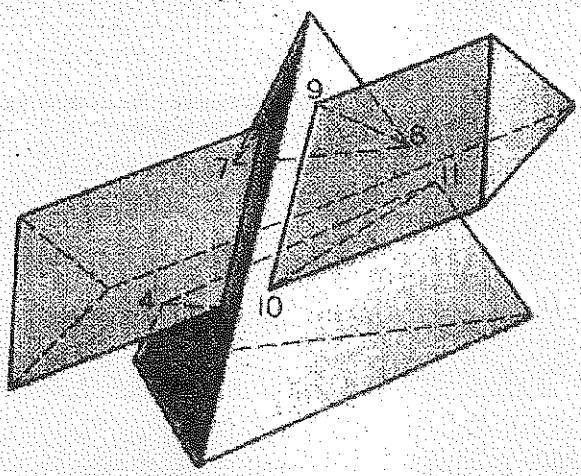


Fig. 13.8 Intersección de una Pirámide con un Prisma.

PROCEDIMIENTO:

1. Para determinar los puntos de intersección; por ejemplo trazamos un plano cortante que pase por la arista "**a**" del prisma y que corta a la superficie plana **AVB** de la pirámide en dos puntos, la que proyectados y unidos en el plano frontal interceptan a la arista "**a**", determinando el punto **1** de intersección.
2. Se repite este proceso hasta encontrar todos los puntos de intersección se unen estos y se determina la visibilidad del conjunto teniendo en cuenta la visibilidad de la tabla.
3. La unión de los puntos de intersección en las vistas horizontal y frontal, son dos poligonales para el caso de Penetración, siendo la primera poligonal **1,2,3,4,5,1** y la segunda poligonal **6,7,8,9,10,6**; teniéndose en cuenta la visibilidad de los puntos de intersección mostrados en la Tabla de visibilidad.

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
a	+	+	BVC	+	-	1	+	-
VC	+	+	a – b	+	-	2	+	-
b	+	+	CVD	+	+	3	+	+
c	+	+	CVD	+	+	4	+	+
VC	+	+	a – c	-	+	5	-	+
a	+	+	AVB	+	-	6	+	-
b	+	+	AVB	+	-	7	+	-
AV	+	+	b - c	+	+	8	+	+
c	+	+	AVD	+	+	9	+	+
AV	+	+	a - c	-	+	10	-	+

En la figura 13.9 se dan proyecciones horizontal y frontal de una pirámide y de un prisma; se desea determinar la intersección y visibilidad del conjunto.

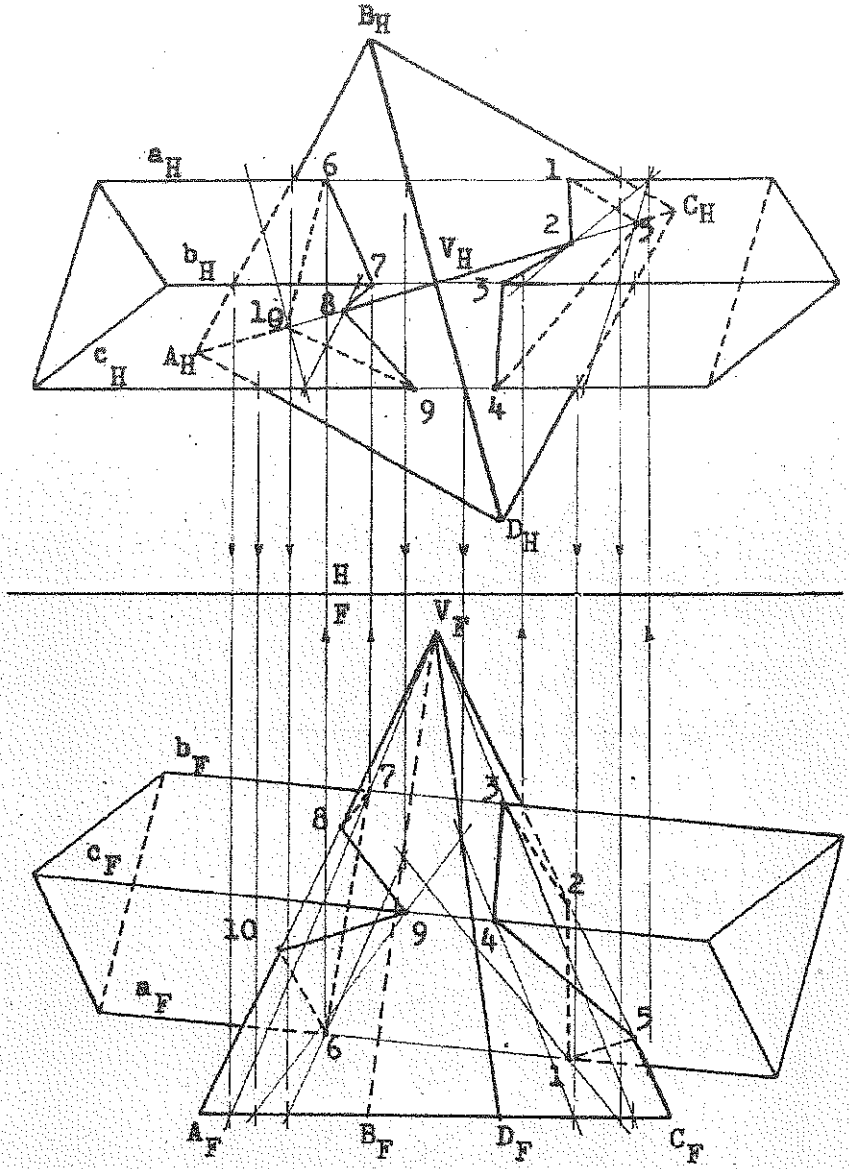


Fig. 13.9 Intersección de Pirámide con Prisma.
(Método del Plano Cortante)

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 13.1: Dado el Prisma **abad- a´b´c´d´** de bases rectangulares verticales determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma vertical **ABCD – EFGH** de 8 cm de altura, siendo su base superior **ABCD**. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(6,9,13.5), B(4,9,16.5), C(7,9,18.5), D(9,9,15);

a(1.5,5.5,15.5), b(2,8,14), c(3.5,6,12), d(2.5,3.5,13), a'(10,3.5,18)

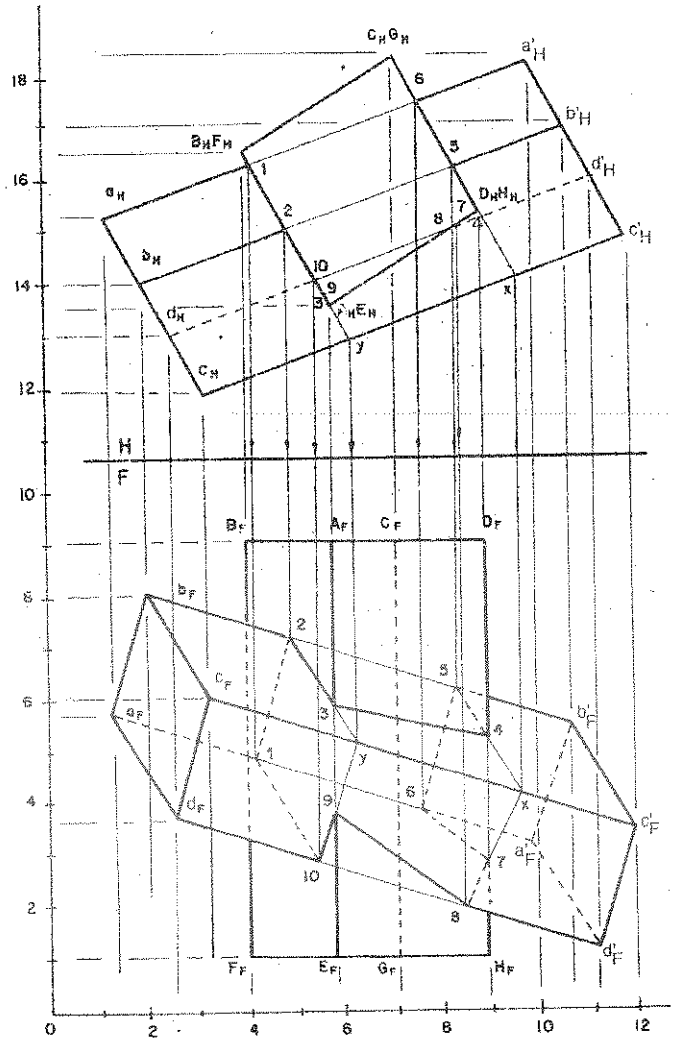


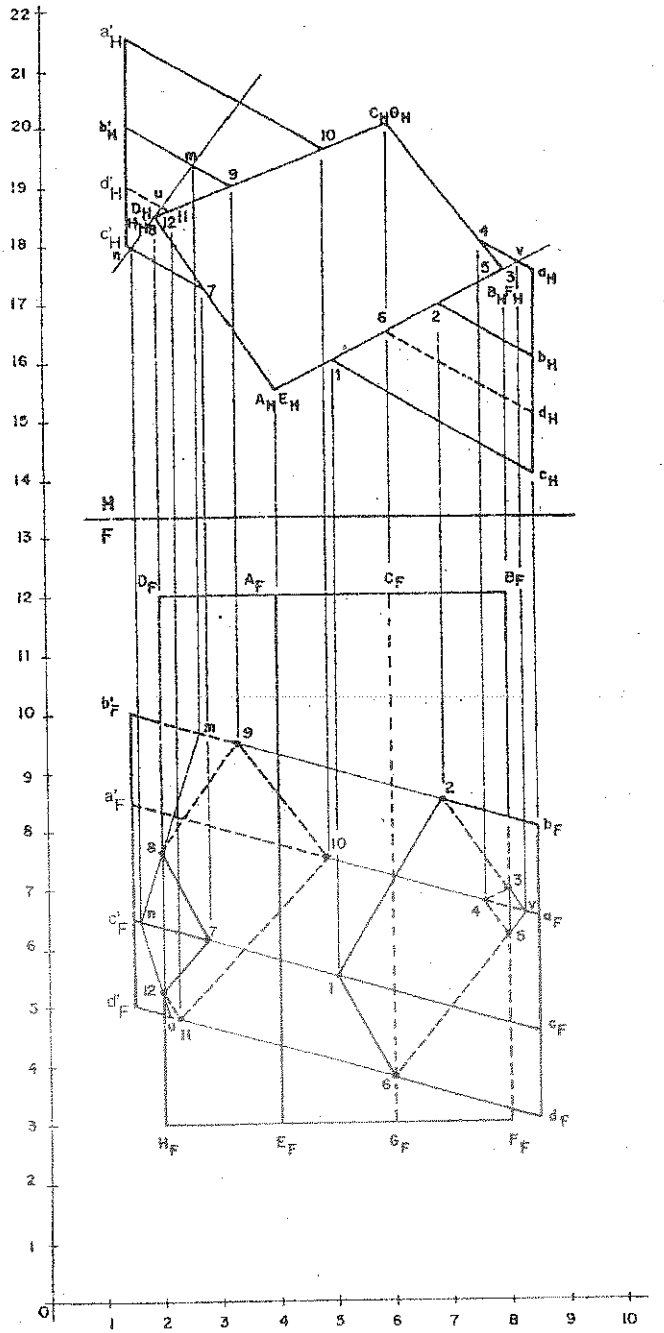
TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS	PLANO	VIS	INT
	F		F	
aa'	-	ABFE	+	1
bb'	+	ABFE	+	2
AE	+	bcc'b'	+	3
DH	+	bcc'b'	+	4
bb'	+	CDHG	-	5
aa'	-	CDHG	-	6
DH	+	acc'a'	-	7
cc'	+	ADHE	+	8
AE	+	cdd'c'	+	9
dd'	+	ABEF	+	10

PROBLEMA 13.2: Dado el Prisma **abad- a'b'c'd'**, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma vertical **ABCD – EFGH** de **9cm** de altura, siendo su base superior **ABCD**. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad.
No utilizar vistas auxiliares.
A(4,12,15.5), B(8,12,17.5), C(8,12,20), D(2,12,18.5);
a(8.5,6.5,18), b(8.5,8.5,16.5), c(8.5,4.5,14.5), d(8.5,3,15.5), b'(1.5,10,20)

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS	PLANO	VIS	INT	VIS
	F		F		F
cc'	+	ABFE	+	1	+
bb'	+	ABFE	+	2	+
BF	+	abb'a'	-	3	-
aa'	+	BCGF	-	4	-
BF	+	add'a'	-	5	-
dd'	+	ABFE	+	6	+
cc'	+	ADHE	+	7	+
DH	+	cbb'c'	+	8	+
bb'	+	CDHG	-	9	-
aa'	-	CDHG	-	10	-
dd'	+	CDHG	-	11	-
DH	+	cdd'c'	+	12	+



GEOMETRIA DESCRIPTIVA		INTERSECCIÓN DE POLIEDROS	PAG.
VICTOR VIDAL B.	CAPITULO: 13		440

PROBLEMA 13.3: Dado el Prisma RST- R´S´T´ donde RR' es una de sus aristas laterales, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma vertical ABCD – A'B'C'D' truncado en la base superior ABCD. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(7, - ,22.5), B(11,13,19.5), C(8.5, - ,14.5), D(4,8,17.5), B'(11,1.5,19.5);
R(2.5,5.5,21.5), S(2,11.5,19), T(3.5,8.5,15.5), R'(12.5,3,21.5)

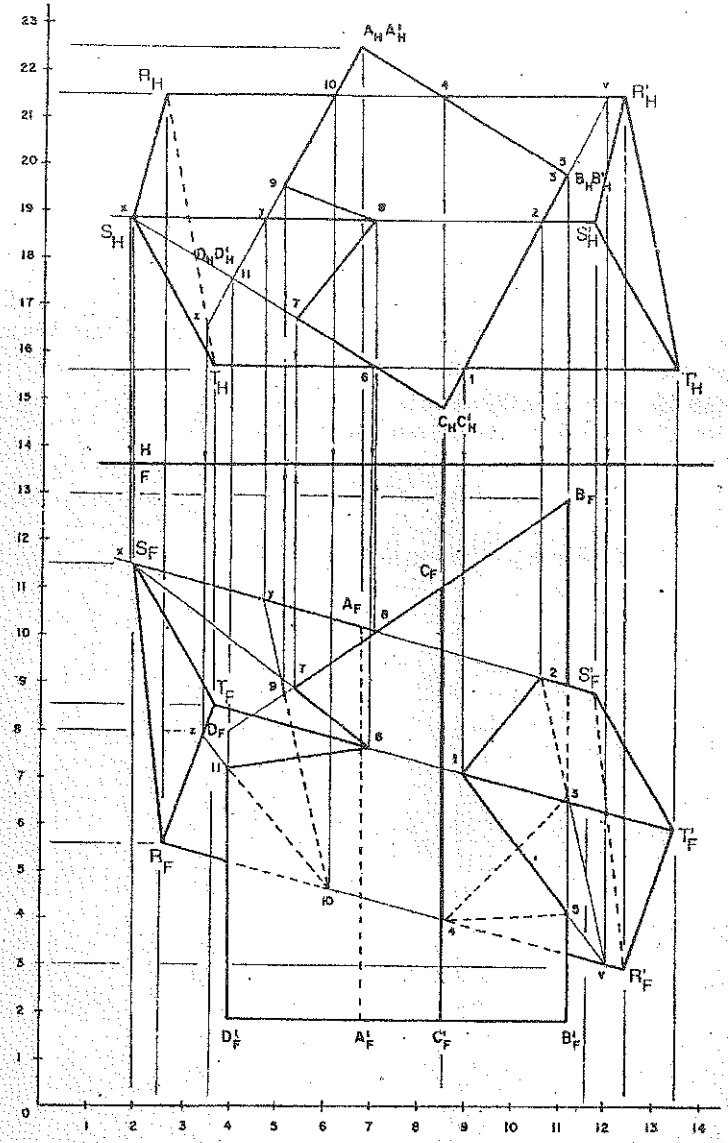


TABLA DE VISIBILIDAD

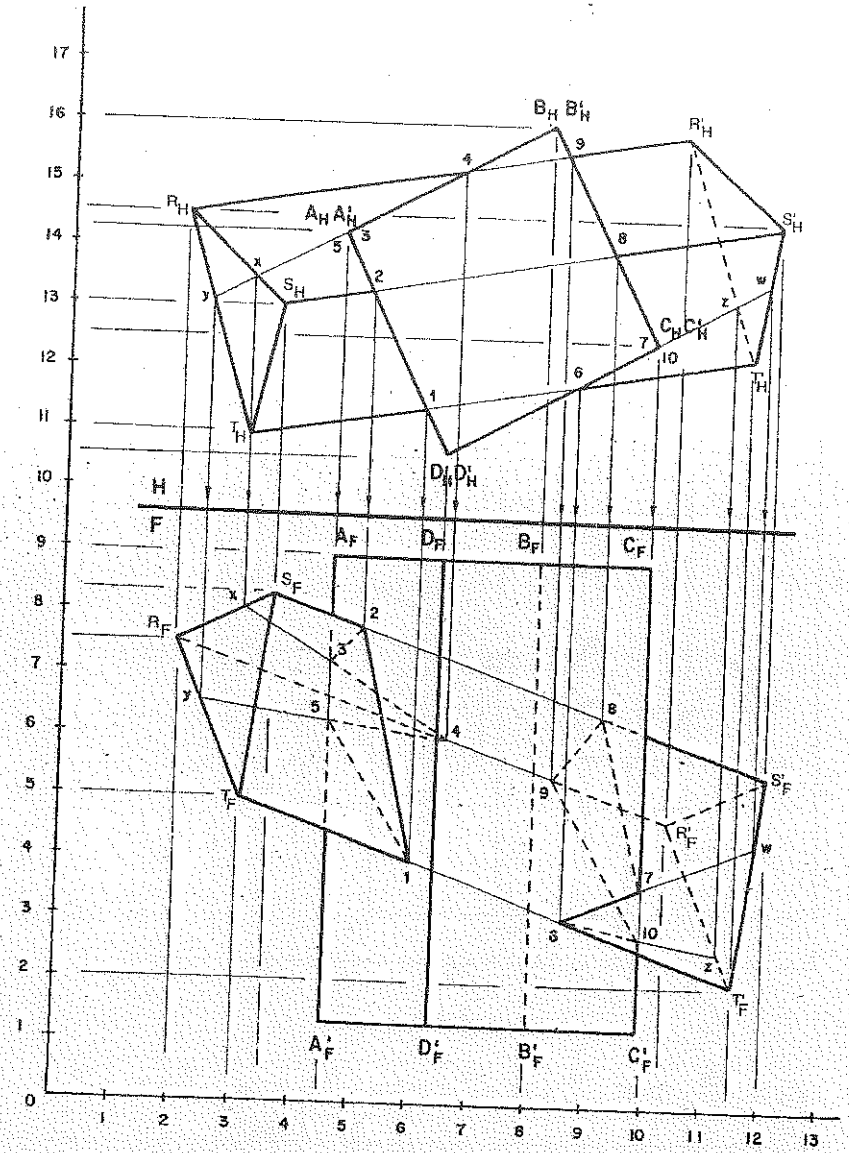
RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
TT'	+	BCB'C'	+	1	+
SS'	+	BCB'C'	+	2	+
BB'	+	RSS'R'	-	3	-
RR'	+	ABB'A'	-	4	-
BB'	+	RTT'R'	+	5	+
TT'	+	CDC'D'	+	6	+
CD	+	STT'S'	+	7	+
SS'	+	ABCD	+	8	+
AD	-	RSS'R'	-	9	-
RR'	+	ADD'A'	-	10	-
DD'	+	RTT'R'	+	11	+

PROBLEMA 13.4: Dado el Prisma **RST- R'S'T'** donde **RR'** es una de sus aristas laterales, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma vertical **ABCD – A'B'C'D'**, siendo su la base superior **ABCD**. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(4.5,9 ,14.5), B(8,9,16), C(10,9,12.5), D(6.5,9,10.5),
A'(4.5,1.5,14.5); R(2,7.5,14.5), S(3.5,8.5,13), T(3,5,11), R'(10.5,5,16)

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
TT'	+	ADD'A'	+	1	+
SS'	+	ADD'A'	+	2	+
AA'	+	RSS'R'	-	3	-
RR'	+	ABB'A'	-	4	-
AA'	+	RTT'R'	-	5	-
TT'	+	CDC'D'	+	6	+
CC'	+	STT'S'	+	7	+
SS'	+	BCC'B'	-	8	-
RR'	-	BCC'B'	-	9	-
CC'	+	RTT'R'	-	10	-



PROBLEMA 13.5: Dado el Prisma de bases hexagonales **PQRSTU- P'Q'R'S'T'U'** donde **PP'** es una de sus aristas laterales, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma vertical **ABCD – EFGH** truncado en la base superior **ABCD**. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(4,5,15), B(7, - ,17.5), C(9.5,8,15), D(7, - ,12.5), E(4,1,15);
P(3.5.5,19), Q(3,4.5,19), R(2,3.5,17.5), S(1,4.5,16.5), T(1,5.5,16.5), U(2,6.5,17.5), P'(13,5.5,13)

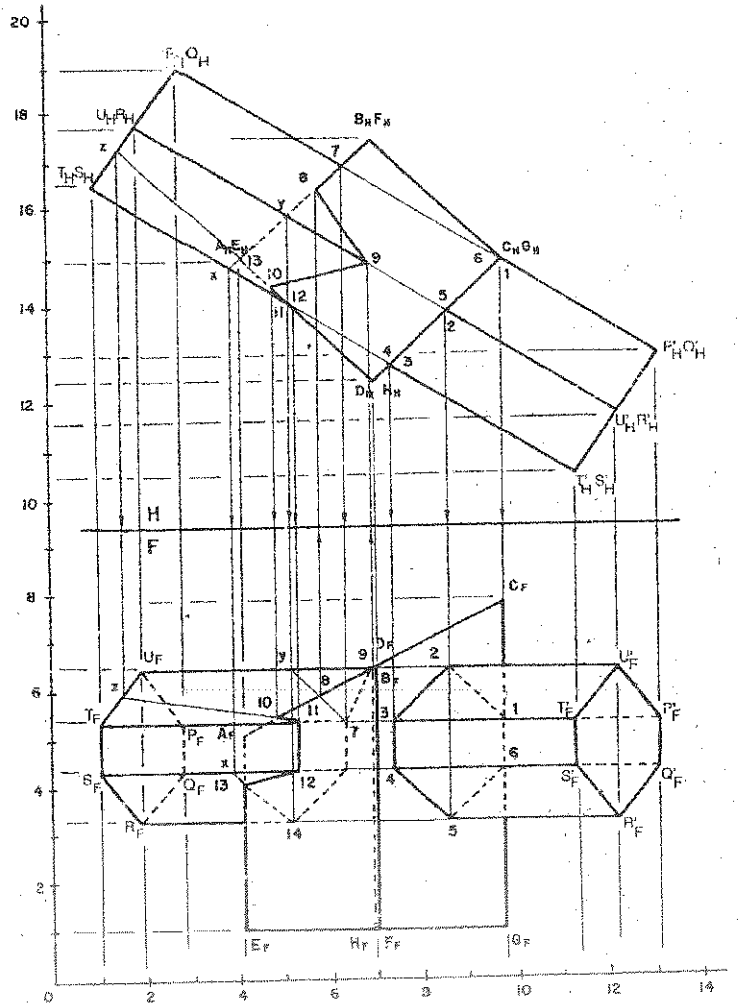


TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F	RECTA	VIS F'	PLANO	VIS F'	INT	VIS F'
CG'	+	PP'	-	1	-	PP'	-	ABB'A'	-	7	-
UU'	+	CDC'D'	+	2	+	AB'	-	PUU'P'	+	8	-
TT'	+	CD'CD'	+	3	+	UU'	+	ABCD	+	9	+
SS'	+	CD'CD	+	4	+	AD	+	TU'TU'	+	10	+
RR'	+	CD'CD	+	5	+	TT'	+	ADHE	+	11	+
OO'	-	CDC'D'	+	6	-	SS'	+	ADHE	+	12	+
						AE	+	RSS'R'	+	13	+

PROBLEMA 13.6: Dado el Prisma de bases triangulares OPQ - JKL donde PK es una de sus aristas laterales, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma vertical ABCDEF – A'B'C'D'E'F' de 8 cm. de altura, siendo AD la diagonal de la base superior hexagonal horizontal. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. Designar a las bases del Prisma en sentido horario en el plano horizontal. No utilizar vistas auxiliares.
A(7.5,9,14.5), D(4,9,18); O(2.5,2,13), P(1,4.5,16), Q(2.5,3,18), K(9,8.5,16)

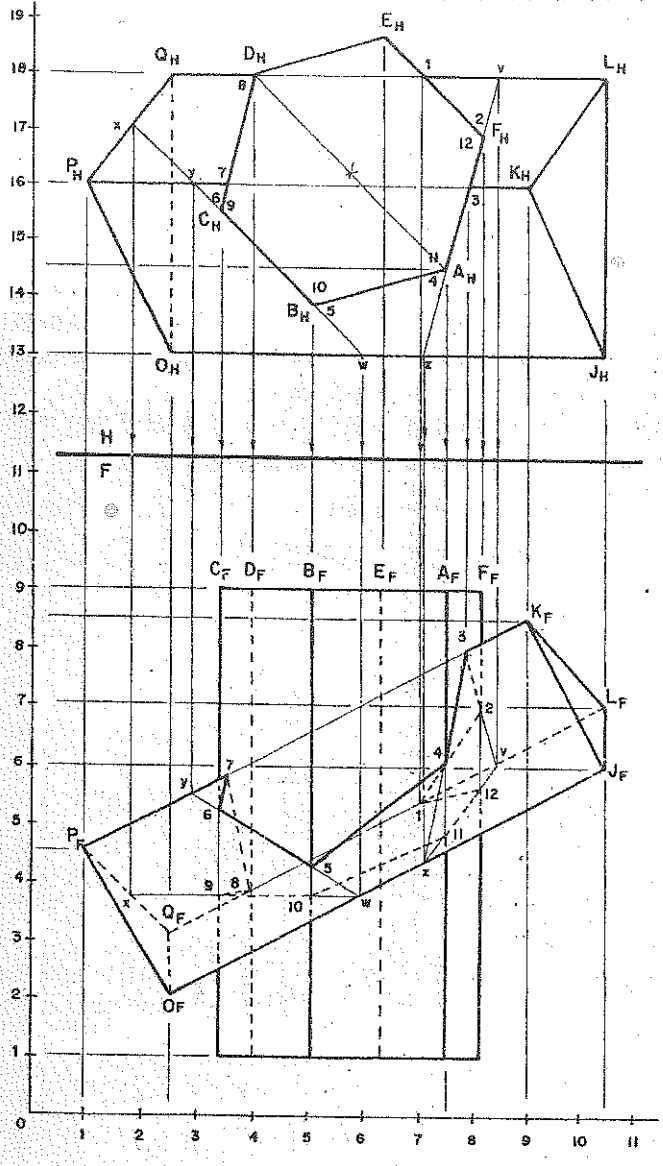


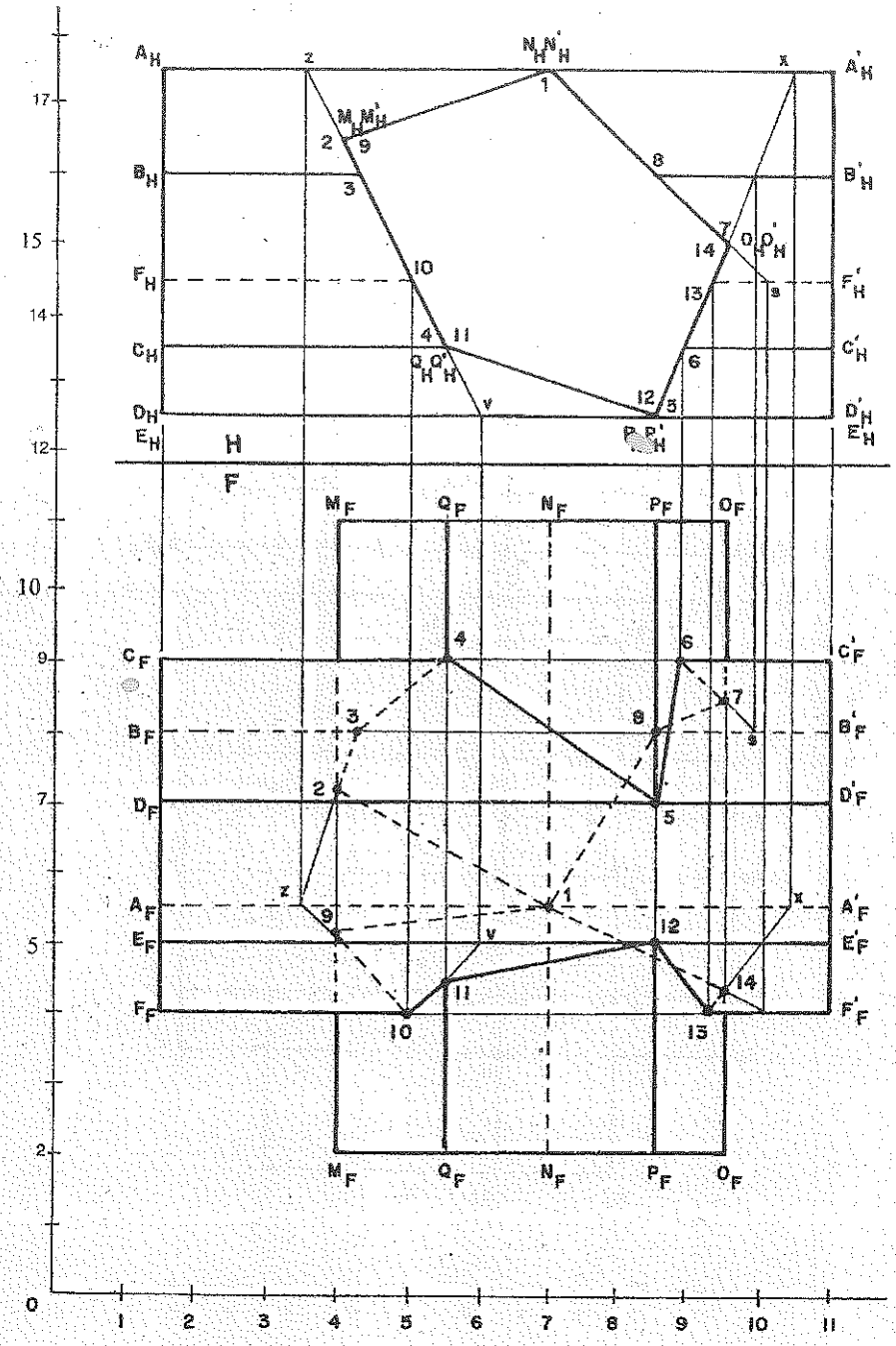
TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
QL	-	EFF'E'	-	1	-
FF'	+	PQLK	-	2	-
PK	+	AFF'A'	+	3	+
AA'	+	OPKJ	+	4	+
BB'	+	OPKJ	+	5	+
CC'	+	OPKJ	+	6	+
PK	+	CDD'C'	-	7	-
DD'	-	QL	-	8	-
CC'	+	OQLJ	-	9	-
BB'	+	OQLJ	-	10	-
AA'	+	OQLJ	-	11	-
FF'	+	OQLJ	-	12	-

PROBLEMA 13.7: Dado el Prisma vertical de base **MNOPQ-M'N'O'P'Q'** de 9 cm. de altura, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma **ABCDEF – A'B'C'D'E'F'**, siendo **AA'** una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. **A(1.5,5.5,17.5), B(1.5,8,16), C(1.5,9,13.5), D(1.5,7,12.5), E(1.5,5,12.5), F(1.5,4,14.5), A'(11,5.5,17.5); M(4,11,16.5), N(7,11,17.5), O(9.5,11,15), P(8.5,11,12.5), Q(5.5,11,13.5)**

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT
NN'	-	AA'	-	1
MM'	+	ABB'A'	-	2
BB'	-	MQQ'M'	-	3
CC'	+	QQ'	+	4
DD'	+	PP'	+	5
EE'	+	PP'	+	6
OO'	+	BCC'B'	-	7
BB'	-	NOO'N'	-	8
MM'	+	AFF'A'	-	9
FF'	+	MQQ'M'	+	10
QQ'	+	EFF'E'	+	11
PP'	+	EE'	+	12
FF'	+	OPP'O'	+	13
OO'	+	AFF'A'	-	14



A_H
A'_H
B_H
B'_H
F_H
F'_H
C_H
C'_H
D_H
D'_H
E_H
E'_H
$N_H N'_H$
$M_H M'_H$
$Q_H Q'_H$
$O_H O'_H$
$P_H P'_H$
H
F
M_F
Q_F
N_F
P_F
O_F
C_F
C'_F
B_F
B'_F
D_F
D'_F
A_F
A'_F
E_F
E'_F
F_F
F'_F

PROBLEMA 13.8: Dado el Prisma vertical de base MNOPQ-M'N'O'P'Q' de 9 cm. de altura, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma ABCDEF – A'B'C'D'E'F', siendo AA' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(1.5,5.5,17.5), B(1.5,8,16), C(1.5,9,13.5), D(1.5,7,12.5), E(1.5,5,12.5), F(1.5,4,14.5), A'(11,5.5,17.5); M(3.5,2,16.5), N(7,2,17.5), O(9.5,2,15), P(5.5,2,12.5), Q(5.5,2,14.5)

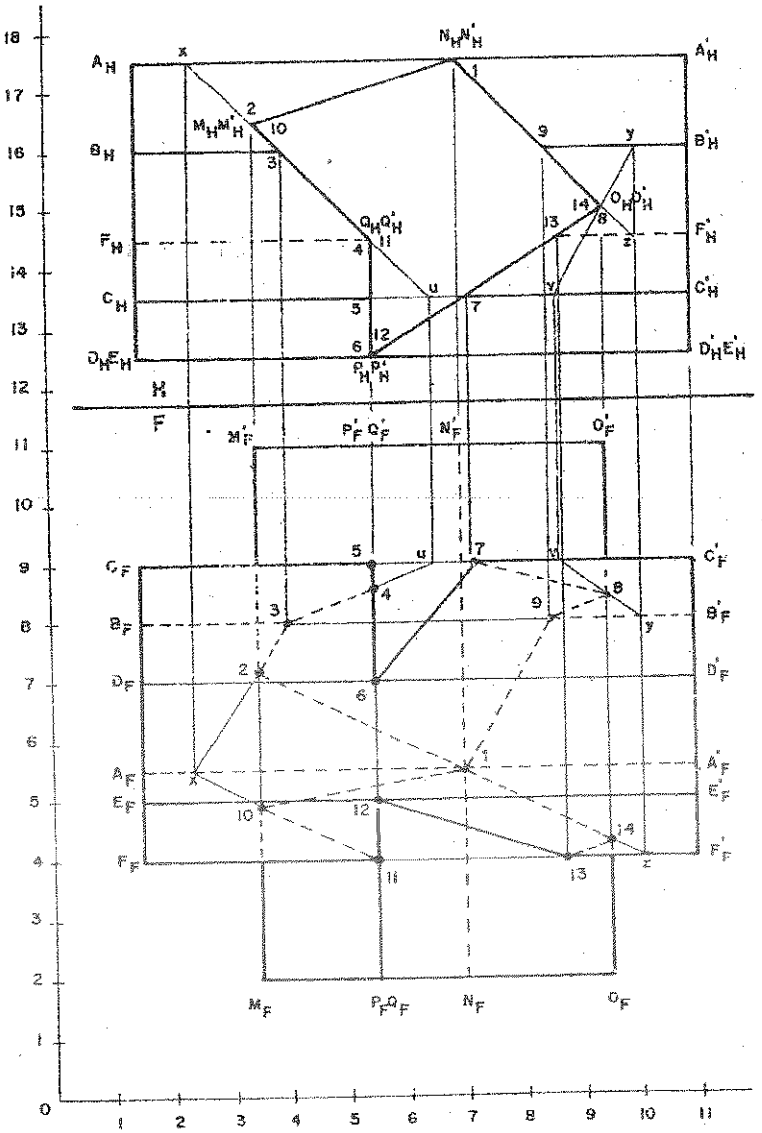


TABLA DE VISIBILIDAD

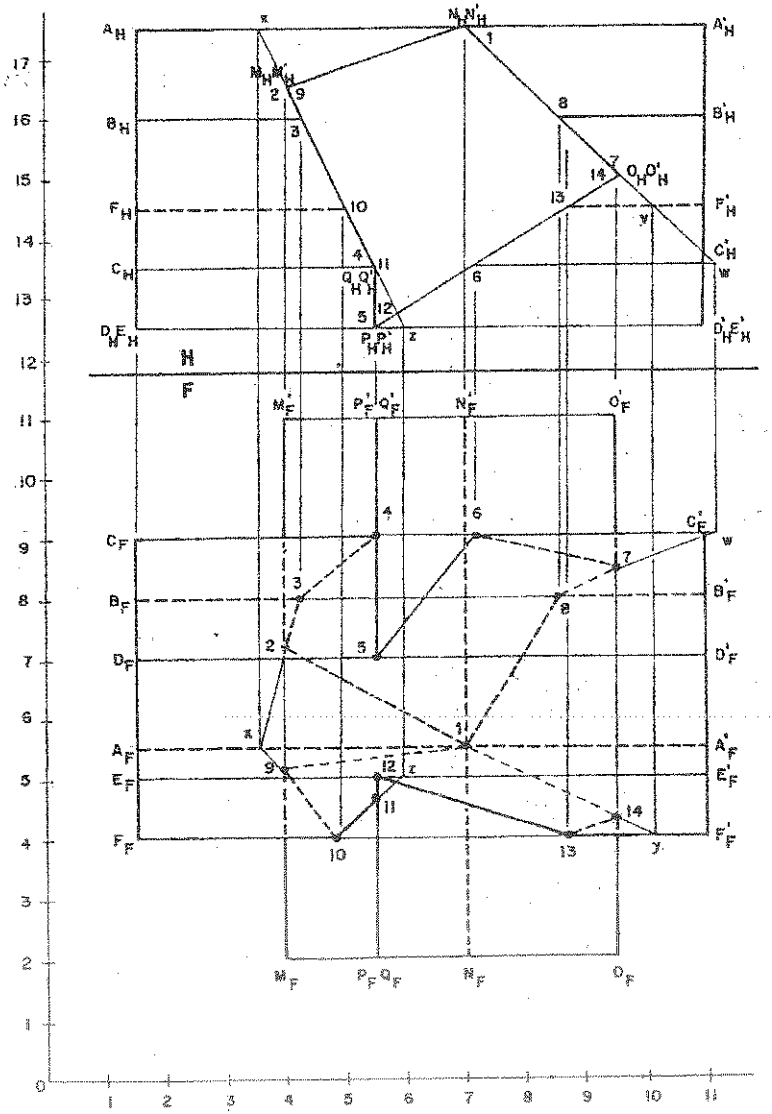
RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
NN'	-	AA'	-	1	-
MM'	+	ABB'A'	-	2	-
BB'	-	MQQ'M'	-	3	-
QQ'	-	BCC'B'	-	4	-
CC'	+	PQQ'P'	+	5	+
PP'	+	DD'	+	6	+
CC'	+	OPP'O'	+	7	+
OO'	+	BCC'B'	-	8	-
BB'	-	NOO'N'	-	9	-
MM'	+	AFF'A'	-	10	-
QQ'	-	FF'	+	11	-
PP'	+	EE'	+	12	+
FF'	+	OPP'O'	+	13	+
OO'	+	AFF'A'	-	14	-

PROBLEMA 13.9: Dado el Prisma vertical de base **MNOPQ-M'N'O'P'Q'** de 9 cm. de altura, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma **ABCDEF – A'B'C'D'E'F'**, siendo **AA'** una arista lateral de esto prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(1.5,5.5,17.5), B(1.5,8,16), C(1.5,9,13.5), D(1.5,7,12.5), E(1.5,5,12.5), F(1.5,4,14.5), A'(11,5.5,17.5); M(4,2,16.5), N(7,2,17.5), O(9.5,2,15), P(5.5,2,12.5), Q(5.5,2,13.5)

TABLA DE VISIBILIDAD

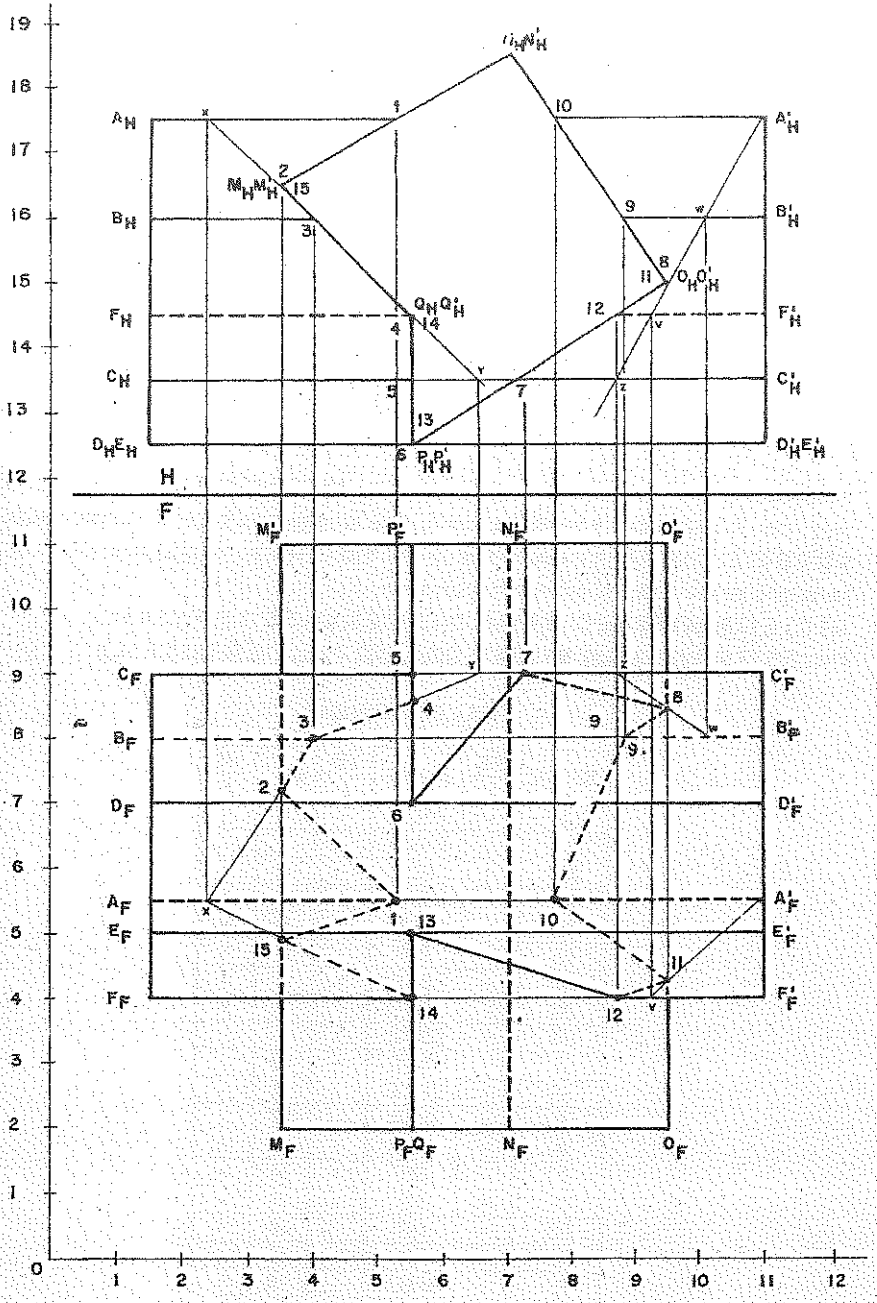
RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
NN'	-	AA'	-	1	-
MM'	+	ABB'A'	-	2	-
BB'	-	MQQ'M'	-	3	-
QQ'	+	CC'	+	4	+
DD'	+	PP'	+	5	+
CC'	+	OPP'O'	+	6	+
OO'	+	BCC'B'	-	7	-
BB'	-	NOO'N'	-	8	-
MM'	+	AFF'A'	-	9	-
FF'	+	MQQ'M'	+	10	+
QQ'	-	EFF'E'	+	11	-
PP'	+	EE'	+	12	+
FF'	+	OPP'O'	+	13	+
OO'	+	AFF'A'	-	14	-



PROBLEMA 13.10: Dado el Prisma vertical de base MNOPQ-M'N'O'P'Q' de 9 cm. de altura, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma ABCDEF – A'B'C'D'E'F', siendo AA' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(1.5,5.5,17.5), B(1.5,8,16), C(1.5,9,13.5), D(1.5,7,12.5), E(1.5,5,12.5), F(1.5,4,14.5), A'(11,5.5,17.5); M(3.5,2,16.5), N(7,2,18.5), O(9.5,2,15), P(5.5,2,12.5), Q(5.5,2,14.5)

SOLUCIÓN 13:10:



GEOMETRIA DESCRIPTIVA		INTERSECCIÓN DE POLIEDROS	PAG.
VICTOR VIDAL B.	CAPITULO: 13		451

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
AA'	-	MNN'M'	-	1	-
MM'	+	ABB'A'	-	2	-
BB'	-	MQQ'M'	-	3	-
QQ'	+	BCC'B'	-	4	-
CC'	+	PQQ'P'	+	5	+
DD'	+	PP'	+	6	+
CC'	+	OPP'O'	+	7	+
OO'	+	BCC'B'	-	8	-
BB'	-	NOO'N'	-	9	-
AA'	-	NOO'N'	-	10	-
OO'	+	AFF'A'	-	11	-
FF'	+	OPP'O'	+	12	+
EE'	+	PP'	+	13	+
OO'	+	FF'	+	14	+

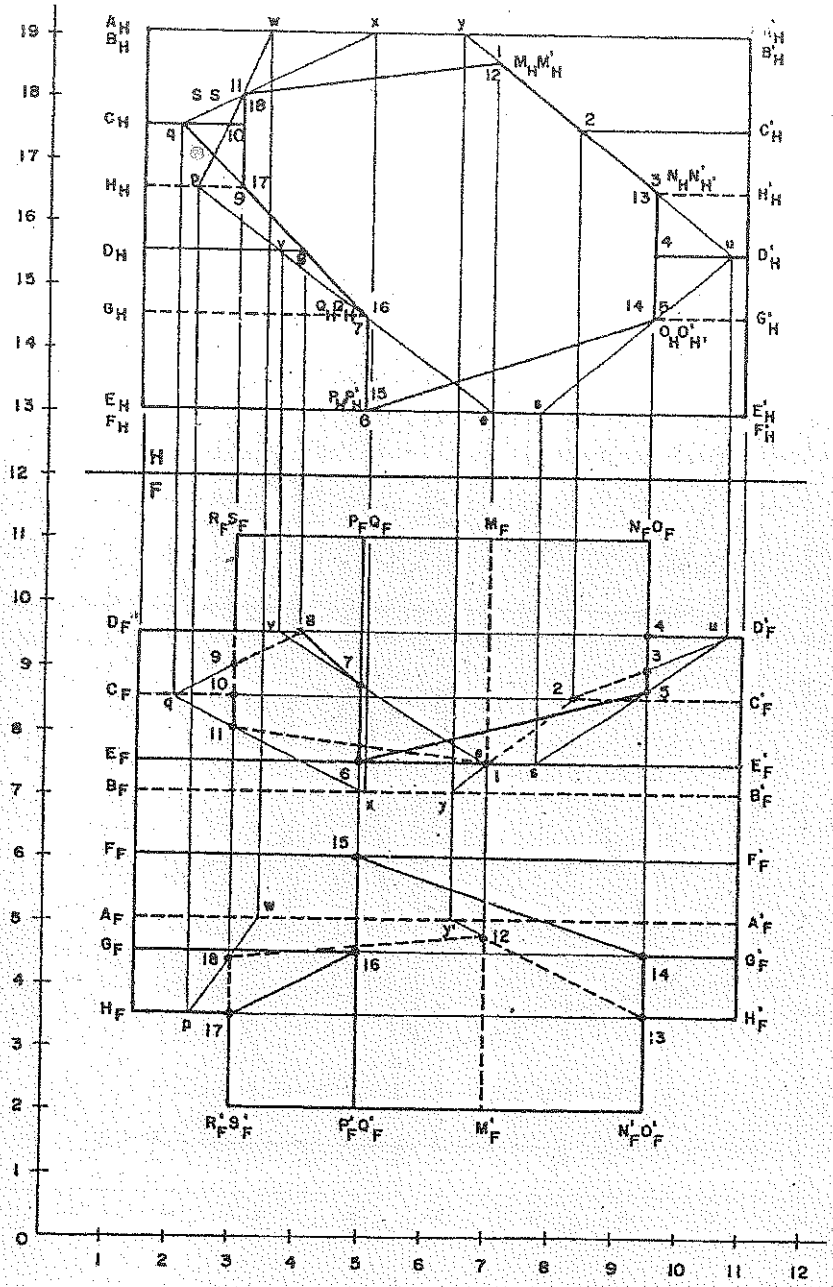
PROBLEMA 13.11: Dado el Prisma vertical de base **MNOPQ-M'N'O'P'Q'** de 9 cm. de altura, determinar la intersección y visibilidad cuando este es interceptado por el prisma **ABCDEF – A'B'C'D'E'F'**, siendo **AA'** una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares.

A(1.5,5.5,17.5), B(1.5,8,16), C(1.5,9,13.5), D(1.5,7,12.5), E(1.5,5,12.5), F(1.5,4,14.5), A'(11,5.5,17.5); M(3.5,2,16.5), N(7,2,18.5), O(9.5,2,15), P(5.5,2,12.5), Q(5.5,2,14.5)

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS F	PLANO	VIS F	INT	VIS F
MM'	-	BCC'B'	-	1	-
CC'	-	MNN'M'	-	2	-
NN'	-	CDD'C'	-	3	-
DD'	+	NOO'N'	+	4	+
OO'	+	DEE'D'	+	5	+
EE'	+	PP'	+	6	+
QQ'	+	DEE'D'	+	7	+
DD'	+	QRR'Q'	+	8	+
RR'	+	CDD'C'	-	9	-
CC'	-	RSS'R'	+	10	-
SS'	+	BCC'B'	-	11	-
MM'	-	AHH'A'	-	12	-
NN'	+	HH'	+	13	+
OO'	+	GG'	+	14	+
FF'	+	PP'	+	15	+
QQ'	+	GG'	+	16	+
RR'	+	HH'	+	17	+
SS'	-	AHH'A'	-	18	-

SOLUCIÓN 13.11:



PROBLEMA 13.12: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta V-ABCD cuya base es un cuadrado horizontal cuando este es interceptado por el prisma PQR-P'Q'R', siendo PP' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal. V(10,11.5,?),
A(5.5,1,18.5), C(14.5,1,16.5); P(1,8.5,18.5), Q(5.5,9:5,17), R(3,4.5,13.5), P'(14,4.5,21)

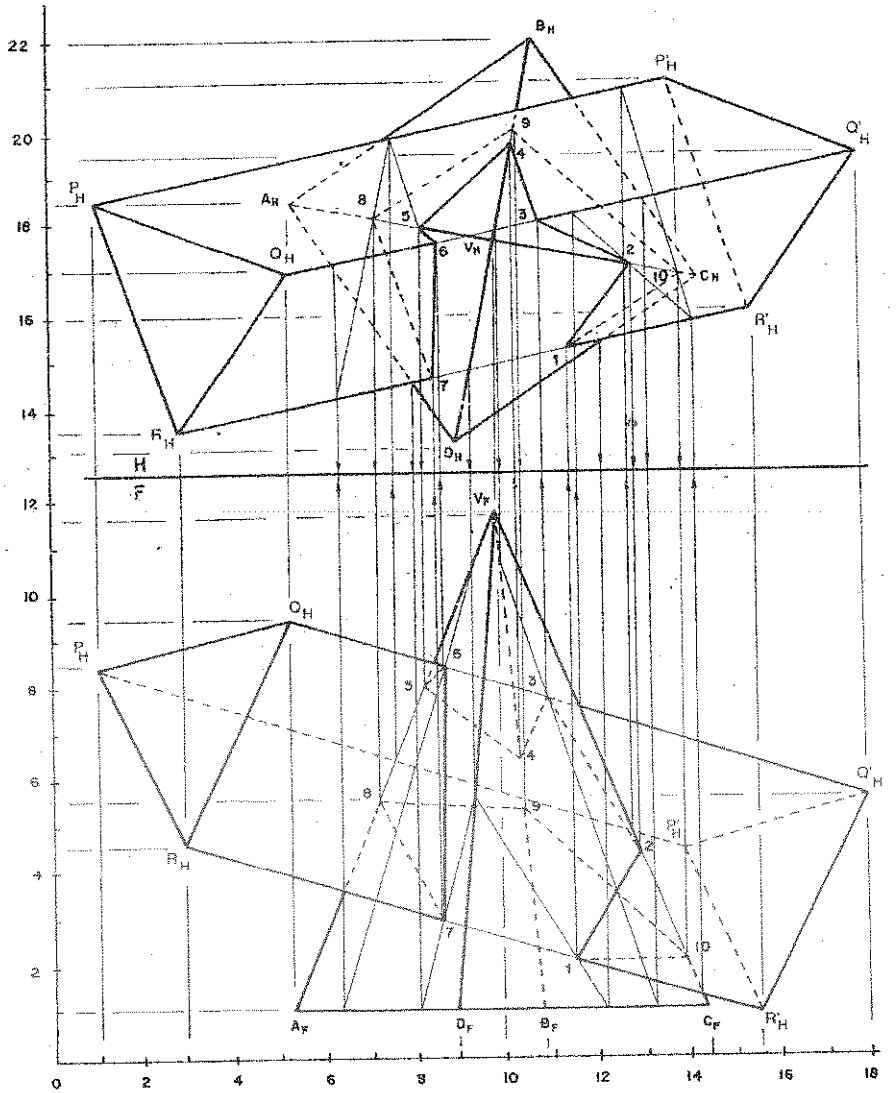


TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
RR'	+	+	DVC	+	+	1	+	+
VC	+	+	QRR'Q'	+	+	2	+	+
QQ'	+	+	BVC	+	-	3	+	-
VB	+	-	PQQ'P'	+	-	4	+	-
VA	+	+	PQQ'P'	+	-	5	+	-
QQ'	+	+	AVD	+	+	6	+	+
RR'	+	+	AVD	+	+	7	+	+
VA	+	+	PRR'P'	-	-	8	-	-
VB	+	-	PRR'P'	-	-	9	-	-
VC	+	+	PRR'P'	-	-	10	-	-

PROBLEMA 13.13: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta V-ABCDE de 16 unidades de altura, cuya base es un pentágono regular horizontal siendo C uno de sus vértices; cuando este es interceptado por el prisma RSTU–R'S'T'U', siendo RR' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer la tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal.

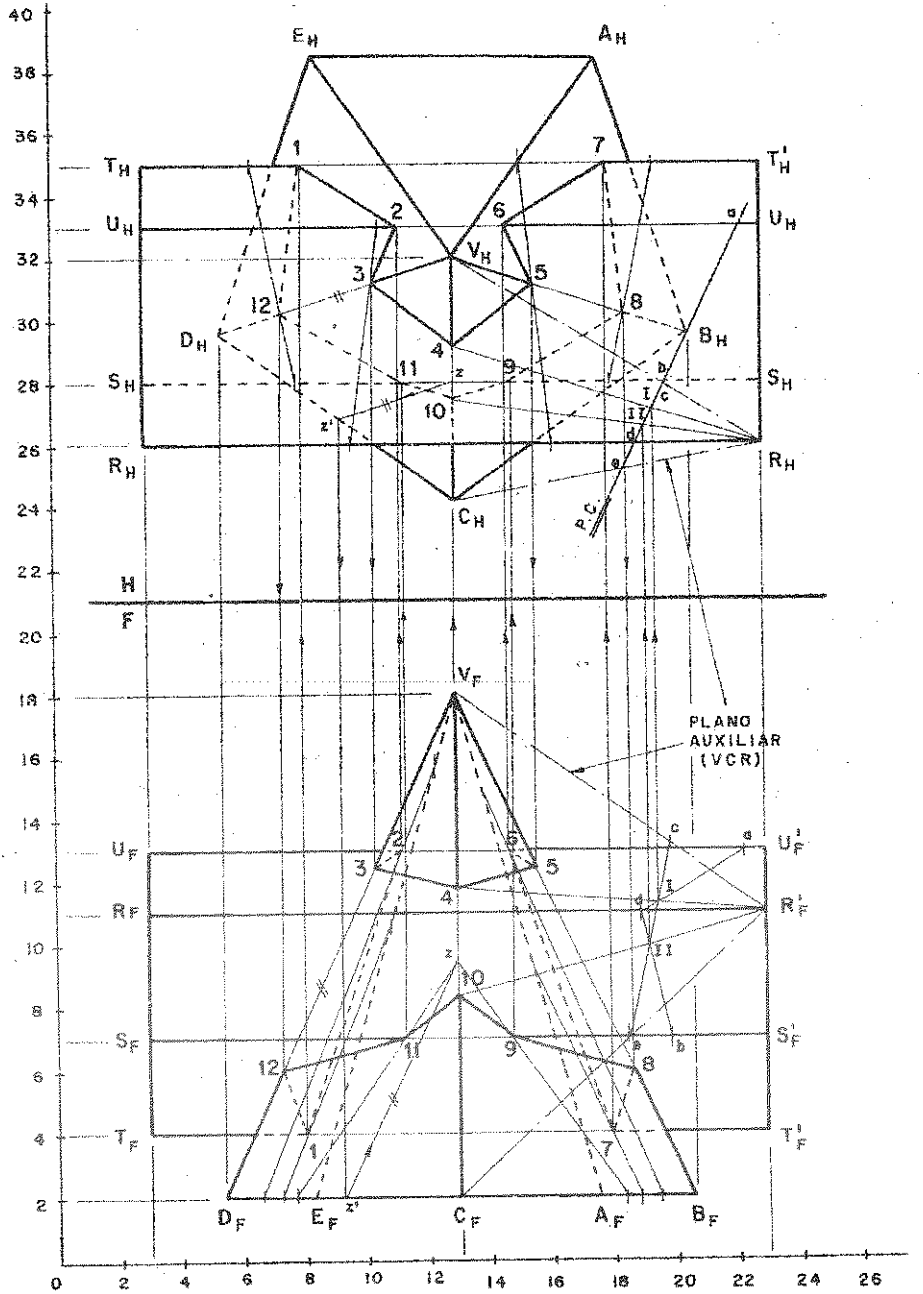
V(13,18,32)u, C(13,?,24)u;

R(3,11,26)u, S(3,7,28)u, T(3,4,35)u, U(3,13,33)u, R'(23,11,26)u

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
TT'	+	+	DVE	+	-	1	+	-
UU'	+	+	DVE	+	-	2	+	-
VD	+	+	URR'U'	+	+	3	+	+
VC	+	+	URR'U'	+	+	4	+	+
VB	+	+	URR'U'	+	+	5	+	+
UU'	+	+	AVB	+	-	6	+	-
TT'	+	+	AVB	+	+	7	+	+
VB	+	+	STT'S'	-	+	8	-	+
SS'	-	+	BVC	+	+	9	-	+
VC	+	+	RSS'R'	-	+	10	-	+
SS'	-	+	CVD	+	+	11	-	+
VD	+	+	STT'S'	-	+	12	-	+

SOLUCIÓN 13.13:



PROBLEMA 13.14: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta V-ABCDE de 14 unidades de altura, cuya base es un pentágono regular horizontal siendo A uno de sus vértices; cuando este es interceptado por el prisma FGH-F'G'H', siendo FF' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer la tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal.

V(12,15,24)u, A(12,?,17)u; F(3,3,24)u, G(3,8,18)u, H(3,11,25)u, F'(21,3,24)u

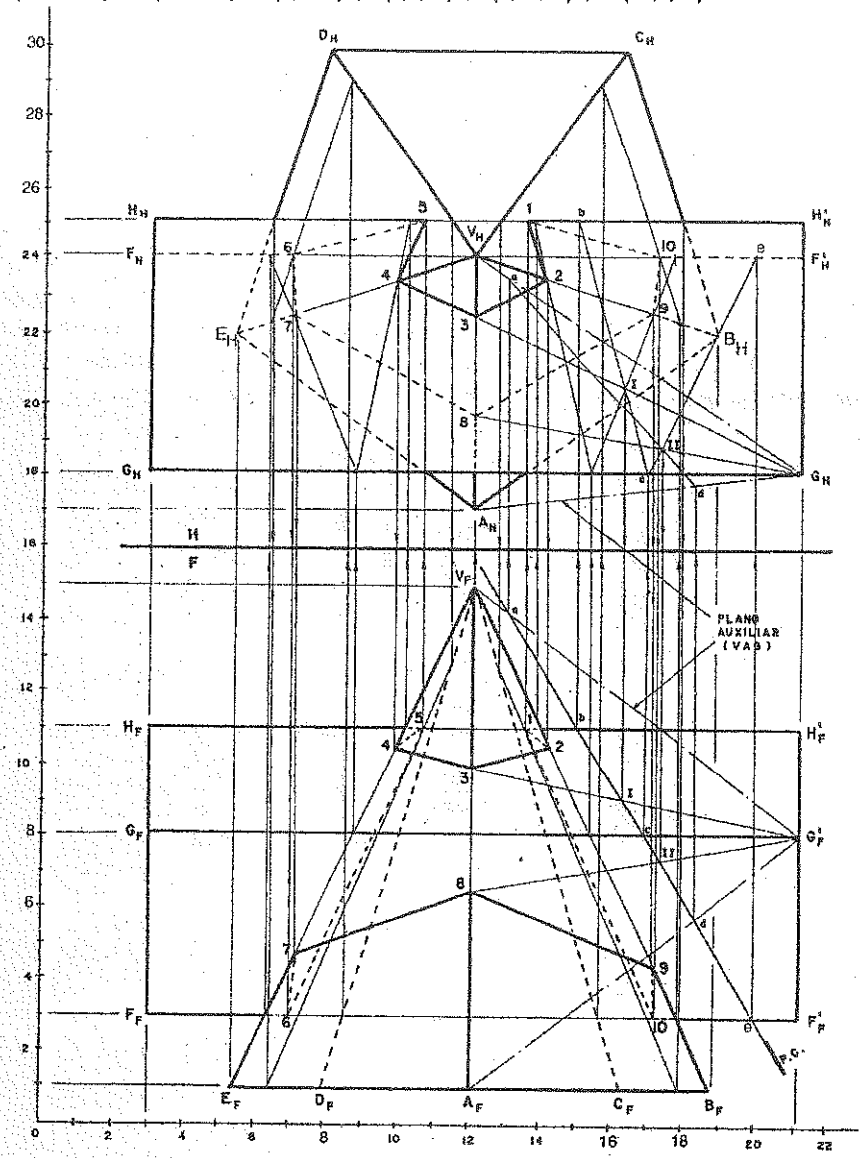


TABLA DE VISIBILIDAD

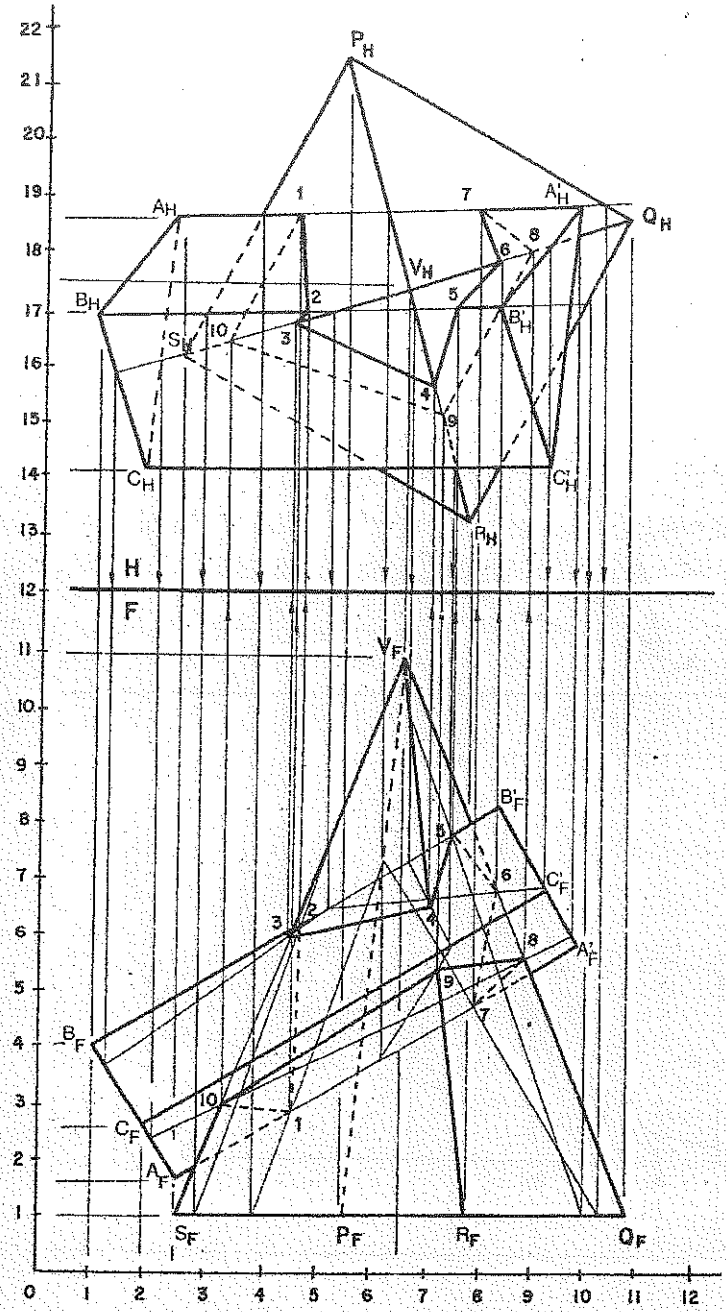
RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
HH'	+	+	DVE	+	-	1	+	-
VB	+	+	GHH'G'	+	+	2	+	+
VA	+	+	GHH'G'	+	+	3	+	+
VE	+	+	GHH'G'	+	+	4	+	+
HH'	+	+	DVE	+	-	5	+	-
FF'	-	+	DVE	+	-	6	-	-
VE	+	+	FGG'F'	-	+	7	-	+
VA	+	+	FGG'F'	-	+	8	-	+
VB	+	+	FGG'F'	-	+	9	-	+
FF'	-	+	BVC	-	+	10	-	+

PROBLEMA 13.15: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta V-PQRS de 10 cm. de altura, cuya base es un pentágono regular horizontal siendo P uno de sus vértices; cuando este es interceptado por el prisma de base orto frontal ABC-A'B'C', siendo AA' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer la tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal.
V(6.5,11,17.5), P(5.5,?,21.5); A(2.5,1.5,18.5), B(1,4,17), C(2,?,14), A'(10,6,18.5)

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
AA'	+	+	PVS	+	-	1	+	-
BB'	+	+	PVS	+	-	2	+	-
VS	+	+	BCC'B'	+	+	3	+	+
VR	+	+	BCC'B'	+	+	4	+	+
BB'	+	+	PVQ	+	-	5	+	-
VQ	+	+	ABB'A'	+	-	6	-	-
AA'	+	+	PVQ	+	-	7	+	-
VQ	+	+	ACC'A'	-	+	8	-	+
VR	+	+	ACC'A'	-	+	9	-	+
VS	+	+	ACC'A'	-	+	10	-	+

SOLUCIÓN 13.15:



PROBLEMA 13.16: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta V-ABC de 6.5 cm. de altura, cuya base es un triángulo horizontal siendo A uno de sus vértices; cuando este es interceptado por el prisma RST–R'S'T'; siendo RR' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer la tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal.

V(6,8,12.5), A(2.5,?,9.5); R(0.5,1.5,12), S(1.5,4.5,14.5), T(1.5,3,15.5), R'(10.5,3.5,10)

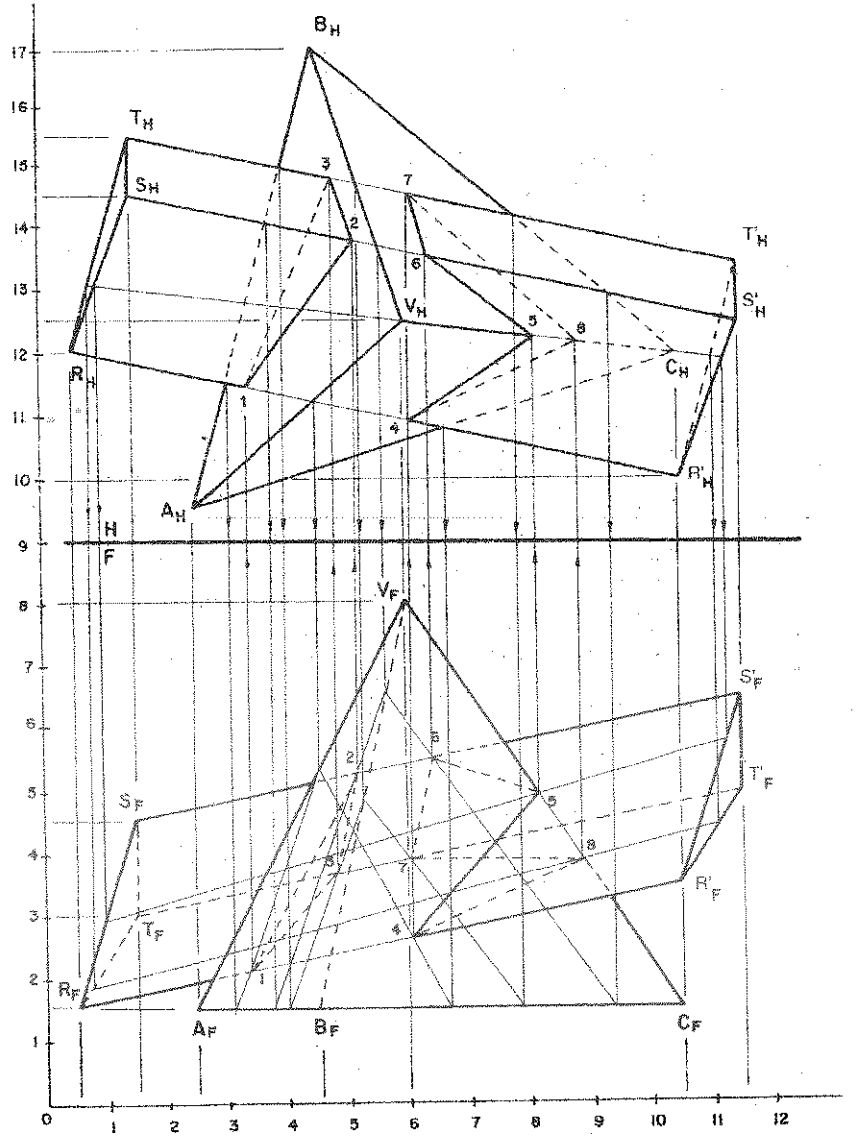


TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
RR'	+	+	AVB	+	-	1	+	-
SS'	+	+	AVB	+	-	2	+	-
TT'	+	-	AVB	+	-	3	+	-
RR'	+	+	AVC	+	+	4	+	+
VC	+	+	RSS'R'	+	+	5	+	+
SS'	+	+	BVC	+	-	6	+	-
TT'	+	-	AVB	+	-	7	+	-
VC	+	+	RTT'R'	-	-	8	-	-

PROBLEMA 13.17: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta **V-ABCDEF** cuya base es un hexágono horizontal siendo **AC** una diagonal de la base hexagonal, cuando este poliedro es interceptado por el prisma **PQR–P'Q'R'**, siendo **PP'** una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido anti horario en el plano horizontal.

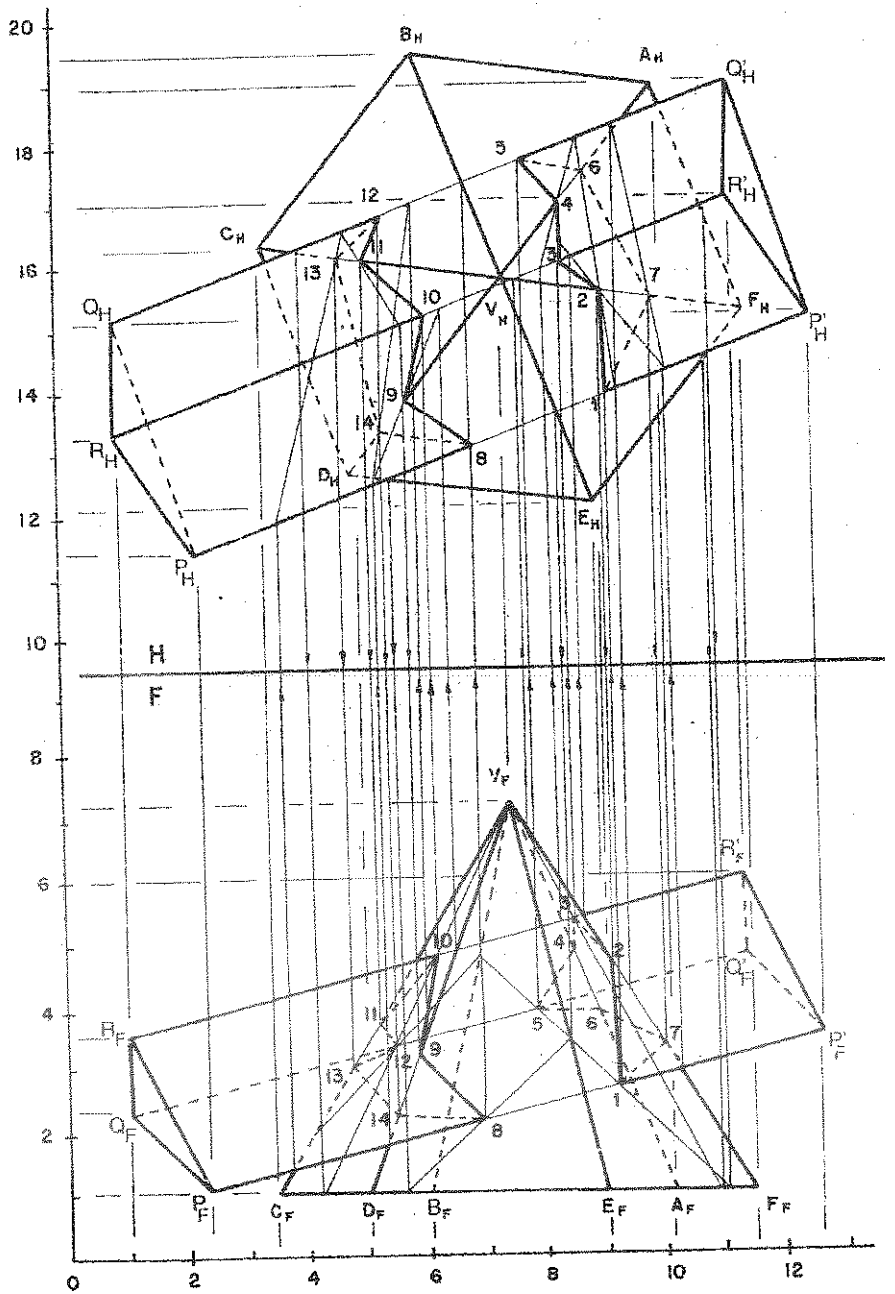
C(3.5,1,16.5), F(11.5,1,15);

P(2.5,1,11.5), Q(1,2.5,15), R(1,3.5,13), P'(12.5,3.5,15)

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
PP'	+	+	EVF	+	+	1	+	+
VF	+	+	PRR'P'	+	+	2	+	+
RR'	+	+	AVF	+	-	3	+	-
VA	+	+	QRR'Q'	+	-	4	+	-
QQ'	+	-	AVB	+	-	5	+	-
VA	+	-	QPP'Q'	-	-	6	-	-
VF	+	+	QPP'Q'	-	-	7	-	-
PP'	+	+	DVE	+	+	8	+	+
VD	+	+	PRR'P'	+	+	9	+	+
RR'	+	+	CVD	+	+	10	+	+
VC	+	+	QRR'Q'	+	-	11	+	-
QQ'	+	-	BVC	+	-	12	+	-
VC	+	+	PQQ'P'	-	-	13	-	-
VD	+	+	PQQ'P'	-	-	14	-	-

SOLUCIÓN 13.17:



PROBLEMA 13.18: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta V-ABCD de 14 unidades de altura, cuya base es un cuadrado regular horizontal siendo A uno de sus vértices; cuando este es interceptado por el prisma EFGH-E'F'G'H' de base ortofrontal, siendo EE' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer la tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal. V(10,15,24)u, A(4,1,24)u;
E(3,?,17)u, F(2,9,22)u, G(3,?,27)u, H(4,1,22)u, E'(17,?,17)u

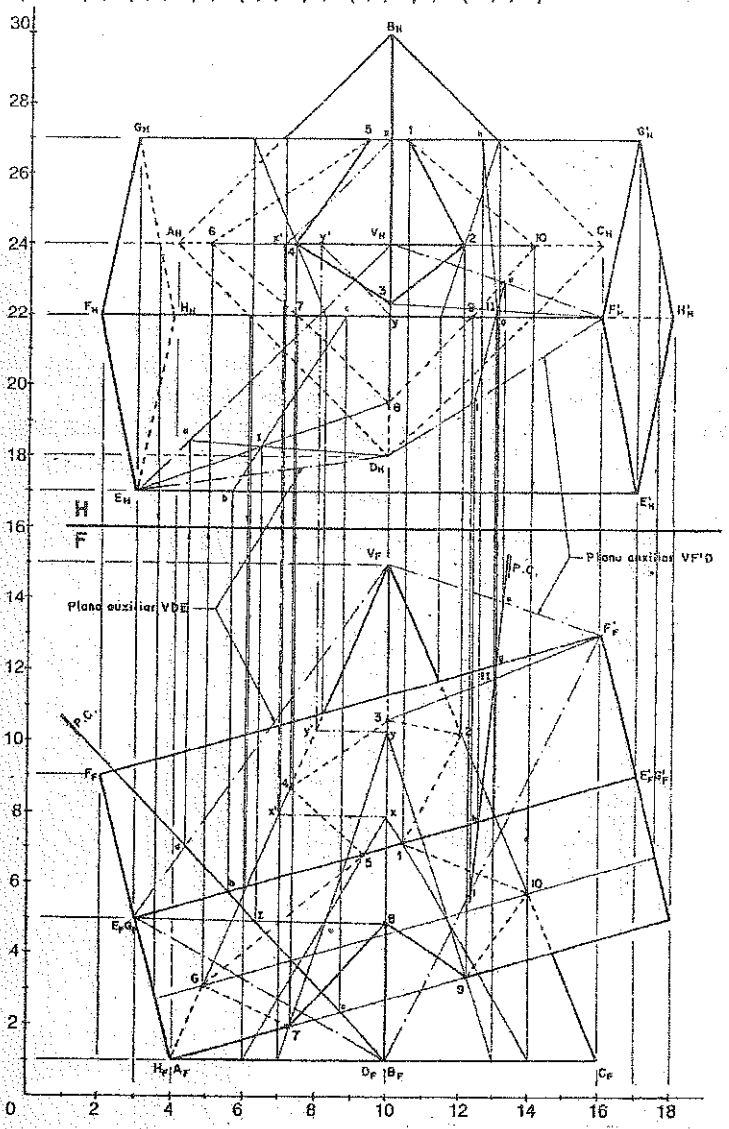


TABLA DE VISIBILIDAD

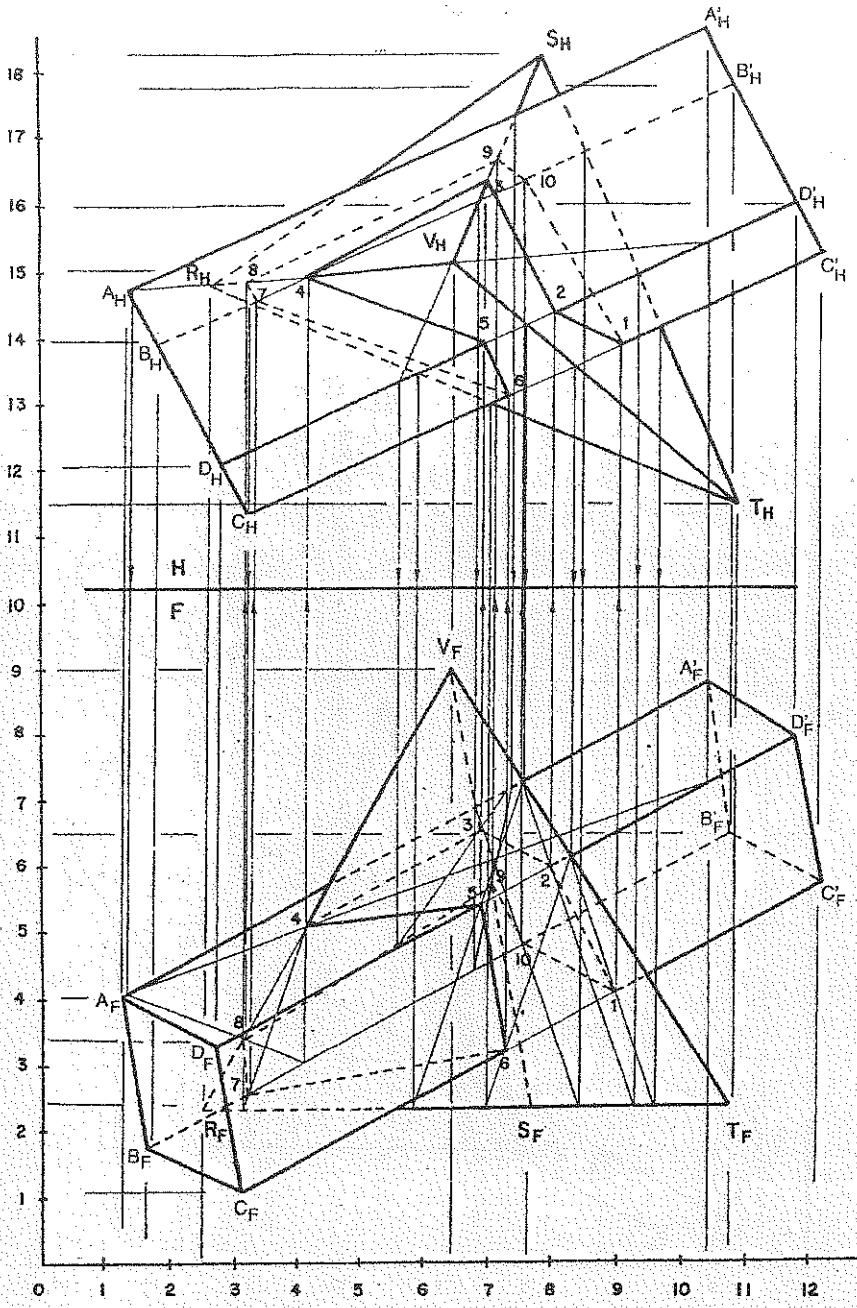
RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
GG'	+	+	BVC	+	-	1	+	-
VC	+	+	FGG'F'	+	-	2	+	-
VD	+	+	FGG'F'	+	-	3	+	-
VA	+	+	FGG'F'	+	-	4	+	-
GG'	+	+	AVB	+	-	5	+	-
VA	+	+	GHH'G'	-	-	6	-	-
HH'	-	+	AVD	+	+	7	-	+
VD	+	+	EHH'E'	-	+	8	-	+
HH'	-	+	CVD	+	+	9	-	+
VC	+	+	GHH'G'	-	-	10	-	-

PROBLEMA 13.19: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta V-RST de 6.5 cm. de altura, cuya base es un triángulo horizontal siendo R uno de sus vértices; cuando este es interceptado por el prisma ABCD–A'B'C'D' de base vertical, siendo AA' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer la tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal.
V(6.5,9,15), R(2.5,?,14.5); A(1,4,14.5), B(1.5,1.5,?), C(3.5,1,11), D(3,3.5,?); A'(10.5,8.5,18.5)

TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
CC'	+	+	SVT	+	-	1	+	-
DD'	+	+	SVT	+	-	2	+	-
VS	+	-	ADD'A'	+	+	3	+	-
VR	+	+	ADD'A'	+	+	4	+	+
DD'	+	+	RVT	+	+	5	+	+
CC'	+	+	RVT	+	+	6	+	+
BB'	-	-	RVT	+	+	7	-	-
VR	+	+	ABB'A'	-	-	8	-	-
VS	+	-	ABB'A'	-	-	9	-	-
BB'	-	-	SVT	+	-	10	-	-

SOLUCIÓN 13:19:



PROBLEMA 13.20: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide recta **V-PQRST** cuya base es un pentágono horizontal siendo T un vértice de la base pentagonal, cuando este poliedro es interceptado por el prisma **ABCDEF–A'B'C'D'E'F'**, siendo **AA'** una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal.

V(9,12.5,18.5), T(9,2.5,22); A(4,4,23), B(2,4.5,22.5), C(1,3,21), D(1.5,1,19.5), E(3.5,?,?), F(4.5,?,?); A'(15,10.5,17)

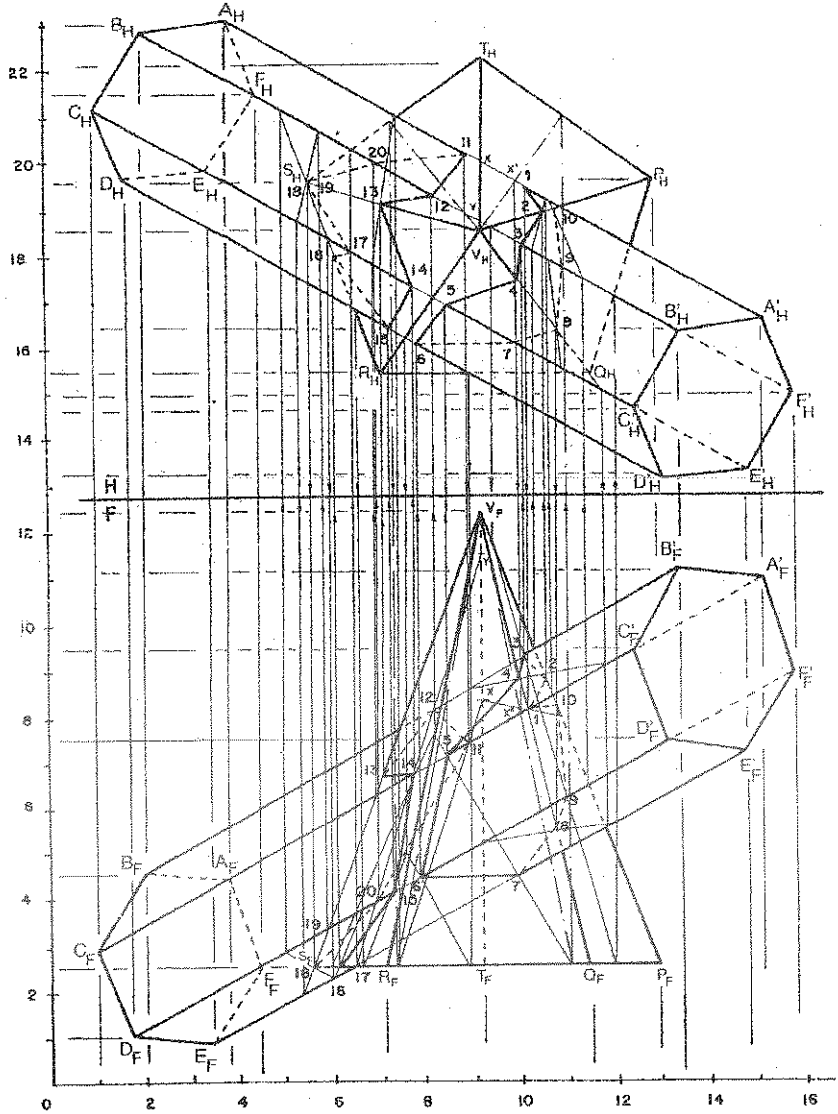


TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
AA'	+	-	PVQ	+	+	1	+	-
VP	+	+	ABB'A'	+	-	2	+	-
BB'	+	+	PVQ	+	+	3	+	+
VQ	+	+	BCC'B'	+	+	4	+	+
CC'	+	+	QVR	+	+	5	+	+
DD'	+	+	QVR	+	+	6	+	+
EE'	-	+	QVR	+	+	7	-	+
VQ	+	+	EFF'E'	-	-	8	-	-
FF'	-	-	PVQ	+	+	9	-	-
VP	+	+	AFF'A'	-	-	10	-	-
AA'	+	-	SVT	+	-	11	+	-
BB'	+	+	SVT	+	-	12	+	-
VS	+	+	BCC'B'	+	+	13	+	+
CC'	+	+	RVS	+	+	14	+	+
DD'	+	+	RVS	+	+	15	+	+
RS	+	+	DEE'D'	-	+	16	-	+
EE'	-	+	PQRST	+	+	17	-	+
VS	+	+	EFF'E'	-	-	18	-	-
RS	+	+	EFF'E'	-	-	19	-	-
FF'	-	-	SVT	+	-	20	-	-

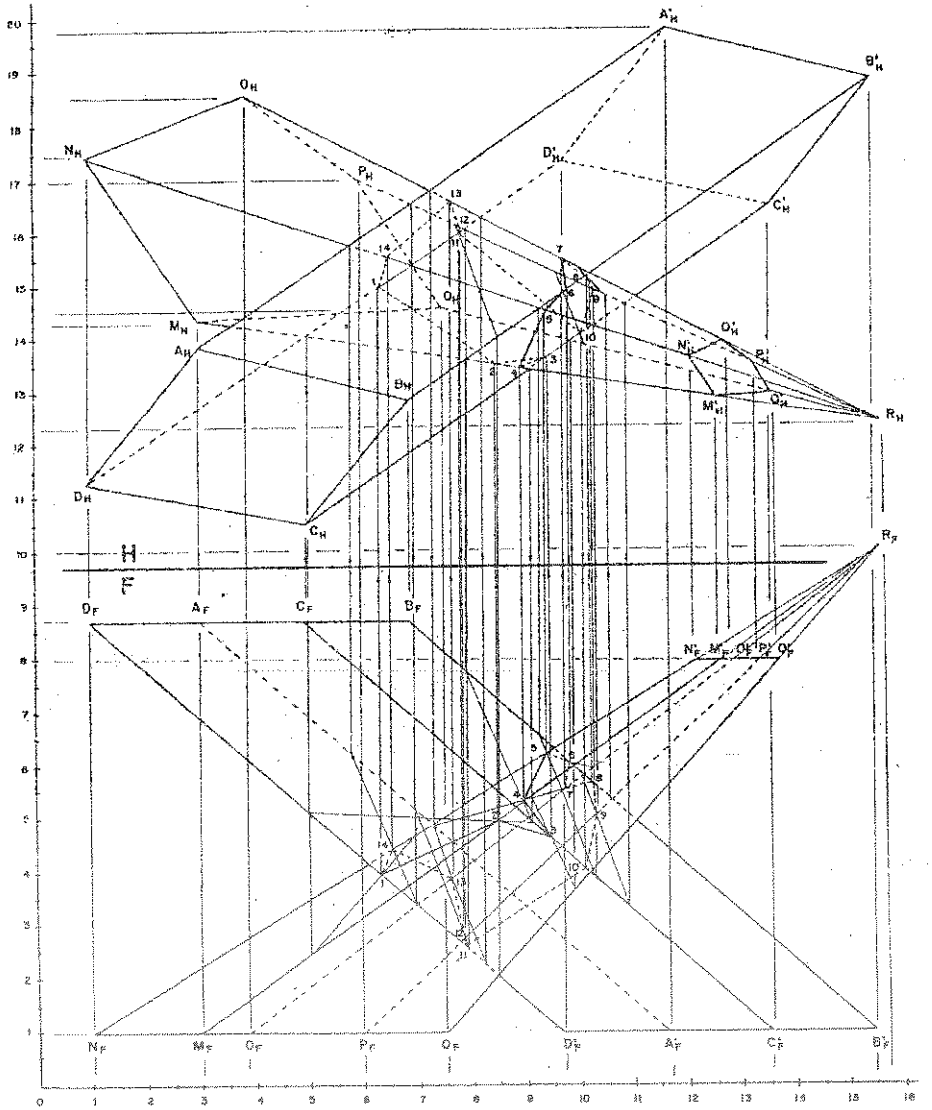
PROBLEMA 13.21: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide R-MNOPQ pentagonal truncada a 2 cm. Por debajo del vértice, cuando este poliedro es interceptado por el prisma ABCD–A'B'C'D', siendo AA' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal.

R(16,10,12.5), M(3,1,14), N(1,1,17.5), O(4,1,18.5), P(6,1,17), Q(17.5,1,14.5); A(3,8.5,13.5), B(7,8.5,13), C(5,8.5,10.5), D(1,8.5,11); A'(11.5,1,20)

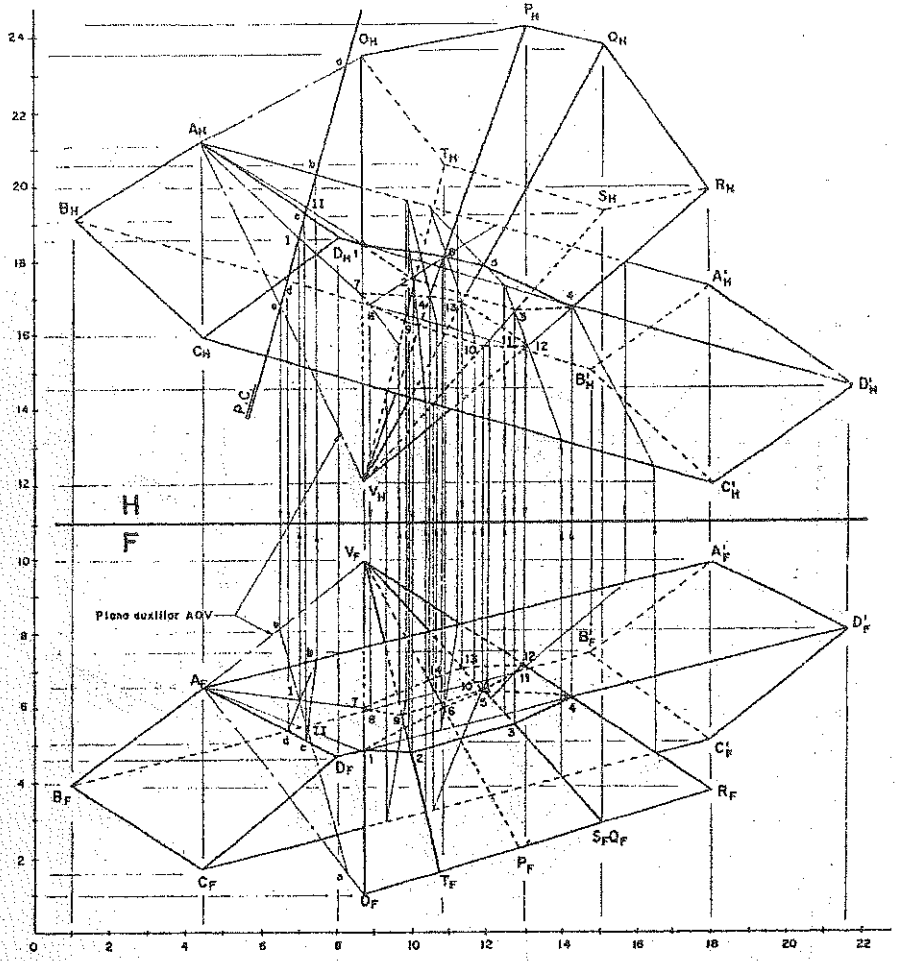
TABLA DE VISIBILIDAD

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
DD'	-	+	MNN'M'	+	+	1	-	+
MM'	+	+	DCC'D'	-	+	2	-	+
CC'	+	+	MQQ'M'	-	+	3	-	+
MM'	+	+	BCC'B'	+	+	4	+	+
NN'	+	+	BCC'B'	+	+	5	+	+
BB'	+	+	NOO'N'	+	-	6	+	-
OO'	+	-	ABB'A'	+	-	7	+	-
BB'	+	+	OPP'O'	-	-	8	-	-
PP'	-	-	DCC'D'	-	+	9	-	-
CC'	+	+	PQQ'P'	-	-	10	-	-
DD'	-	+	PQQ'P'	-	-	11	-	-
PP'	-	-	ADD'A'	-	-	12	-	-
OO'	+	-	ADD'A'	-	-	13	-	-
NN'	+	+	ADD'A'	-	-	14	-	-

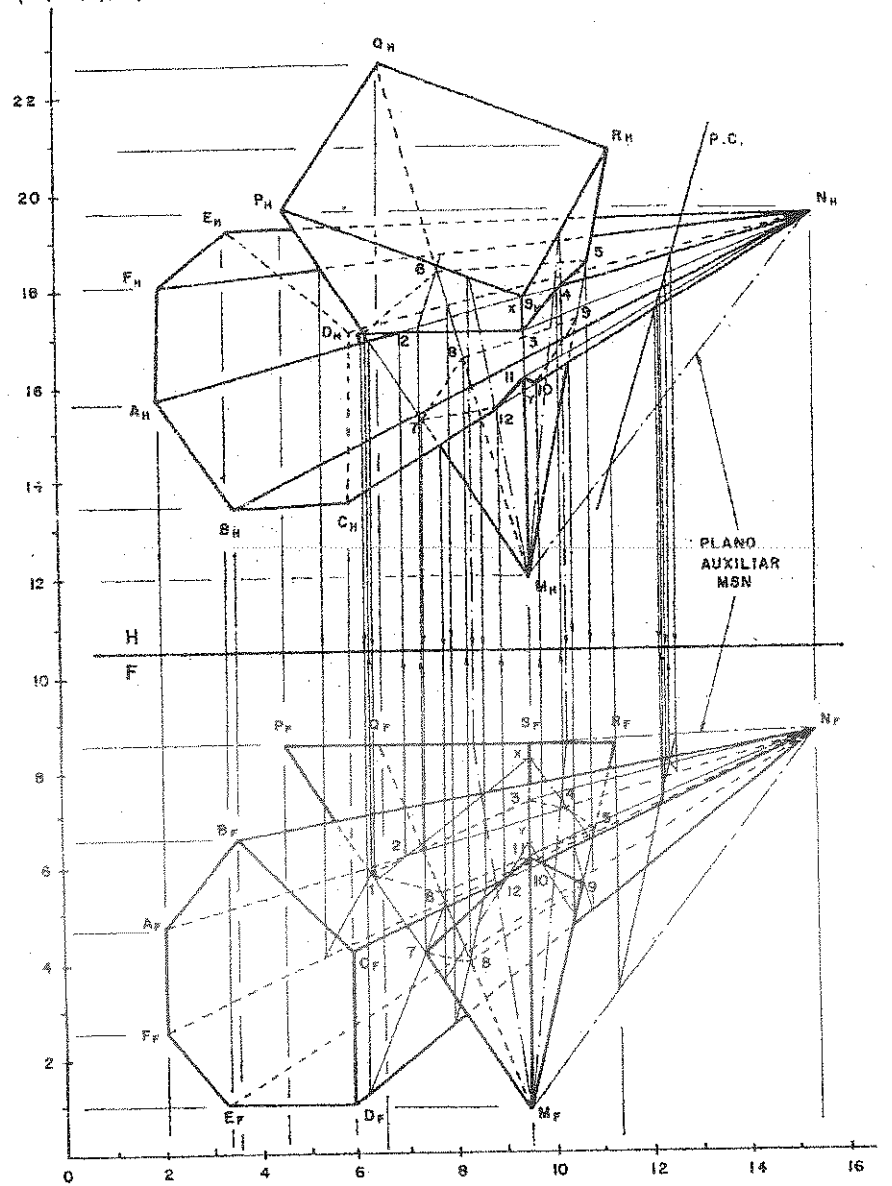
SOLUCIÓN 13.21:



PROBLEMA 13.22: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide hexagonal ortofrontal V-OPQRST, cuando este poliedro es interceptado por el prisma ABCD–A'B'C'D', siendo AA' una arista lateral de este prisma. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. Designar a la base de la Pirámide en sentido horario en el plano horizontal. V(9,10,12), O(9,1,23.5), P(13,?,24.5), Q(15,?,23.5), R(18,4,20), S(15,?,19), T(11,?,20.5); A(4.5,6.5,21), B(1,4,19), C(4.5,1.5,16), D(8,4.5,18.5); A'(18,10,17.5)



PROBLEMA 13.22: Determinar la intersección y visibilidad de la Pirámide de base rectángular **M-PQRS** donde **PQ** y **QR** son paralelas a RS y PS respectivamente, cuando este poliedro es interceptado por la pirámide **N–ABCDEF**. Mostrar completamente la visibilidad, hacer tabla de visibilidad. No utilizar vistas auxiliares. **M(9.5,1,12), P(4.5,8.5,19.5), Q(6.5,8.5,22.5), R(11.5,8.5,21), S(15,8.5,?); A(2,4.5,15.5), B(3.5,6.5,13.5), C(6,4,13.5), D(6,1,17, E(3.5,1,19); N(15.5,8.5,19.5)**



GEOMETRIA DESCRIPTIVA		INTERSECCIÓN DE POLIEDROS	PAG.
VICTOR VIDAL B.	CAPITULO: 13		470

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 13.1: ABC es la base superior de un prisma recto de 7 cm de altura. RST es la base derecha de un prisma recto Horizontal y TL es una de sus aristas laterales. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad.
A(3, 9.5, 13), B(5.5, 9.5, 16), C(8, 9.5,14) R(9.5, 8, 14.5) S(9, 4, ?) T(8, 6, 11.5) L(2, 6, 14).

PROBLEMA 13.2: AD es una diagonal de un hexágono regular frontal base frontal de un prisma recto de 7.5cm de altura. JKL es la base izquierda de un prisma horizontal que tiene KP por una arista lateral. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad.
A(13, 6, 11.5) D(16.5, 2.5, 11.5) J(10, 7.5, 14.5) K(11.5, 4.5, 12) L(10, 2.5, 13.5) P(19.5, 4.5, 16)

PROBLEMA 13.3: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal base superior de un prisma recto de 6cm de altura. JKL es la base de un prisma frontal, una de cuyas aristas laterales es LM. Hallar la intersección de los poliedros, mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad. A(5, 9, 15) C(10, 9, 14) J(11.5, 9, 16.5) K(13, 5.5, 14.5) L(11.5, 7, 13) M(1, 4, 13)

PROBLEMA 13.4: AC es una diagonal de un cuadrado frontal, base frontal de un prisma recto de 6cm de altura. RST es una base de un prisma que tiene SK como una arista lateral. Hallar la intersección de los poliedros, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(4.5, 6, 11.5) C(11, 4, 11.5)
R(13, 8, 16.5) S(14, 4, 14) T(11.5, 6, 13) K(4, 2.5, 14).

PROBLEMA 13.5: ABCD es una base superior de un prisma recto de 7.5cm. JKL es una base de un prisma que tiene en KS como una arista lateral. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad.
A(5, 10, 15) B(6, 10, 18) C(10, 10, 16.5) D(7.5, 10, 13)
J(11.5, 9.5, 15) K(13, 7.5, 17) L(14, 5.5, 12) S(2.5, 5.5, 17)

PROBLEMA 13.6: JK es el eje de un prisma recto y AB es una diagonal de una de sus bases cuadradas. EF es una diagonal de un cuadrado frontal, base frontal de otro prisma de 6cm de altura. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. J(10, 9, 5) K(2.5, 4, 15) A(9, 11, 15) B(11.5, 7, 15)
E(3, 7.5, 12) F(9.5, 7.5, 12)

PROBLEMA 13.7: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal base inferior de un prisma recto de 7.5cm de altura. JK es el eje de un prisma recto de base cuadrada. Las diagonales de su base miden 5cm, una diagonal de cada base es horizontal y la otra es frontal. Hallar la intersección de los poliedros, mostrar la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
A(6,2.5, 18) C(9, 2.5, 13) J(2.5, 5, 14) K(13, 7.5, 14)

PROBLEMA 13.8: ABC es la base superior de un prisma recto de 7.5cm de altura. JKL es una base de un prisma recto y JM es una de sus aristas laterales, hallar la intersección de los poliedros, mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad. A(11.5, 10, 14) B(14, 10, 18) C(16.5, 10, 15); J(10, 7.5, 16.5) K(11, 9.5, 14.5) L(9.5, 5.5, 13.5) M(18, 5, 16.5)

PROBLEMA 13.9: DEF es una base frontal de un prisma recto de 7.5cm de altura. RST es una base de otro prisma recto una de cuyas aristas laterales es RJ. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad.
D(5, 2.5, 13) E(7.5, 7, 13) F(10, 4, 13); R(13, 6, 16.5) S(12, 3, ?) T(11.5, 5, ?) J(4, 6, 20)

PROBLEMA 13.10: JKL es una base superior de un prisma recto de 6cm de altura. PQR es una base de otro prisma recto y PA es una de sus aristas laterales. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad.
J(7.5, 9, 18) K(14, 9, 16) L(10. 9. 13); D(5, 7.5, 15) Q(6, 5, ?) R(6, 4, ?) A(15, 7.5, 19)

PROBLEMA 13.11: ABCD y EFGH son las bases de un prisma y RST y UVX son las bases de otro prisma. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(5, 2, 14.5), B(6, 2, 17.5), C(8, 2, 13), D(9.5, 2, 16);
E(5, 10, 14.5), F(6, 10, 17.5), G(8, 10, 13), H(9.5, 10, 16);
R(2.5, 3, 15.5), S(2. 5, 10.5), T(4.5, 8, 13.5), U(10.5, 4.5, 17.5), V(10, 6, 13), X(12.5, 9, 15.5).

PROBLEMA 13.12: ABC es la base de una pirámide cuyo vértice es V. RST es una base de un prisma y SJ es una de sus aristas laterales. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad. A(13, 10, 18), B(11, 2.5, 18),
C(5, 7.5, 18), V(9.5, 7, 11.5), R(15, 7.5, 18) S(14, 5, 15) T(14, 4, 16.5) J(4, 7, 13)

PROBLEMA 13.13: AD es una de las aristas laterales de un prisma oblicuo y ABC es una de sus bases JR es una arista lateral de otro prisma que tiene a JXL como una base. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad.
A(10, 7.5, 17.5), D(15, 1, 12), B(9, 7.5, 15), C(5, 7.5, 15);
J(12.5, 7, 17.5), R(5, 5, 12.5), K(15, 5, 14), L(14, 3, 15.5)

PROBLEMA 13.14: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal base de una pirámide recta de 5.5cm de altura. GE es una diagonal de un cuadrado orto frontal base de una pirámide recta cuyo vértice es J. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad. A(7.5, 2.5, 17.5) C(7.5, 2.5, 10) G(10.5, 6, 11.5) E(10.5, 6, 17.5) J(5.5, 2.5, 14.5)

PROBLEMA 13.15: V es el vértice de una pirámide cuya base es ABC, RST es la base de un prisma y TU es una de sus aristas laterales. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad. V(9, 6, 11.5), A(6, 10, 17.5),
B(13, 6, 17.5), C(6, 2.5, 17.5); R(4.5, 8, 16.5) S(5, 7, 17.5) T(4, 5, 15) U(12, 5, 12.5).

PROBLEMA 13.16: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal, base de una pirámide recta de 5.5 cm de altura. LM es una arista lateral de un prisma y JK es una de sus bases. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
A(7.5,2.5,10), C(12.5,2.5,17.5), L(15,6,12.5), M(5,6,15), J(15.5,4,15), K(14.5,5,10)

PROBLEMA 13.17: AD es una diagonal de un hexágono regular horizontal, base de una pirámide recta de 6cm de altura. GHJ es una base de un prisma y GK es una de sus aristas laterales. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(6,2.5,14) D(14,2.5,14) G(14,4.5,17) H(15.5,3,13) J(14.5,6,15.5) K(5,4.5,12.5)

PROBLEMA 13.18: AD es una diagonal de un hexágono regular horizontal, base de una pirámide recta de 6cm de altura. V es el vértice y RST es la base de otra pirámide. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad.
A(6,2.5,14), D(14,2.5,14). V(6,5.5,15.5) R(14.5,7.5,16.5) S(15,2.5,12.5) T(13,5.5,10)

PROBLEMA 13.19: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal base de una pirámide recta con vértice V. J es el vértice de una pirámide oblicua con base RST. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
A(5,1,14), C(12.5,1,16.5), V(9,9,15),
J(15,2.5,14) R(2.5,2.5,11.5) S(4,7.5,14) T(5.5,5,17.5)

PROBLEMA 13.20: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal base de una pirámide recta con vértice V. R es el vértice de otra pirámide con base PQN. Hallar la intersección con los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
A(4,1,14), C(11.5,1,16.5); V(7.5,9,15), R(5,2.5,14), P(10,9,19), Q(12.5,2.5,15), N(11.5,5.5,12.5)

PROBLEMA 13.21: V es el vértice de una pirámide recta y C es una esquina de su base frontal la cual es un pentágono regular. JM es una arista lateral de un prisma que tiene a JKL como una base. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.V(7.5,6,12.5), C(12.5,6,17.5),
J(12.5,10.5,14.5), M(0.5,4,17.5), K(14,9.5,15.5), L(13,8,13)

PROBLEMA 13.22: V es el vértice de una pirámide con la base RST. ABC y DEF son las bases de dos prismas oblicuas. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer tabla de visibilidad. V(8,4,12.5), R(4,2.5,17.5), S(9,8,17.5), T(12.5,1,17.5);
A(2.5,4,16.5), D(4,6,15), C(5,5,14), D(12.5,2.5,19), E(14,5,17.5), F(15,4,16.5)

PROBLEMA 13.23: AC es una diagonal de un cuadrado horizontal base de una pirámide recta con vértice V RST y JKL son los extremos de un prisma. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(7.5,1,19), C(10,1,11.5), V(9,9,15); R(2.5,5,16.5), S(5,4,17.5), T(2.5,1,15), J(12.5,6,14), K(15.5,15), L(12.5,2.5,12.5)

PROBLEMA 13.24: AD es una diagonal de un hexágono frontal, base de una pirámide recta con vértice V JKL y PQR son los extremos del prisma. Hallar la intersección de los poliedros. Hacer la tabla de visibilidad. A(5,2,17.5), D(10,8,17.5), V(7.5,5,11.5), J(13.5,9.5,17.5), K (14,7.5,15), L(14,5.5,16.5), P(2.5,5.5,15), Q(4,4,12.5), R(4,2,14)

PROBLEMA 13.25: ABC y DEF son las bases de un prisma oblicuo. JKL y LST son las bases de otro prisma oblicuo. Hallar la intersección de los poliedros. Hacer la tabla de visibilidad. A(2.5,7.5,12.5), B(5.5,7.5,12.5), C (7.5,7.5,10), D(9,0.5,19), E(12,0.5,19), F(14,0.5,16.5) J(2.5,1,17.5), K(7.5,1,20), L(5.5,1,16.5), R(9.5,7.5,10), S(14.5,7.5,12.5), T(12.5,7.5,9)

PROBLEMA 13.26: RSTU y JKLM son las bases de un prisma recto y la pirámide ABCDE. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. R(3.5,7,13), S(5,7,15), T(7.5,7,12.5), U(6,7,11), J(3.5,2,13), K(5,2,15), L(7.5,2,12.5), M(6,2,11), A(2,4.5,13), B(6,5,12), C(1.5,8.5,16), D(10,7,13), E(10,3,9)

PROBLEMA 13.27: P es el vértice de una pirámide y JKL es su base. ABC es una base de un prisma y AD es una de sus aristas laterales Hallar la intersección de los poliedros, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. P(10,4,10), J(5,2.5,17.5) K(12.5,9,17.5) L(15,1,17.5); A(2.5,5,11.5) B(2.5,7.5,14) C(5,9,10.5) D(16.5,0.5,17.5)

PROBLEMA 13.28: AD es una diagonal de un hexágono regular horizontal base horizontal de un prisma recto truncado a 45° en la base superior y de 7.5 cm de altura. JKL es la base derecha de un prisma que es frontal y que tiene KP por una arista lateral. Hallar la intersección de los poliedros mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(9,9.5,17.5), D(4,?,16), J(11,6.5,13), K(9.5,9,16.5), L(11,8,18.5), P(1.5,5.5,16.5)

PROBLEMA 13.29: Dado el Prisma ABCDEF – A'B'C'D'E'F' interceptarlo con el Prisma vertical MNOPQ – M'N'O'P'Q' de 8 cm de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. A(2,5,18), B(2,7,16), C(2,8,14), D(2,6,12), E(2,4,12), F(2,3,15), A'(11,5,18); M(3,9,17), N(7,9,17.5), O(10,9,15), P(5,9,11), Q(5,9,14.5)

PROBLEMA 13.30: Dado el Prisma RSTU – R'S'T'U' de bases horizontales de 9 cm. de altura y RR' es una de sus aristas laterales, interceptarlo con el Prisma recto ABCD – A'B'C'D' siendo AA' una de sus aristas laterales. Mostrar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. R(5.5,10.18), S(7.5,10,19.5), T(11.5,10,18), R'(5.5,1,13); A(3.5,6,17), B(4.5,9,15.5), C(2,8,13.5), D(1,5,15); A'(14.5,3.5,17)

PROBLEMA 13.31: Dado el Prisma ABCD – A'B'C'D' de bases normales interceptarlo con el Prisma vertical PQRST – P'Q'R'S'T' de 9 cm de altura. Mostrar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. A(1.5,6,15.5), B(3, - ,18.5), C(5,2,17), D(5.5, - ,13); A'(12,9.5,15.5); P(5.5,10,16), Q(9,10,18), R(11,10,15), S(9,10,12.5), T(6.5,10,12.5)

PROBLEMA 13.32: Dado el Prisma ABCDEF – A'B'C'D'E'F' interceptarlo con el Prisma vertical MNOPQ de 8.5 cm. de altura. Determinar la intersección. Mostrar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares.
A(2,5.5,17.5), B(2,8,16), C(2,9,13.5), D(2,7,12.5), E(2,5,12.5), F(2,4,14.5), A'(11,5.5,17.5); M(4,11,16.5), N(7,11,17.5), O(9.5,11,15), (5.5,11,12.5), Q(5.5,11,13.5)

PROBLEMA 13.33: Dado el Prisma ABCDEF–A'B'C'D'E'F' interceptarlo con el Prisma vertical MNOPQ–M'N'O'P'Q' de 18 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. A(3,11,35)u, B(3,16,32)u, C(3,18,35)u, D(3,14,25)u, E(3,10,25)u, F(3,8,29)u, A'(22,11,35)u; M(8,22,33)u, N(14,22,35)u, O(19,22,30)u, P(17,22,25)u, Q(11,22,27)u

PROBLEMA 13.34: Dado el Prisma ABCDEFG – A'B'C'D'E'F'G' interceptarlo con el Prisma vertical MNOPQRS – M'N'O'P'Q'R'S' de 18 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. A(3,11,36)u, B(3,14,38)u, C(3,18,35)u, D(3,19,31)u, E(3,15,26)u, F(3,9,29)u, G(3,12,36)u A'(22,11,36)u; M(14,22,37)u, N(19,22,33)u, O(19,22,29)u, P(10,22,26)u, Q(10,22,29)u, R(6,22,33)u, S(6,22,36)u.

PROBLEMA 13.35: Dado el Prisma ABCDEFG – A'B'C'D'E'F'G' interceptarlo con el Prisma vertical MNOPQR – M'N'O'P'Q'R' de 18 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. A(3,7,34)u, B(3,9,38)u, C(3,13,40)u, D(3,19,32)u, E(3,17,28)u, F(3,15,26)u, G(3,11,26)u, A'(22,7,34)u; M(14,22,40)u, N(19,22,34)u, O(11,22,26)u, P(11,22,30)u, Q(6,22,32)u, R(6,22,38)u.

PROBLEMA 13.36: Dado el Prisma JKLM – J'K'L'M' de bases frontales y JJ' es una de sus aristas laterales, interceptarlo con el Prisma recto ABCD – A'B'C'D' siendo AA' una de sus aristas laterales. Mostrar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. J(15,20.38)u, K(22,17,38)u, L(18,14,38)u, M(11,17,38)u, J'(15,8,27)u; A(6,15,31)u, B(8,8,31)u, C(4,9,34)u, D(1,12,29); A'(28,15,27)

PROBLEMA 13.37: Dado el Prisma ABCDEF – A'B'C'D'E'F' interceptarlo con el Prisma vertical MNOPQ–M'N'O'P'Q' de 8 cm. de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares.
A(2,5,18), B(2,7,16), C(2,8,14), D(2,6,12), E(2,4,13), F(2,3,15),
A'(11,5,18); M(3,9,17), N(7,9,19), O(10,9,16), P(5,9,11), Q(5,9,14.5)

PROBLEMA 13.38: Dado el Prisma ABCDEF – A'B'C'D'E'F' interceptarlo con el Prisma vertical MNOPQ de 8 cm. de altura. Determinar la intersección. Mostrar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares.
A(2,5.5,18), B(2,8,17), C(2,9,14), D(2,7,13), E(2,5,12),
F(2,4,15), A'(11,5,18); M(3,9,16.5), N(7,9,19), O(10,9,19), P(5,9,11), Q(5,11,14.5)

PROBLEMA 13.39: Dado el Prisma **ABCD – A'B'C'D'** de bases normales interceptarlo con el Prisma vertical **PQRSTU–P'Q'R'S'T'U'** de 9 cm de altura. Mostrar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares.
A(1.5,6,15.5), B(3, - ,18.5), C(5,2,17), D(5.5, - ,13)
A'(12,9.5,15.5); P(5.5,10,16), Q(9,10,19.5), R(11,10,17), S(11,10,14), T(9,10,12.5), T(6.5,10,12.5)

PROBLEMA 13.40: Dado el Prisma **ABCDEF–A'B'C'D'E'F'** interceptarlo con el Prisma vertical **MNOPQ–M'N'O'P'Q'** de 18 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares.
A(3,11,35)u, B(3,16,32)u, C(3,18,27)u, D(3,14,25)u, E(3,10,25)u,
F(3,8,29)u, A'(22,11,35)u; M(8,22,33)u, N(14,22,35)u, O(19,22,30)u, P(11,22,25)u, Q(11,22,27)u

PROBLEMA 13.41: ABCD es la base superior de un Prisma recto de 18 unidades de altura. **MNOP** es la base derecha de un Prisma Oblicuo y **NN'** es una de sus aristas laterales. Hallar la intersección de los poliedros mostrando la visibilidad. Hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. **A(8,24,31)u, B(16,24,34)u, C(12,24,40)u, D(4,24,37)u;**
M(17,13,35)u, N(17,16,32)u, O(17,9,28)u, P(17,6,30)u; N'(3,20,40)u

PROBLEMA 13.42: Dado el Prisma **ABCDEF–A'B'C'D'E'F'** interceptarlo con el Prisma vertical **MNOPQ–M'N'O'P'Q'** de 18 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares.
A(3,11,35)u, B(3,16,32)u, C(3,18,35)u, D(3,14,25)u, E(3,10,28)u,
F(3,8,30)u, A'(22,11,35)u; M(8,22,33)u, N(14,22,37)u, O(19,22,30)u, P(17,22,24)u, Q(11,22,28)u

PROBLEMA 13.43: Dado el Prisma **ABCDEFG–A'B'C'D'E'F'G'** interceptarlo con el Prisma vertical **MNOPQRS–M'N'O'P'Q'R'S'** de 18 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. **A(3,11,36)u, B(3,14,38)u, C(3,18,35)u, D(3,19,31)u, E(3,15,26)u, F(3,9,29)u, G(3,12,36)u A'(22,10,38)u; M(14,22,40)u, N(19,22,35)u, O(19,22,30)u, P(10,22,26)u, Q(10,22,29)u, R(6,22,33)u, S(6,22,36)u.**

PROBLEMA 13.44: Dado el Prisma **ABC–A'B'C'** interceptarlo con el Prisma vertical **MNOP–M'N'O'P'** de 15 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. **A(3,12,31)u, B(4,15,27)u, C(3,9,24)u,**
A'(23,6,25)u, M(6,17,28)u, N(7,17,30)u, O(17,17,24)u, P(11,17,21)u.

PROBLEMA 13.45: Dado el Prisma **ABCDEFG–A'B'C'D'E'F'G'** interceptarlo con el Prisma vertical **MNOPQRS–M'N'O'P'Q'R'S'** de 18 unidades de altura. Determinar la visibilidad de la intersección y hacer la Tabla de procedimiento. Resolver sin vistas auxiliares. **A'(22,7,34)u; A(3,11,34)u, B(3,14,38)u, C(3,13,40)u, D(3,19,32)u, E(3,13,30)u, F(3,15,29)u, G(3,11,28)u, M(14,22,41)u, N(19,22,37)u, O(19,22,30)u, P(11,22,26)u, Q(11,22,30)u, R(6,22,33)u, S(6,22,39)u.**

CAPÍTULO 14

INTERSECCION DE SUPERFICIES

14.1 INTRODUCCIÓN.

Cuando dos superficies se cortan, lo hacen por una recta común a las dos que se conoce con el nombre de línea de intersección. Las intersecciones son comunes en la práctica y es necesario que el ingeniero sepa determinar con exactitud cualquier caso; tal como se observa en la figura **14.1**.

Las intersecciones comunes que se presentan, son tales como dos tuberías, la proa de un barco y el ala de un avión con su fuselaje. De dos superficies solamente una corta a la otra.

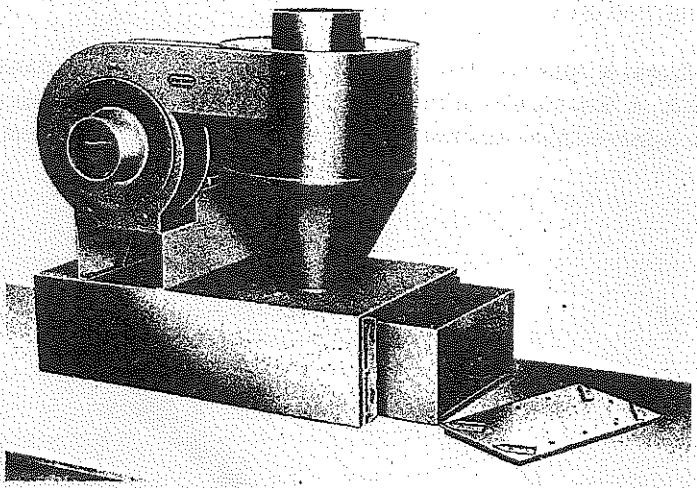


Fig. 14.1 Intersección de Superficies: Cono, Cilindro y Prisma.

14.2 MÉTODOS PARA HALLAR LA INTERSECCIÓN.

14.2.1 MÉTODO DEL PLANO CORTANTE.

Cuando los planos cortantes seleccionados que se usan, se presentan en forma oblicua, verticales o de perfil, que cortan a ambas superficies según las generatrices de estas, ver la figura **14.2**.

La intersección de la generatriz de una superficie con la generatriz de la otra pertenece a la línea de intersección.

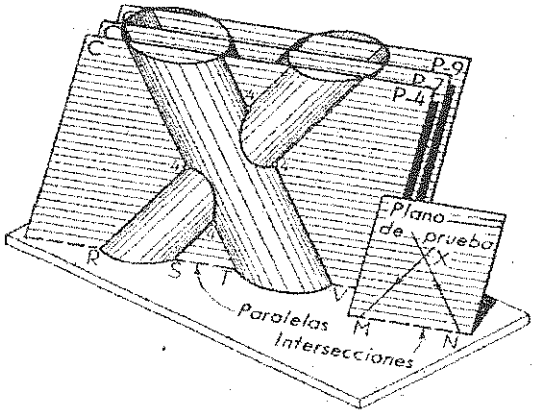


Fig. 14.2 Método del Plano Cortante.

14.2.2 MÉTODO DEL CILINDRO CORTANTE.

Cuando se trazan una serie de cilindros cortantes cuyo eje debe ser paralelo al eje del cilindro dado, de modo que ellos se interceptan en líneas rectas que serán generatrices de ambos. El cilindro cortante corta una superficie en un círculo, tal como se observa en la figura 14.3.

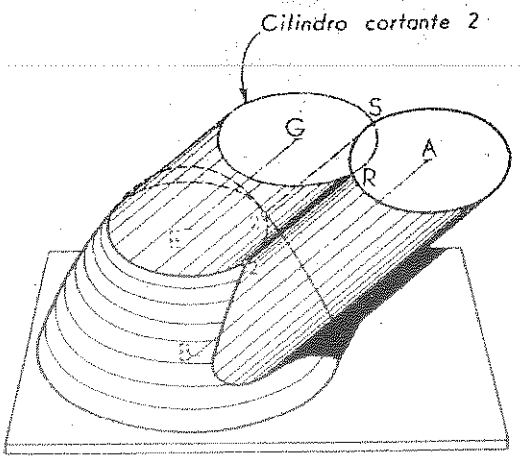


Fig. 14.3 Método del Cilindro Cortante.

14.2.3 MÉTODO DE LA ESFERA CORTANTE.

Consiste en trazar una serie de esferas cortantes cuyo centro está situado en el cruce de los ejes de estas dos superficies, que nos permite encontrar la intersección. La esfera cortante corta en círculos ambas superficies y el corte de estos determinan puntos de la intersección.

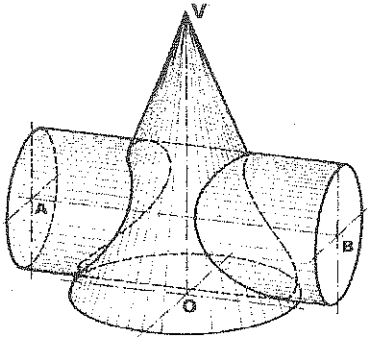


Fig. 14.4 Método de la Esfera Cortante.

14.3 REGLAS DE VISIBILIDAD.

Antes de aplicar estas reglas de visibilidad de rectas, generatrices, aristas o de las superficies planas, debemos aplicar correctamente sus reglas; pero teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Hallar la visibilidad de las superficies a interceptar, utilizando las reglas del **capitulo 2;** antes de aplicar la presente regla de visibilidad.
2. Considerar al signo (+) como visible y el signo (-) como invisible.
3. No se aplica la regla de los signos.

A continuación enunciamos las reglas de visibilidad de los puntos de intersección:

1. Si son visibles dos generatrices que se interceptan, su punto de intersección es visible.
2. De dos generatrices que se interceptan, una o ambas están ocultas, el punto de intersección es invisible.
3. Si dos círculos o sus porciones que se interceptan son visibles, el punto de intersección es visible.
4. De dos círculos o sus porciones que se interceptan, una o ambas están ocultas, el punto de intersección es invisible.

14.4 INTERSECCIÓN DE DOS CONOS.

14.4.1 INTERSECCIÓN DE DOS CONOS CIRCULARES, DE BASES PARALELAS.

La intersección entre dos conos circulares, deben cortarse por una serie de planos cortantes paralelos a ambas bases, que cortará a cada uno de los conos en una serie de círculos, cuya intersección de cada par de círculos determinan los puntos de intersección.

En la figura **14.5** se dan las vistas horizontal y frontal de dos conos circulares rectos con vértices en **V** y **T**; se desea encontrar la línea de intersección y visibilidad de ambas superficies.

PROCEDIMIENTO:

1. Para determinar los puntos de intersección más alto y más bajo se usa un plano cortante vertical que pase por los vértices de los dos conos, y corta a estas superficies en las generatrices **aV, cV, bT** y **dT**.
2. La intersección de las generatrices **cV** con **dT**, y **aV** con **bT** determinan los puntos 1 y 5 respectivamente.
3. Como las bases de los dos conos son horizontales, se pasan una serie de planos cortantes horizontales que corte los conos en la vista frontal; lo cual nos permitirá localizar los demás puntos de intersección. Por ejemplo **H2** corta a los dos conos según dos círculos marcados con **2** en la vista horizontal, su intersección determina los puntos **2** y **8** comunes a ambos conos.
4. La visibilidad de cada punto depende de la que tengan dos círculos que se interceptan. Aplicar las reglas de visibilidad estudiadas en el artículo **14.3**.

TABLA DE VISIBILIDAD

CONO V		CONO T		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F
+	+	-	+	1	-	+
+	+	-	+	2	-	+
+	+	-	+	3	-	+
+	+	-	-	4	-	-
+	-	-	-	5	-	-
+	-	-	-	6	-	-
+	-	-	-	7	-	-
+	+	-	-	8	-	-

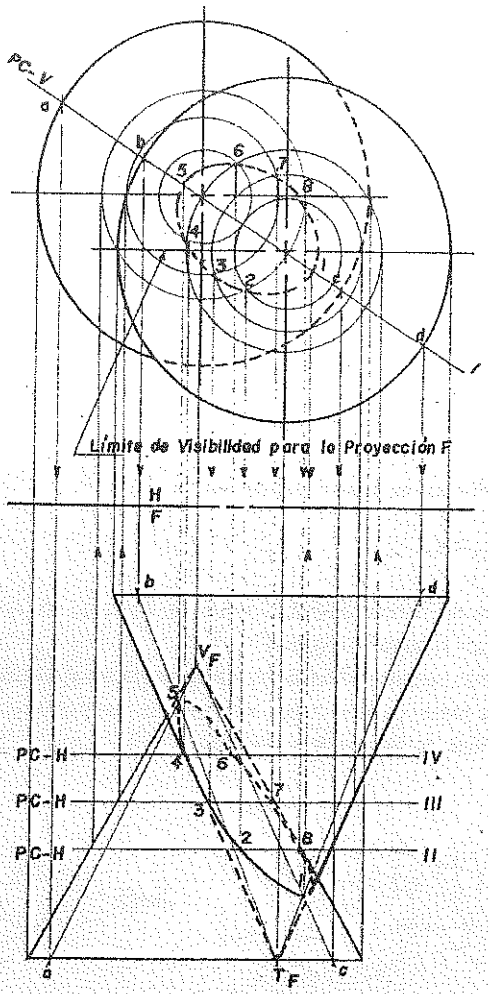


Fig. 14.5 Intersección de dos conos de bases circulares paralelas.

14.4.2 TIPOS DE INTERSECCIONES Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Cuando un cono intercepta a otro cono, todos los planos de corte se articulan desde el punto de articulación, que se obtiene en la intersección de la línea de vértices con el plano de base de ambas superficies.

Se debe tener en cuenta que a partir del sistema de numeración se puede predecir qué tipo de líneas de intersección resultarán.

Las reglas para el sistema de numeración son las siguientes:

1. Puede elegirse cualquiera de las dos bases, y cualquier punto tangente o secante en la base puede recibir la designación de punto 1.
2. Se numeran entonces consecutivamente los puntos en la base elegida, ya sea en el sentido horario o anti horario, y la progresión no debe continuar más allá de un plano secante limitante.
3. Cuando se llega a un plano secante limitante se invierte la dirección, dejando solamente un número en el punto secante. Se continúa este procedimiento hasta que todos los puntos de la base tengan dos números, excepto los puntos secantes de los planos limitantes.
4. En la otra base, se asignan los números 1 y 2 a las mismas líneas que los puntos 1 y 2 de la primera base.
5. Habiéndose establecido así la dirección de progresión, se siguen las reglas (2) y (3) hasta que todos los puntos de base de la segunda base tengan dos números, salvo los puntos secantes de los planos limitantes.

Se presentan los siguientes tipos de intersecciones:

14.4.2.1 MORDEDURA.

Cuando la introducción es parcial de uno de los conos con respecto al otro y la línea de intersección será una línea curva continua.

Se numeran consecutivamente los puntos tangentes y secantes definidos por los planos de corte en ambas bases, de acuerdo con el sistema de numeración establecido. En la figura 14.6 se muestra un ejemplo de sistema de numeración.

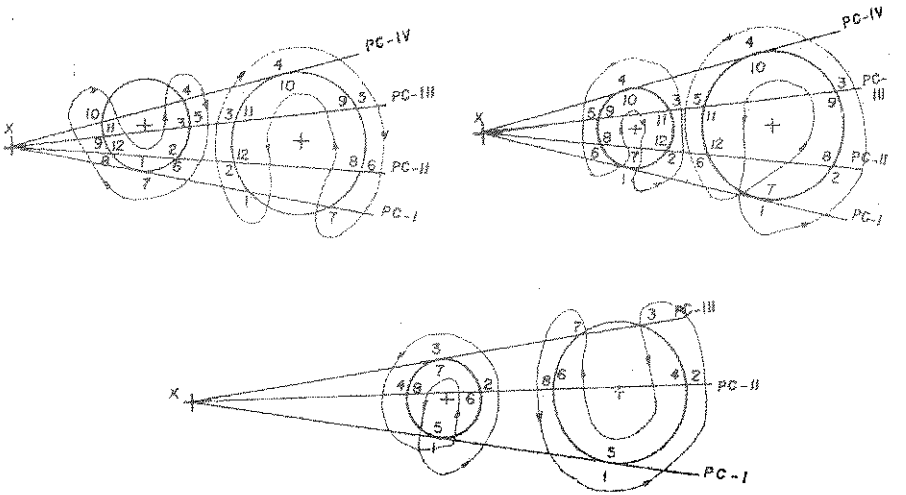


Fig. 14.6 Intersección por mordedura.

14.4.2.2 PENETRACIÓN.

Cuando uno de los conos está introducido totalmente en el otro, formándose dos curvas separadas de intersección. En la figura **14.7** se muestra un ejemplo, en el cual se numeran consecutivamente los puntos tangentes y secantes definidos por los planos de corte en ambas bases, de acuerdo con el sistema de numeración establecido.

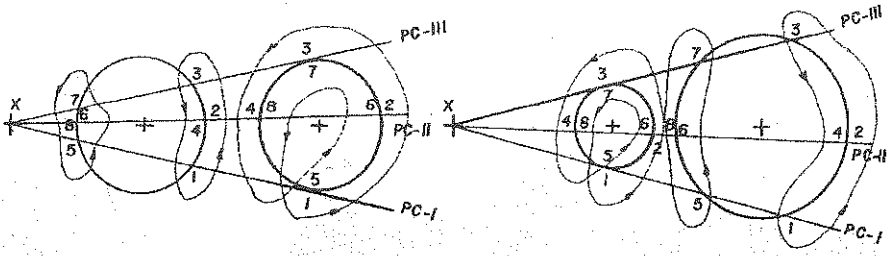


Fig. 14.7 Intersección por penetración.

14.4.3 INTERSECCIÓN DE DOS CONOS CUYAS BASES ESTÁN EN EL MISMO PLANO HORIZONTAL.

La determinación de la figura de intersección de dos conos oblicuos consiste, en ubicar la línea que pasa a través de los dos vértices, es común a todos los planos cortantes y ubica en el plano de las bases, el punto X de articulación del cual emanan las líneas secantes o tangentes. La intersección de estas generatrices rectilíneas determina puntos comunes a ambos conos.

En la figura **14.8** se ilustra dos conos que se interceptan, cuyos vértices son V y P respectivamente.

La recta que pasa a través de los dos vértices es común a todos los planos de corte y determina, en el plano de las bases, el punto X (línea de vértices o recta de articulación) del cual emanan las líneas secantes o tangentes.

Si la línea de los vértices es paralela al plano de la base, entonces el punto X se encontrará en el infinito, y los planos cortantes serán todas paralelas con esa línea de los vértices.

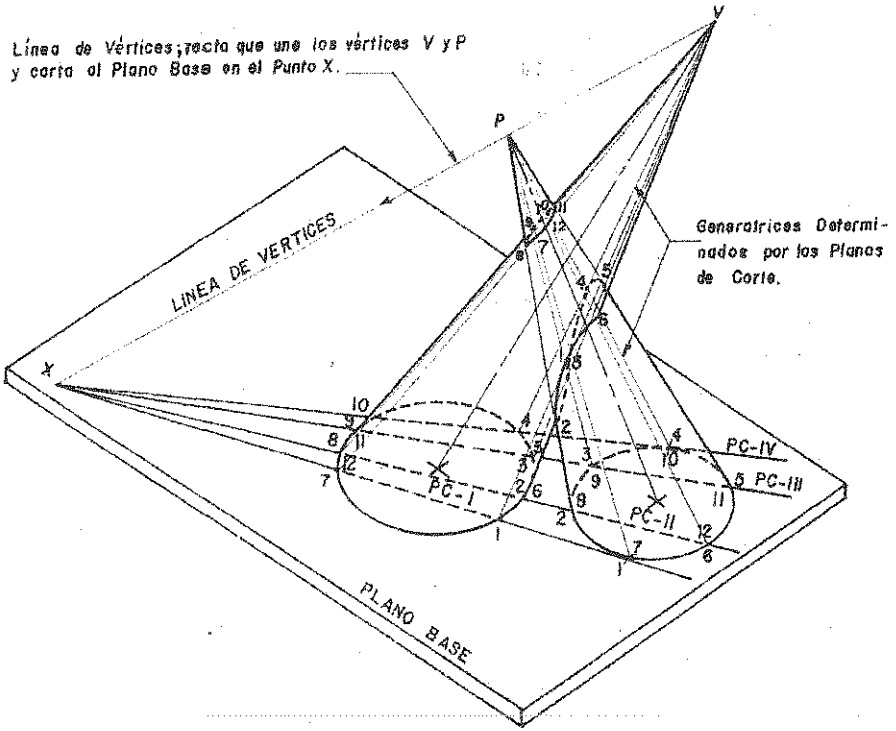


Fig. 14.8 Intersección de dos conos.

En la figura 14.9 se dan las vistas horizontal y frontal de dos conos oblicuos cuyos vértices son V y P y cuyas bases son circulos horizontales, se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.

PROCEDIMIENTO:

1. En la vista frontal, desde el vértice V se traza una línea recta que pase por el vértice P, que se prolonga hasta cortar al plano de las bases en el punto X.
2. Luego proyectar el punto X a la vista horizontal y en la intersección de la recta que parte desde el vértice V y que pasa por el vértice P determinan la proyección horizontal del punto X.
3. Desde el punto X se trazan los necesarios planos cortantes tangentes o secantes a las bases de los sólidos, se aplican las reglas del sistema de numeración que nos predice el tipo de intersección a resultar. Por ejemplo el PCI define los puntos 1,7 y que al interceptarse con generatrices del mismo número determinan los puntos de intersección buscados.

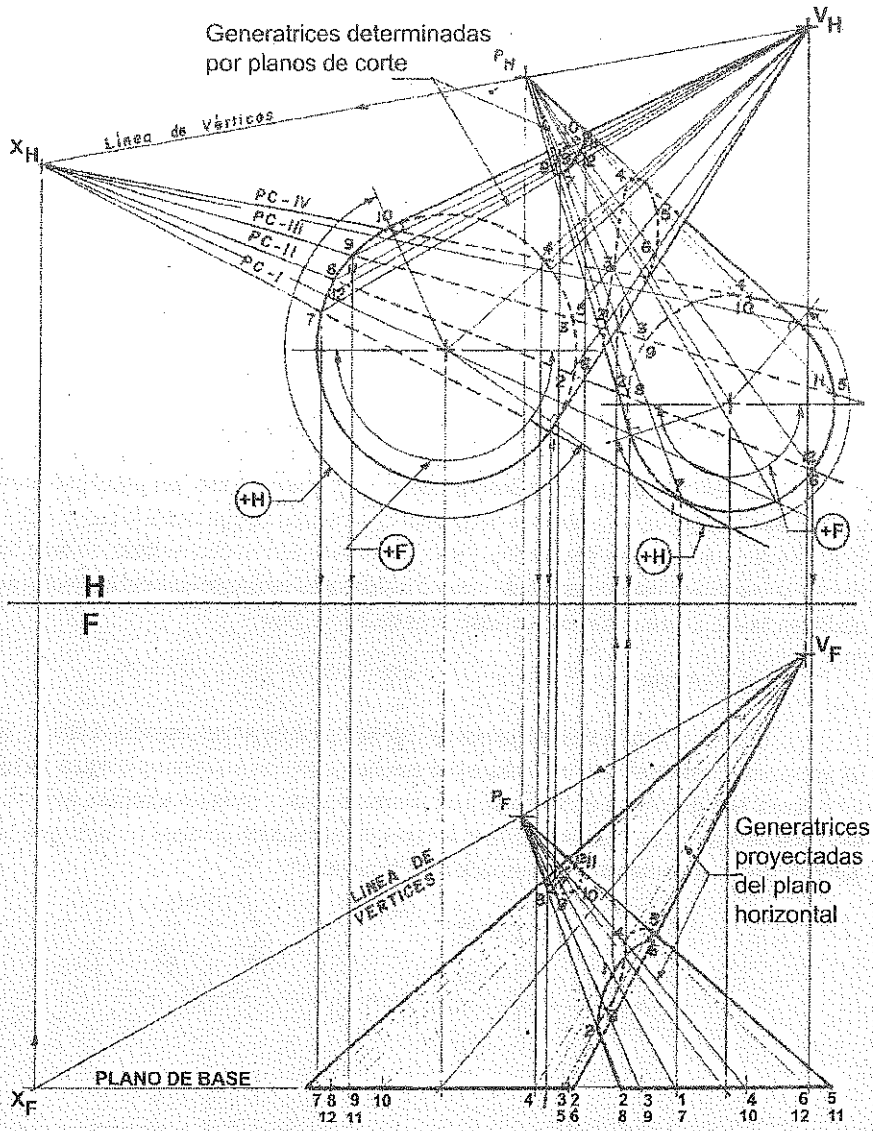


Fig. 14.9 Intersección de dos conos con bases en el mismo plano.

TABLA DE VISIBILIDAD

CONO V		CONO P		INT	VIS		CONO V		CONO P		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
+	+	+	+	1	+	+	+	-	+	+	7	+	-
-	+	-	-	2	-	-	+	-	-	-	8	-	-
-	-	-	-	3	-	-	+	-	-	-	9	-	-
-	-	-	-	4	-	-	+	-	-	-	10	-	-
-	-	+	+	5	-	-	+	-	+	+	11	+	-
-	+	+	+	6	-	+	+	-	+	+	12	+	-

14.5 INTERSECCIÓN DE DOS CILINDROS.

14.5.1 INTERSECCIÓN DE DOS CILINDROS RECTOS.

14.5.1.1 TIPOS DE INTERSECCIONES Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Los tipos más comunes de intersecciones que frecuentemente son encontrados en la práctica, es necesario que el estudiante la conozca de antemano ya que facilita la construcción de la curva que ha de tener esa intersección. Para el sistema de numeración a utilizar, se debe tener en cuenta que puede predecir el tipo de curva a resultar y es necesario conocer las reglas estudiadas en **14.4.2.** Se presentan los siguientes tipos de intersecciones:

1. MORDEDURA.

Cuando la introducción es parcial de uno de los cilindros con respecto al otro, la línea de intersección resultante será una línea curva continua, como se muestra en la figura **14.10(a).** En la figura **14.6 (b)** los dos cilindros son mutuamente tangentes en la parte común, teniendo en esa parte un mismo plano tangente; siendo la curva de intersección continua y cruzándose en el punto de tangencia, formándose una especie de número ocho.

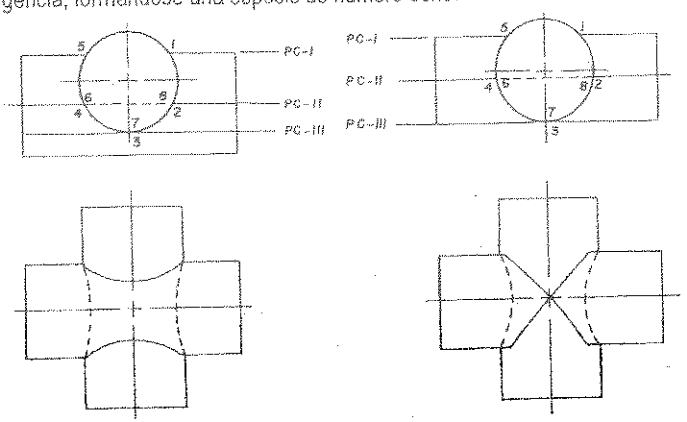
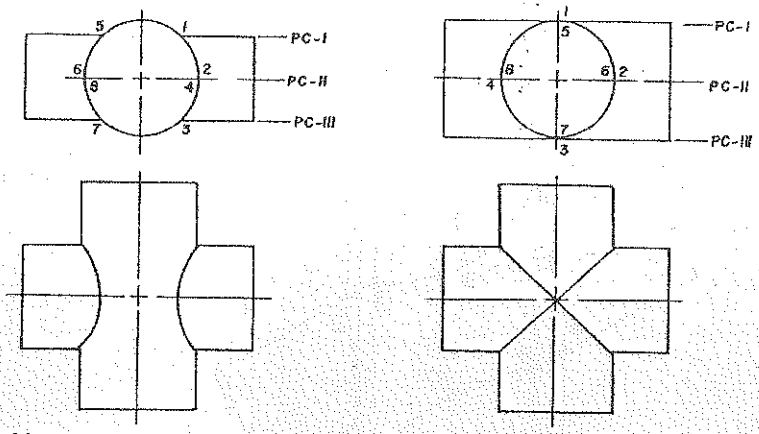


Fig. 14.10 Intersección por mordedura.

2. PENETRACIÓN.

Cuando el cilindro horizontal más pequeño atraviesa al cilindro vertical, formándose de ese modo dos curvas separadas de intersección, como se muestra en la figura **14.11(a)**. En la figura **14.11 (b)** los dos cilindros tienen el mismo diámetro y son mutuamente tangentes en las superficies extremas y la curva formará dos elipses continuas y cruzándose en los puntos de tangencia.



a) Dos curvas **b) Dos curvas cruzadas.**

Fig. 14.11 Intersección por penetración.

14.5.1.2 MÉTODO DEL PLANO CORTANTE.

Para encontrar la intersección de dos cilindros rectos, se usan planos cortantes paralelos a los ejes de ambos cilindros, de modo de cortar a cada superficie según líneas rectas que se cortan produciendo con ello los puntos de intersección que se busca.

En la figura **14.12** se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro vertical y un cilindro con eje frontal inclinado se desea encontrar la intersección y visibilidad correspondiente.

PROCEDIMIENTO:

1. Se usan un cierto número de planos cortantes frontales paralelos al eje del cilindro inclinado, que cortan generatrices de ambos cilindros.
2. Se aplica un sistema de numeración tal como se muestra en la figura **14.12**, que nos permite identificar los puntos de intersección y determinar su visibilidad correspondiente.
3. Por ejemplo el **PC-1** corta a ambos cilindros, determinando los puntos **1** y **7** y que al interceptarse generatrices del mismo número determinan puntos de intersección.
4. Por ejemplo el **PC-3** corta a ambos cilindros, determinando los puntos **3,5** y **1,9** y que al interceptarse generatrices del mismo número determinan puntos de intersección.
5. Por ejemplo el **PC-4** corta a ambos cilindros, determinando los puntos **10,4** y que al interceptarse generatrices del mismo número determinan puntos de intersección.

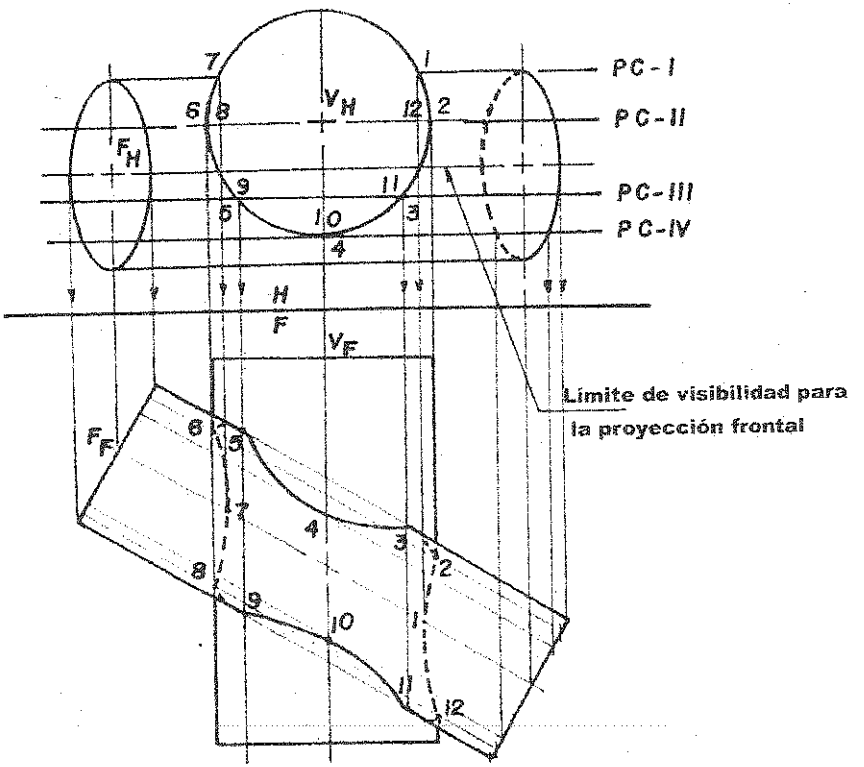


Fig. 14.12 Intersección de dos cilindros rectos.

TABLA DE VISIBILIDAD

PUNTO	GENERATRIZ		VIS INT	PUNTO	GENERATRIZ		VIS INT
	CIL. V	CIL. F			CIL. V	CIL. F	
	F	F	F		F	F	F
1	-	-	-	7	-	-	-
2	+	-	-	8	+	-	-
3	+	+	+	9	+	+	+
4	+	+	+	10	+	+	+
5	+	+	+	11	+	+	+
6	+	-	-	12	+	-	-

14.5.2 INTERSECCIÓN DE DOS CILINDROS OBLICUOS DE BASES PARALELAS.

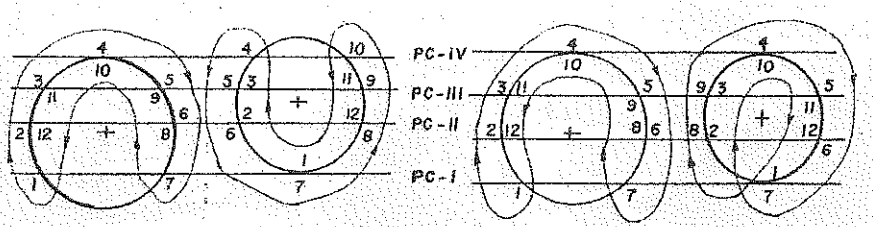
Para encontrar la figura de intersección para dos cilindros oblicuos, es necesario conocer los tipos más comunes de intersecciones, además se requieren planos de corte que atraviesen elementos en ambas superficies cilíndricas. También es conveniente utilizar un sistema de numeración que nos permitan identificar los puntos de intersección. Se aplican las mismas reglas estudiadas en **14.4.2.**

14.5.2.1 TIPOS DE INTERSECCIONES Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Cuando los cilindros a interceptarse son verticales, horizontales o inclinados, se usan planos de cortes que corten elementos de uno como de la otra superficie, para establecer la figura de intersección. Por la posición de estos planos de corte se puede predecir que tipo de intersección resultará. Se conocen dos tipos de intersecciones: Mordedura y Penetración.

1. MORDEDURA.

Cuando los planos cortantes tangentes están en distintas bases, la introducción es parcial de uno de los cilindros con respecto al otro y la línea de intersección resultante será una línea curva continua, como se muestra en la figura 14.13 (a). En la figura 14.13 (b) los dos cilindros son mutuamente tangentes en la parte común, teniendo además un plano cortante tangente a ambas bases, siendo la curva de intersección continua y cruzándose en el punto de tangencia, formándose una especie de número ocho.

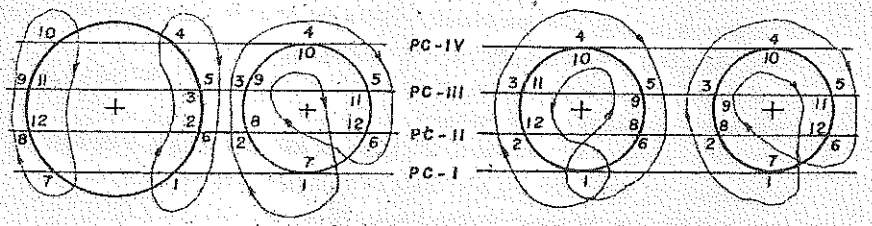


a) Una curva. **b) Una curva cruzada.**

Fig. 14.13 Intersección por Mordedura.

2. PENETRACIÓN.

Cuando los planos cortantes tangentes están en una misma base, la introducción es total, formándose de ese modo dos curvas separadas de intersección, como se muestra en la figura 14.14 (a). En la figura 14.14 (b) los dos cilindros tienen el mismo diámetro y son mutuamente tangentes en las superficies extremas, teniendo además los planos cortantes tangentes a ambas bases, siendo la curva de intersección dos elipses continuas que se cruzan en los puntos de tangencia.



a) Dos curvas. **b) Dos curvas cruzadas.**

Fig. 14.14 Intersección por penetración.

14.5.2.2 MÉTODO DEL PLANO CORTANTE.

Para encontrar la intersección de dos cilindros oblicuos, mostrada en la figura **14.15**, los planos cortantes que se usan deben ser paralelos al eje de cada uno de ellos, y que corten a la base común horizontal de modo que determinen generatrices sobre ellas, cuyas intersecciones establecerán los diferentes puntos de intersección de la curva buscada.

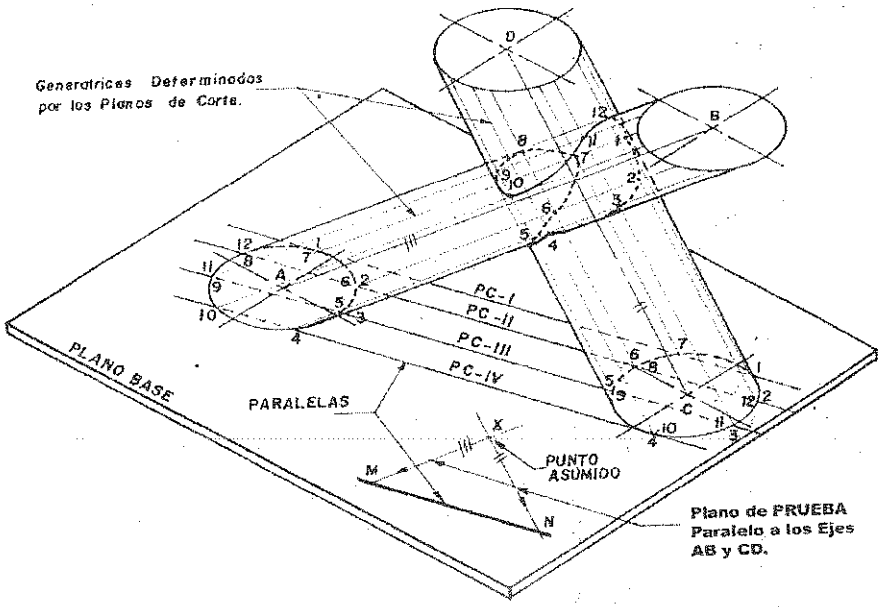


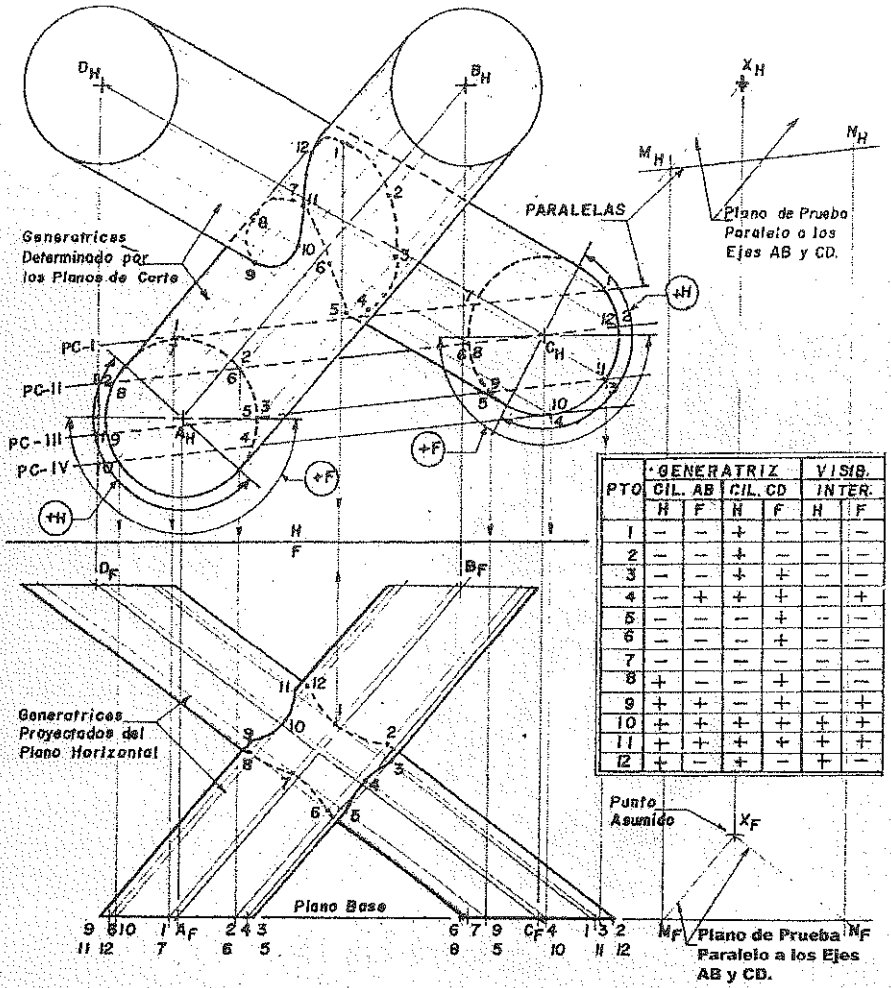
Fig. 14.15 Intersección de cilindros oblicuos.

En la figura **14.16** se dan las proyecciones horizontal y frontal de dos cilindros oblicuos cuyos ejes son **AB** y **CD**, se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.

PROCEDIMIENTO:

1. Se asume un punto **X** en la plano frontal, y desde ese punto se traza **XM** paralela al eje del cilindro **AB** (el punto **M** se encuentra en el plano de base).
2. En el plano frontal y desde el mismo punto **X** se traza **XN** paralela al eje del cilindro **CD** (el punto **N** se encuentra en el plano de base).
3. En el plano horizontal asumir el punto **X** y trazamos **XM** y **XN** paralela a los ejes **AB** y **CD** respectivamente, hasta encontrar a las líneas de referencia de **M** y **N**.
4. Las rectas **XM** y **XN** determinan el plano maestro **MXN**.
5. Trazar los planos cortantes paralela a la recta **MN**, en la figura **14.16** se observan dos planos cortantes tangentes y dos planos cortantes secantes; que determinan **12** puntos

6. Como los dos planos cortantes tangentes están en bases diferentes, la intersección entre estas dos superficies es por mordedura.
7. Trazar en la vista horizontal las generatrices del mismo número desde la bases A y B, la intersección de estas generatrices determinan los puntos de intersección 1, 2, hasta encontrar al punto 12.
8. En la vista horizontal en donde las bases se muestran en dimensión verdadera, determinar la visibilidad de las generatrices en las vistas horizontal y frontal; este rango de las visibilidades nos permite hacer la tabla de visibilidad.



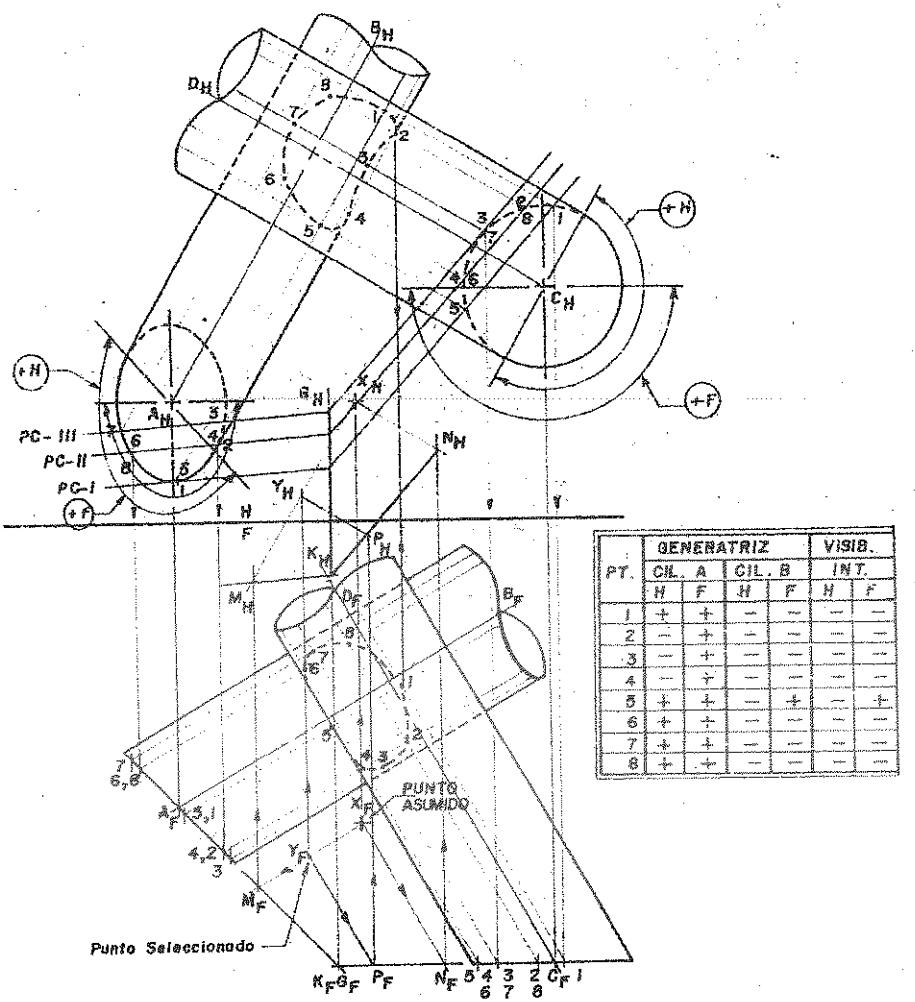
PTO	GENERATRIZ GIL. AB H	GIL. AB F	GIL. CD H	GIL. CD F	VISIB. INTER. H	INTER. F
1	−	−	+	−	−	−
2	−	−	+	−	−	−
3	−	−	+	+	−	−
4	−	+	+	+	−	+
5	−	−	−	+	−	−
6	−	−	−	+	−	−
7	−	−	−	−	−	−
8	+	−	−	+	−	−
9	+	+	−	+	−	+
10	+	+	+	+	+	+
11	+	+	+	+	+	+
12	+	−	+	−	+	−

Fig. 14.16 Intersección de cilindros oblicuos.

14.5.3 INTERSECCIÓN DE DOS CILINDROS OBLICUOS CON BASES EN DIFERENTES PLANOS.

Para encontrar la intersección, los planos cortantes oblicuos que se usan deben ser paralelos a los ejes de ambos cilindros, y que corten a las bases de cada uno de ellos, de modo que determinen generatrices cuyas intersecciones determinarán los diferentes puntos de intersección de la curva buscada.

En la figura **14.17** se dan las vistas horizontal y frontal de dos cilindros oblicuos, cuyas bases están en diferentes planos; siendo sus ejes **AB** y **CD**, se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.



PT.	GENERATRIZ				VISIB.	
	CIL. A		CIL. B		INT.	
	H	F	H	F	H	F
1	+	+	–	–	–	–
2	–	+	–	–	–	–
3	–	+	–	–	–	–
4	–	+	–	–	–	–
5	+	+	–	+	–	+
6	+	+	–	–	–	–
7	+	+	–	–	–	–
8	+	+	–	–	–	–

Fig. 14.17 Intersección de dos cilindros oblicuos cuyas bases están en diferentes planos.

PROCEDIMIENTO:

1) En la vista frontal y desde un punto arbitrario X, se traza XM paralela al eje del cilindro AB (el punto M se encuentra en el plano de base del cilindro AB).
2) Desde el mismo punto X se traza XN paralela al eje del cilindro CD (el punto N se encuentra en el plano de base del cilindro CD).
3) Los planos de bases de los cilindros AB y CD se cortan en KG, formándose con las rectas XM y XN el plano de prueba MXNKG.
4) En la vista horizontal trazamos los planos cortantes para la base del cilindro AB paralela a la recta MK y para la base del cilindro CD paralela a la recta KN.
5) Como se tiene que determinar la intersección de este plano de prueba con cada uno de los planos de las bases, es necesario conocer dos puntos en cada base; para lo cual seleccionamos el punto Y contenida en la recta XM, luego trazamos YP paralela a XN.
6) Se une N con P y se prolonga hasta su encuentro con el plano inclinado en el punto K. El plano MXN corta a las bases según las rectas MK y NK al que serán paralelos los planos cortantes.

14.6 INTERSECCIÓN DE CILINDRO CON CONO.

14.6.1 INTERSECCIÓN DE CILINDRO Y CONO DE EJES PARALELOS.

Cuando el cilindro y el cono tengan sus ejes paralelos se introducen planos cortantes de canto para establecer la figura de intersección, de dos modos diferentes: 1) planos horizontales y 2) planos radiales verticales.

En la figura **14.18** se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro y un cono, cuyos ejes verticales son paralelos y las superficies de sus bases son circulares; se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.

PROCEDIMIENTO:

1. MÉTODO DEL PLANO CORTANTE HORIZONTAL:

Una serie de planos cortantes horizontales cortará al cilindro y al cono en una serie de círculos concéntricos, el cruce de estas determinarán los puntos de intersección buscados.

2. MÉTODO DE LOS PLANOS VERTICALES RADIALES:

Una serie de planos verticales radiales cortará al cilindro y al cono en una serie de puntos, que localizados en la proyección vertical y el cruce de estas determinarán los puntos de intersección buscados.

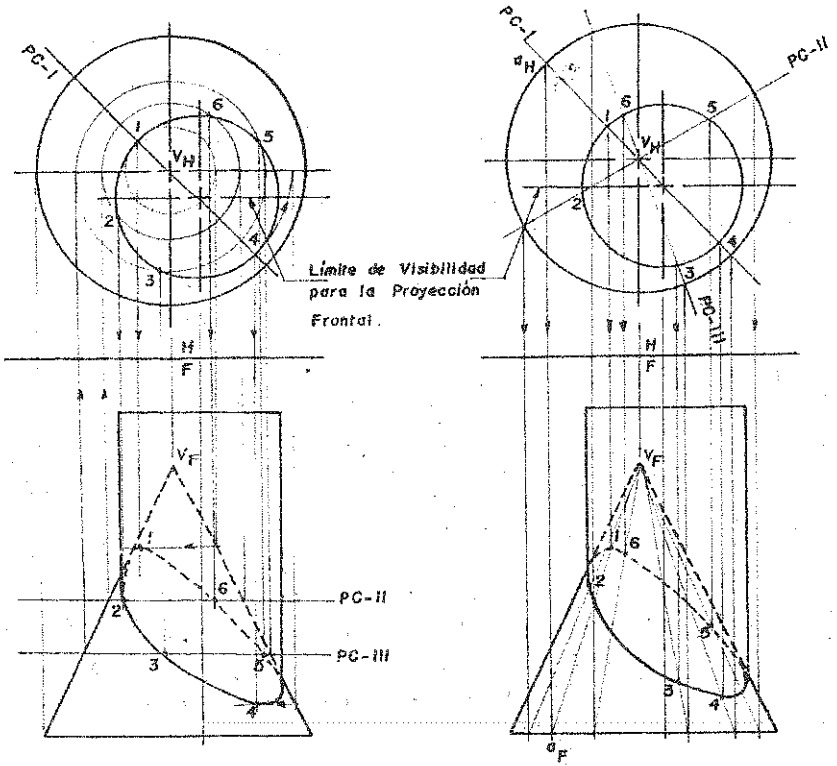


Fig. 14.18 Intersección de cilindro y cono, de ejes paralelos.

14.6.2 INTERSECCIÓN DE CILINDRO Y CONO RECTO.

14.6.2.1 TIPOS DE INTERSECCIONES Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

1. PENETRACIÓN:

Cuando la introducción es total, formándose de ese modo dos curvas separadas de intersección.

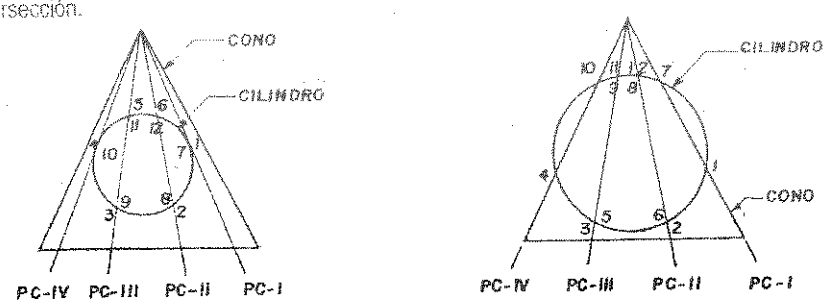


Fig. 14.19 Intersección por penetración.

2. MORDEDURA:

Cuando la introducción es parcial y la línea de intersección resultante será una línea curva continua.

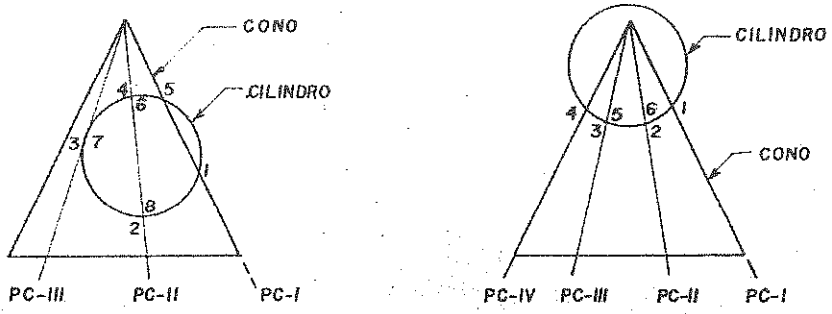


Fig. 14.20 Intersección por mordedura.

14.6.2.2 MÉTODO DEL PLANO AUXILIAR.

La intersección de un cono recto y un cilindro se determina: primero, en un plano auxiliar en donde la base del cilindro se proyecta en dimensión verdadera; y segundo, trazando en este plano auxiliar una serie de planos de cortantes de canto, que partan del vértice del cono y que corten al cilindro, de modo que determinen generatrices cuyas intersecciones determinarán los diferentes puntos de intersección de la curva buscada.

En la figura **14.21** se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro y un cono recto, se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.

PROCEDIMIENTO:

1. Proyectar de punta al eje del cilindro, utilizando un plano auxiliar.
2. En el plano auxiliar, trazar los planos cortantes necesarios desde el vértice del cono pasa una serie de planos cortantes, que corten a la directriz de la base del cilindro y se prolongan sobre la línea base del cono, donde se designan con letras (**a,b,c,...**); luego muestre estos elementos en la vista de planta y en la vista de elevación frontal;
3. Por ejemplo el plano **PC-II**, en la proyección **H1** corta al cilindro en los puntos **2,12** y **6,8**; y al cono en **V-bc**. La intersección de estos elementos determinan los puntos **2, 6, 8 y 12** de la curva de intersección buscada, tanto en la proyección horizontal como en la frontal.
4. Para determinar la proyección frontal de los puntos de intersección, se consigue llevando las cotas **L**, o bajando las líneas de referencia de la proyección horizontal por ejemplo para el punto **2**, necesitamos la generatriz **Vb** que con el cruce de la línea de referencia de la proyección horizontal del punto **2**, determina las proyección frontal de este punto.

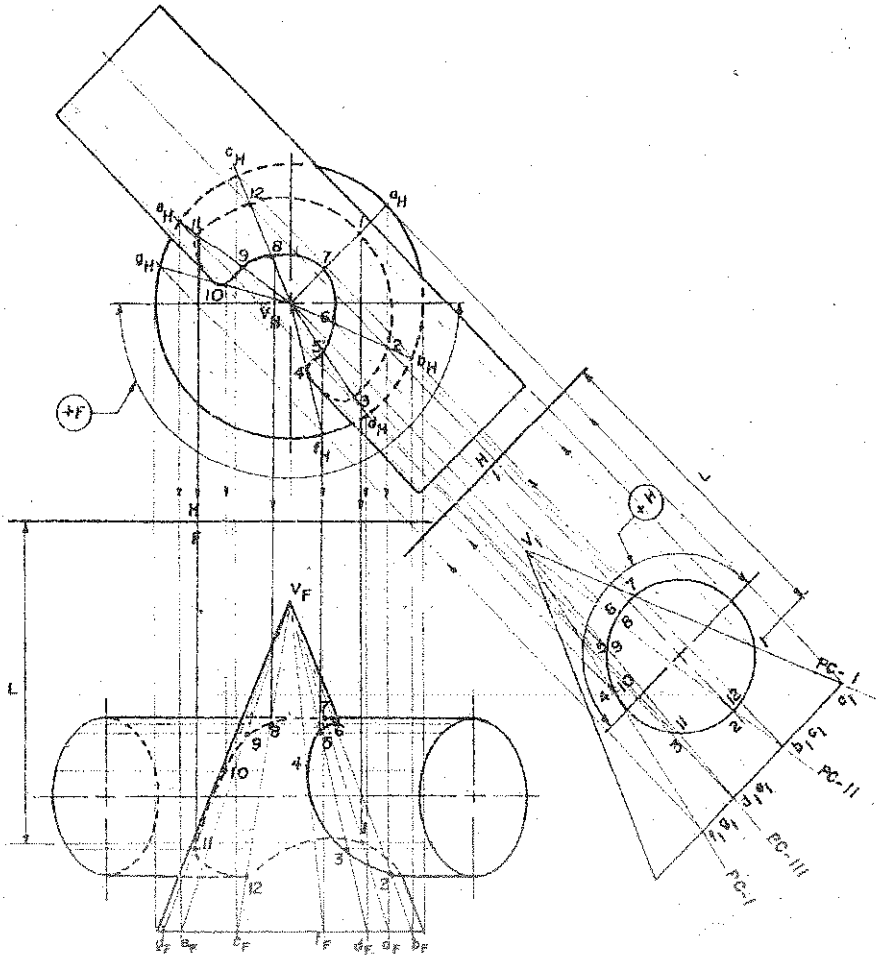


Fig. 14.21 Intersección de cilindro y cono.

14.6.3 INTERSECCIÓN DE CILINDRO Y CONO OBLICUOS CUYAS BASES ESTÁN EN EL MISMO PLANO HORIZONTAL.

14.6.3.1 TIPOS DE INTERSECCIONES Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Para encontrar la figura de intersección de un cilindro y un cono oblicuo, es necesario conocer los tipos más comunes de intersecciones y aplicar un sistema de numeración que nos permita identificar los puntos de intersección. Se presentan los siguientes tipos de intersecciones:

1. MORDEDURA:

Cuando la introducción es parcial del cilindro con respecto al cono o viceversa y la línea de intersección resultante será una línea curva continua, los planos de corte limitadores son tangentes y secantes a ambas bases, como se muestra en la figura **14.22(a).** En la figura **14.22 (b)** los planos de corte limitadores son tangentes a ambas bases, formándose dos curvas de intersección separadas que se cruzan una a otra en dos puntos de tangencia del cilindro y cono. En la figura **14.22(c)** los planos de corte limitadores son ambas tangentes a una base y tangentes y secantes a la otra, formándose una curva continúa de intersección que se cruza a sí misma en el punto de tangencia del cilindro y cono.

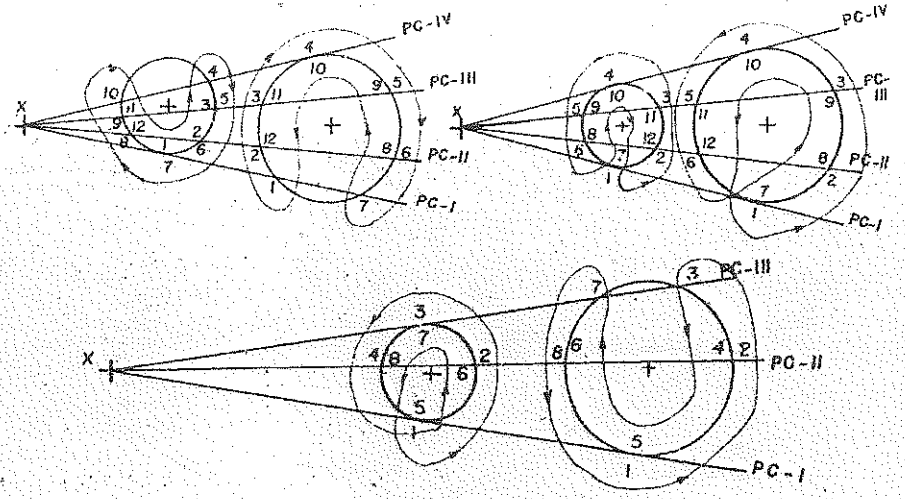


Fig. 14.22 Intersección por mordedura

2. PENETRACIÓN:

Cuando el cilindro está introducido totalmente en el cono o viceversa, formándose dos curvas separadas de intersección. En la figura **14.23(a)** los planos de corte limitadores son ambos tangentes a una base y secantes a la otra, formándose dos curvas de intersección separadas, igualmente sucede en la figura **14.23 (b).**

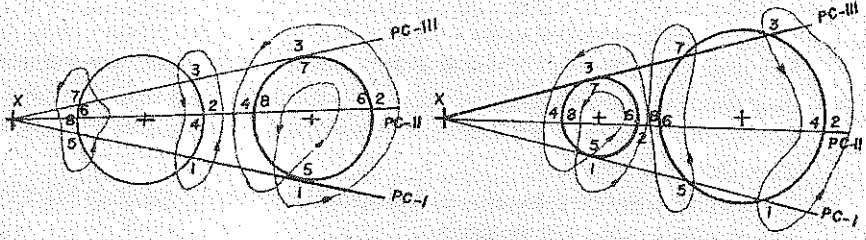


Fig. 14.23 Intersección por penetración.

14.6.3.2 MÉTODO DEL PLANO CORTANTE.

Cuando un cono y un cilindro oblicuo se interceptan todos los planos de corte están articulados en un punto. Para encontrar este punto, trazar desde el vértice del cono una recta paralela al eje del cilindro hasta cortar al plano de base de estas superficies en un punto que denominaremos ***"punto de articulación"***. Desde este punto trazamos los planos cortantes necesarios para determinar la intersección entre estas dos superficies. En la figura **14.24** se ilustra un cilindro y un cono cuyos ejes son **AB** y **VO** respectivamente. Desde el vértice del cono V se traza la recta VX paralela al eje del cilindro, que intercepta al plano base en el punto X, del cual emanan los planos cortantes tangentes o secantes, que determinan elementos en el cilindro y en el cono, cuya intersección originan los puntos de intersección.

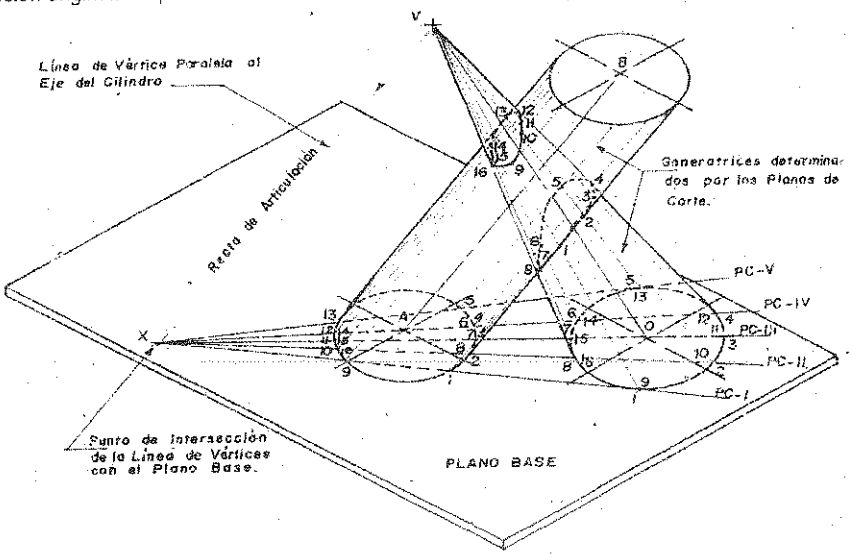
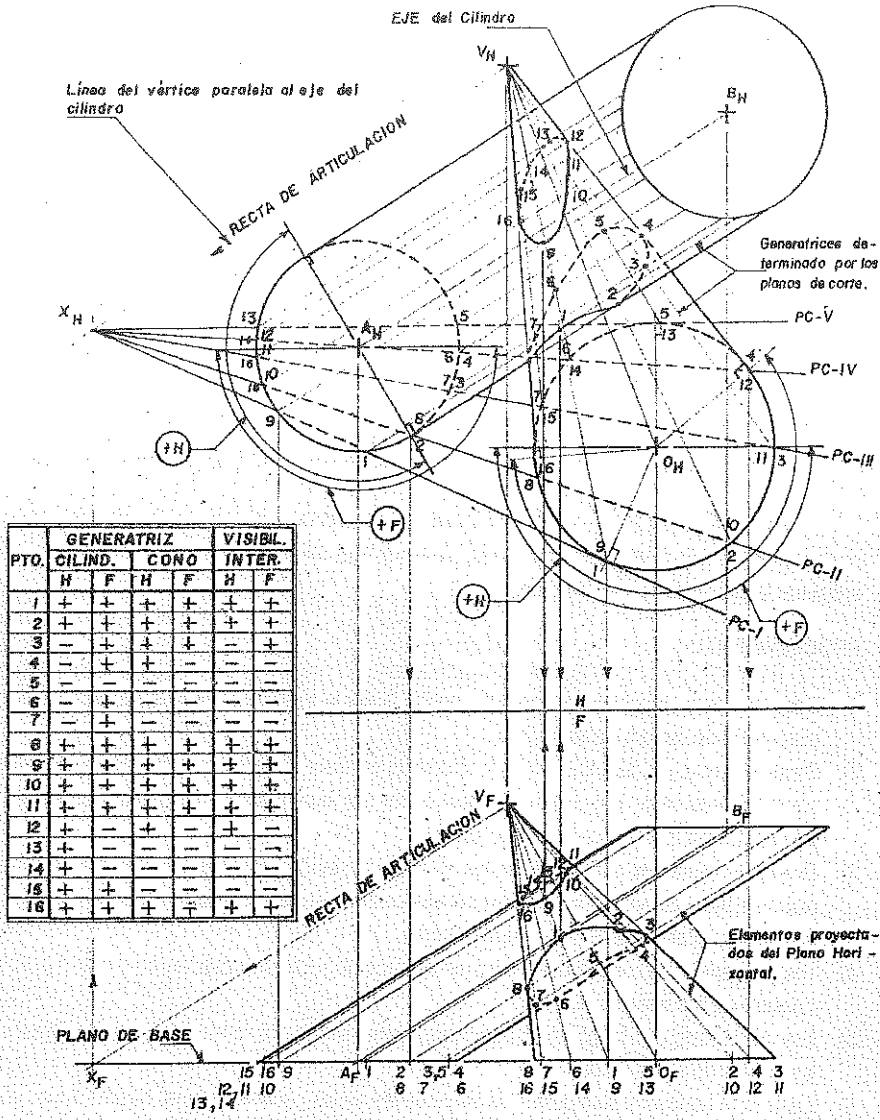


Fig. 14.24 Intersección de cilindro y cono.

En la figura 14.25 se dan las proyecciones horizontal y frontal de un cilindro y un cono, cuyas bases son círculos horizontales; se desea encontrar la intersección y visibilidad de ambos.

PROCEDIMIENTO:

1. En el plano frontal y desde el vértice V del cono se traza una recta paralela al eje del cilindro AB y se prolonga esta recta hasta cortar al plano de base de estas superficies en el punto X.
2. Luego, desde este punto X hallado se proyecta a la vista horizontal, y en la intersección de la recta que parte desde el vértice V del cono y paralela al eje del cilindro, se determina la proyección horizontal del punto X.
3. Desde la proyección horizontal del punto X, se trazan los necesarios planos cortantes tangentes y secantes a las bases de los sólidos.



PTO.	GENERATRIZ CILIND. H	GENERATRIZ CILIND. F	GENERATRIZ CONO H	GENERATRIZ CONO F	VISIBIL. INTER. H	VISIBIL. INTER. F
1	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+
3	−	+	+	+	−	+
4	−	+	+	−	−	−
5	−	−	−	−	−	−
6	−	+	−	−	−	−
7	−	+	−	−	−	−
8	+	+	+	+	+	+
9	+	+	+	+	+	+
10	+	+	+	+	+	+
11	+	+	+	+	+	+
12	+	−	+	−	+	−
13	+	−	−	−	−	−
14	+	−	−	−	−	−
15	+	+	−	−	−	−
16	+	+	+	+	+	+

Fig. 14.25 Intersección de cilindro y cono oblicuos.

4. En la figura **14.25** se muestran **5** planos cortantes, en donde se observa que los planos cortantes I y V son tangentes a la base del cono y secantes a la base del cilindro; que corresponde a una intersección por penetración
5. Se numeran los puntos tangentes y secantes definidos por los planos cortantes en ambas bases, en orden progresivo, de acuerdo con el sistema de numeración establecido.

6. Por ejemplo el **PC-3** define los puntos **3,11** y **7,15** tanto en el cilindro como en el cono, y que al interceptarse generatrices del mismo número determinan los puntos de intersección buscados. La visibilidad de estos puntos hallados depende de las que tengan las generatrices que las determinaron.
7. Los puntos numerados en la base del cono y del cilindro en el plano horizontal, se proyectan al plano frontal e interceptamos generatrices del mismo número.
8. La visibilidad de los puntos de intersección depende de la visibilidad que tengan las generatrices que determinaron estos puntos de intersección; tal como se observa en la figura **14.25**.
9. En la tabla de visibilidad se observa la visibilidad de las generatrices del cono y del cilindro en los planos horizontal y frontal.

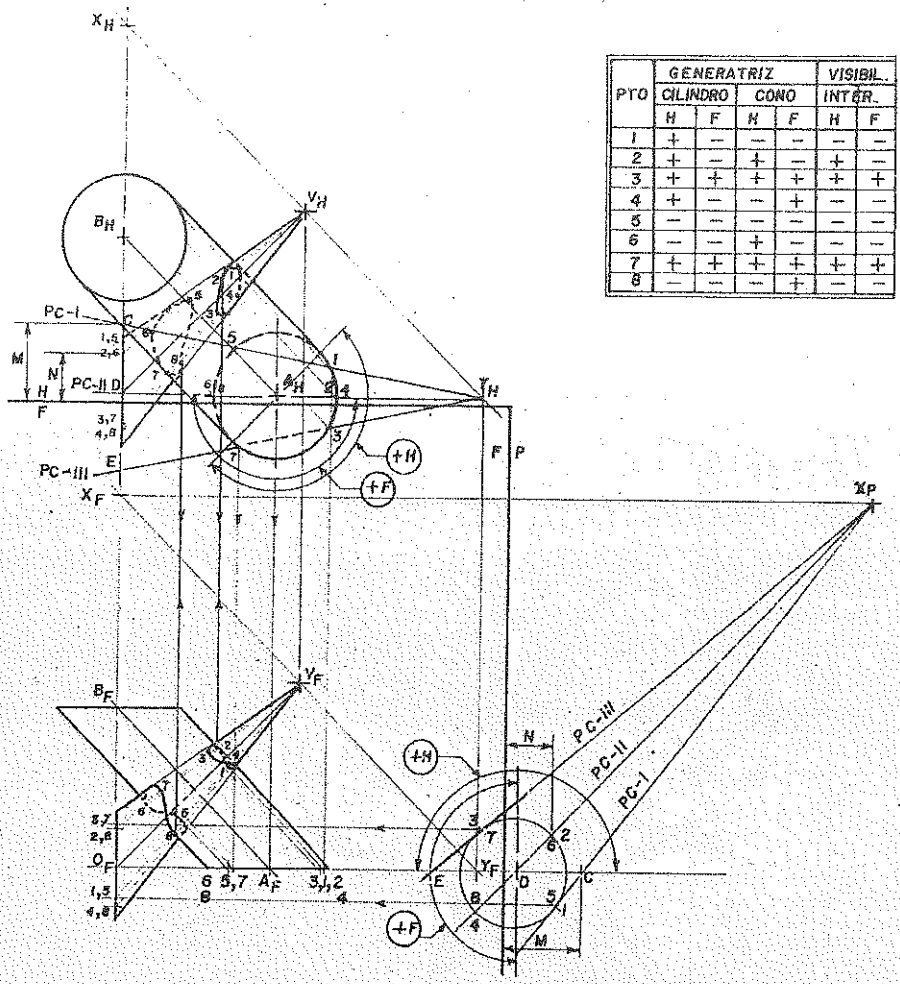
14.6.4 INTERSECCIÓN DE CILINDRO Y CONO OBLICUOS CUYAS BASES ESTÁN EN PLANOS NO PARALELOS.

Cuando se interceptan un cilindro y un cono cuyas bases están en planos no paralelos, se utilizan planos de corte que partan desde un punto de articulación común a ambas superficies.

En la figura **14.26** se dan las proyecciones horizontal y frontal de un cilindro y un cono cuyos ejes son **AB** y **VO** respectivamente; estando sus bases en diferentes planos, se desea encontrar la intersección y su visibilidad.

PROCEDIMIENTO:

1) Dada las vistas principales horizontal y frontal, hallar la vista de perfil para proyectar a la base del cono **O** en dimensión verdadera.
2) Desde el vértice **V** del cono se traza una recta paralela al eje del cilindro **AB**, y se prolonga hasta que intercepte a los planos de base de las dos superficies en dos puntos separados; tales como **X** para el cono e **Y** para el cilindro.
3) Desde los puntos **X** e **Y** se trazan los necesarios planos cortantes tangentes y secantes al plano de base de ambas superficies; para el cono en el plano de perfil y para el cilindro en el plano horizontal trasladando el alejamiento **M**.
4) Los elementos del cono determinados en el plano de perfil, se localizan en el plano horizontal trasladando los alejamientos **N**.
5) Las intersecciones de las correspondientes generatrices del cono y del cilindro, determinan los puntos de intersección.
6) En la vista horizontal se muestra las visibilidades de las generatrices del cilindro en los planos horizontal y frontal; y en la vista de perfil se muestra las visibilidades de las generatrices del cono en los planos horizontal y frontal.

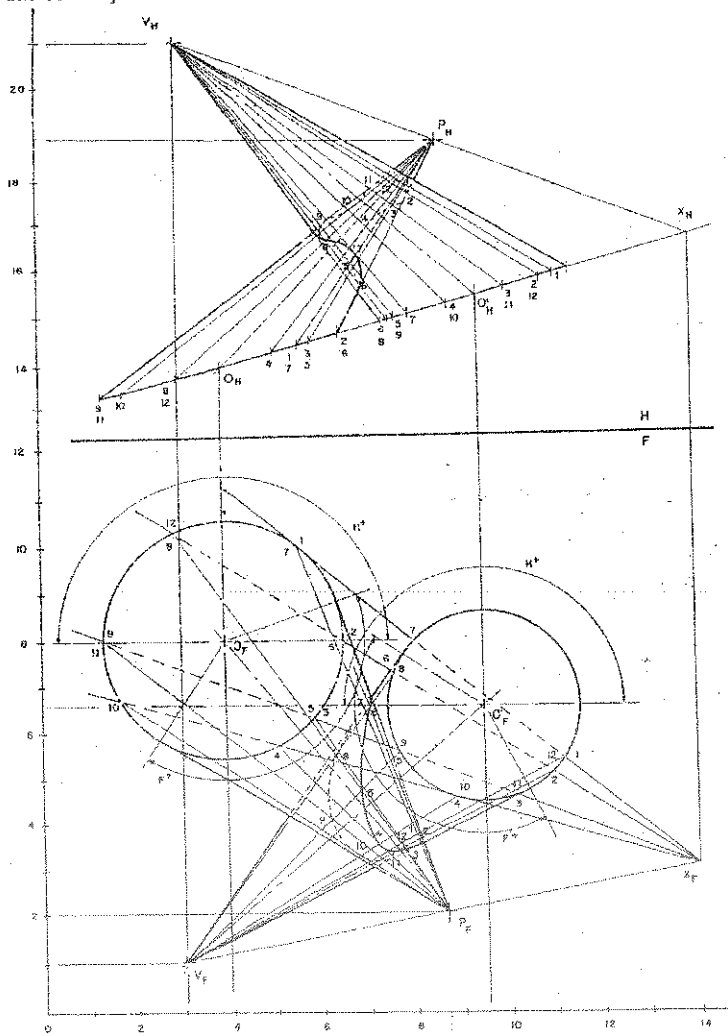


PTO	GENERATRIZ				VISIBIL.	
	CILINDRO		CONO		INTER.	
	H	F	H	F	H	F
1	+	−	−	−	−	−
2	+	−	+	−	+	−
3	+	+	+	+	+	+
4	+	−	−	+	−	−
5	−	−	−	−	−	−
6	−	−	+	−	−	−
7	+	+	+	+	+	+
8	−	−	−	+	−	−

Fig. 14.26 Intersección de cilindro y cono cuyas bases están en planos no paralelos.

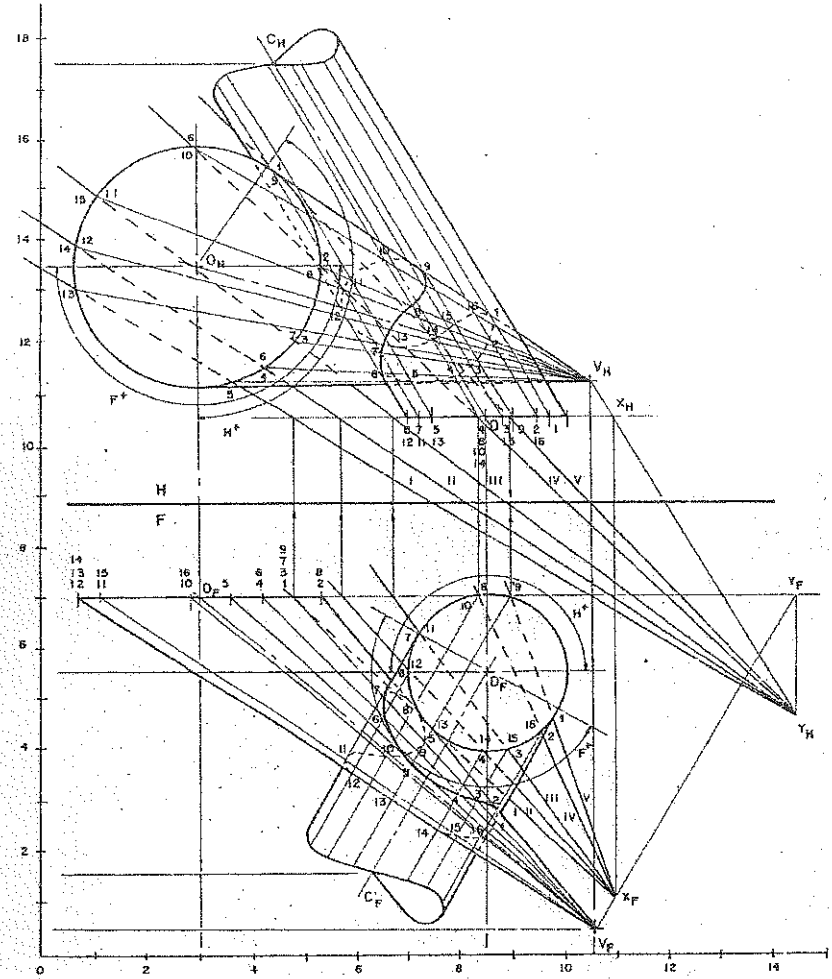
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 14.1: Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cuatro planos cortantes.



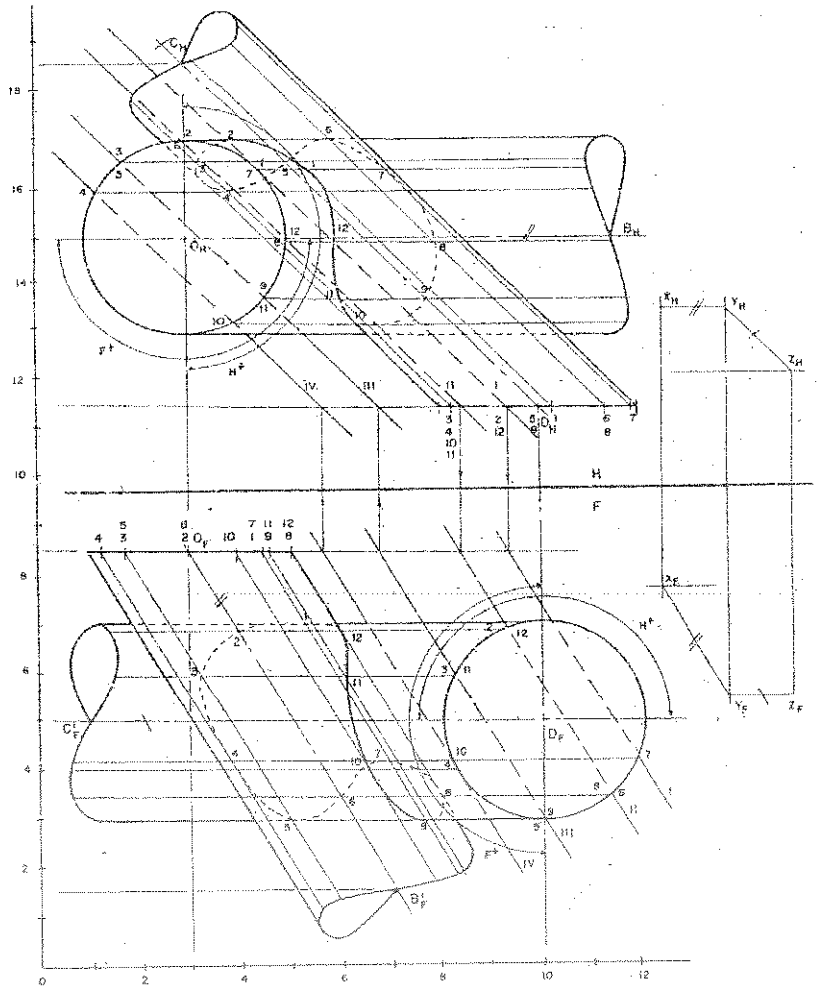
CONO V		CIL P		INT	VIS		CONO V		CIL P		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
–	–	+	–	1	–	–	+	–	+	–	7	+	–
–	–	+	+	2	–	–	+	+	+	–	8	+	–
–	+	–	+	3	–	+	–	+	+	–	9	–	–
–	+	–	+	4	–	+	–	+	–	–	10	–	–
–	+	–	+	5	–	+	–	+	+	–	11	–	–
+	+	+	+	6	+	+	–	–	+	–	12	–	–

PROBLEMA 14.2: D es el centro de un cilindro cuya base es un círculo frontal de 3cm de diámetro, siendo CD el eje del cilindro. V es el vértice y O es el centro de la base horizontal de 4.6cm de diámetro de un cono oblicuo. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cinco planos cortantes.



CONO		CIL		INT	VIS		CONO		CIL		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
+	−	−	+	1	−	−	+	−	+	−	9	+	−
+	+	−	+	2	−	+	−	−	+	−	10	−	−
+	+	−	+	3	−	+	−	−	+	+	11	−	−
+	+	−	+	4	−	+	−	−	+	+	12	−	−
+	+	−	+	5	−	+	−	+	−	+	13	−	+
+	+	+	+	6	+	+	−	−	−	+	14	−	−
+	+	+	+	7	+	+	−	−	−	+	15	−	−
+	+	+	−	8	+	−	−	−	−	+	16	−	−

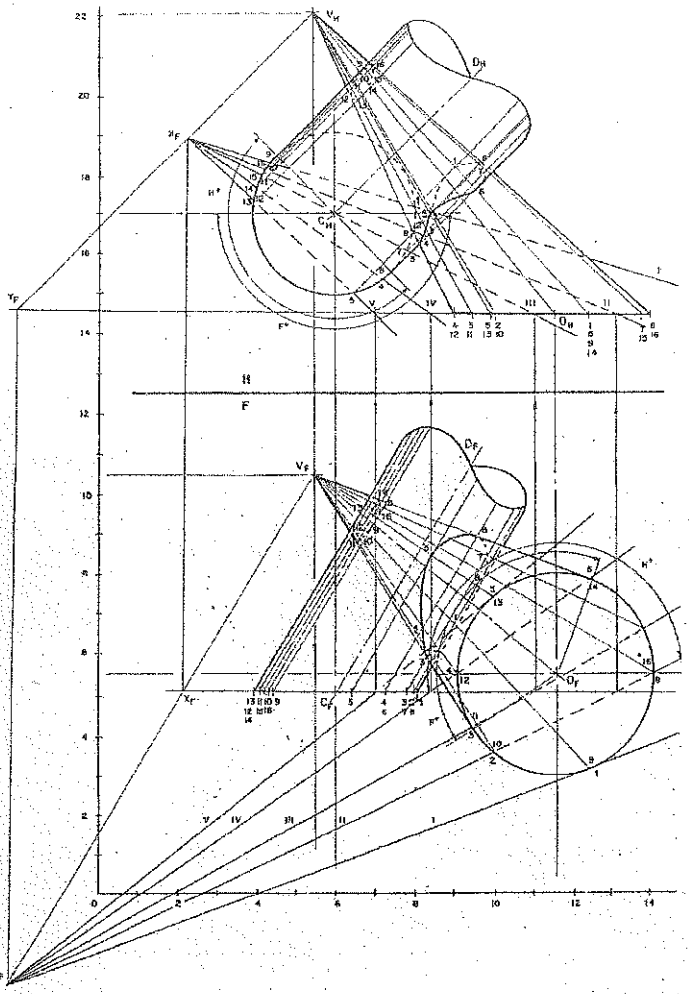
PROBLEMA 14.3: **OB** es el eje de un cilindro de base horizontal en **O** de **2.5cm** de radio. **CD** es el eje de otro cilindro de base frontal en **C** de **4 cm** de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cuatro planos cortantes.



CIL A		CIL B		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F
+	-	+	-	1	+	-
+	+	+	-	2	+	-
+	+	-	-	3	-	-
-	+	-	-	4	-	-
-	+	-	-	5	-	-
-	-	-	-	6	-	-

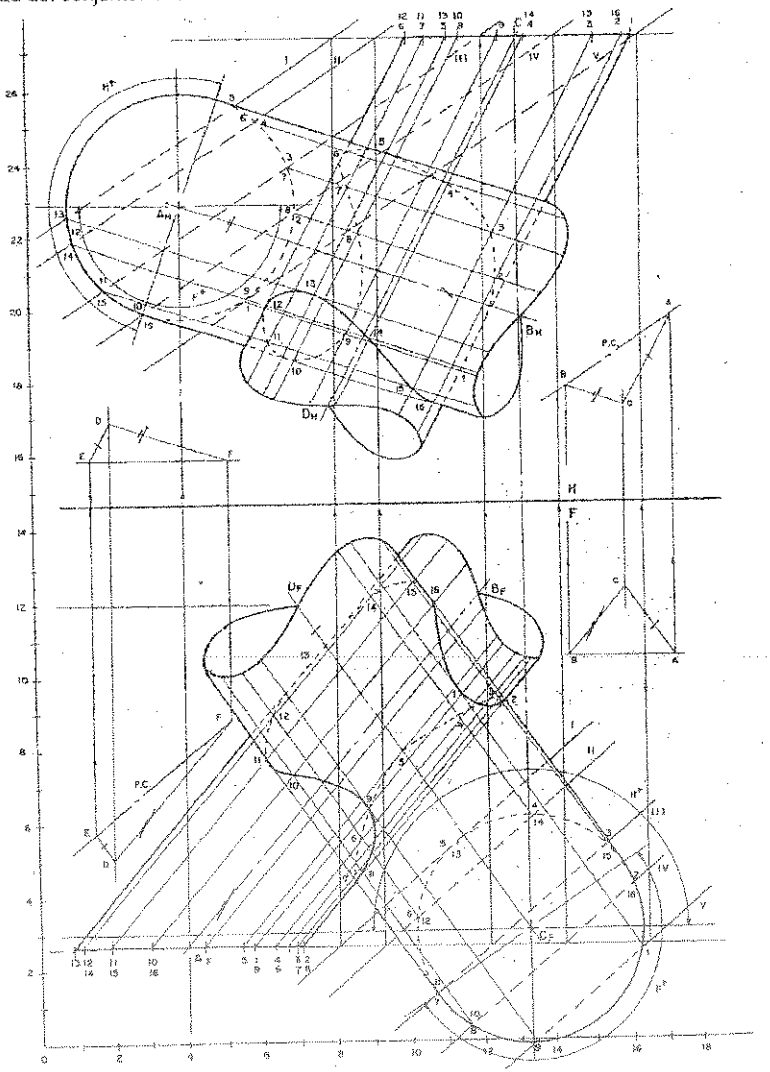
CIL A		CIL B		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F
-	-	+	-	7	-	-
-	-	+	+	8	-	-
-	+	+	+	9	-	+
-	+	+	+	10	-	+
+	+	+	+	11	+	+
+	+	+	+	12	+	+

PROBLEMA 14.4: C es el centro de un cilindro cuya base es un círculo horizontal de 4cm de diámetro, siendo CD el eje del cilindro oblicuo. V es el vértice de un cono oblicuo y O es el centro de su base que es un círculo frontal de 5cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cinco planos cortantes.



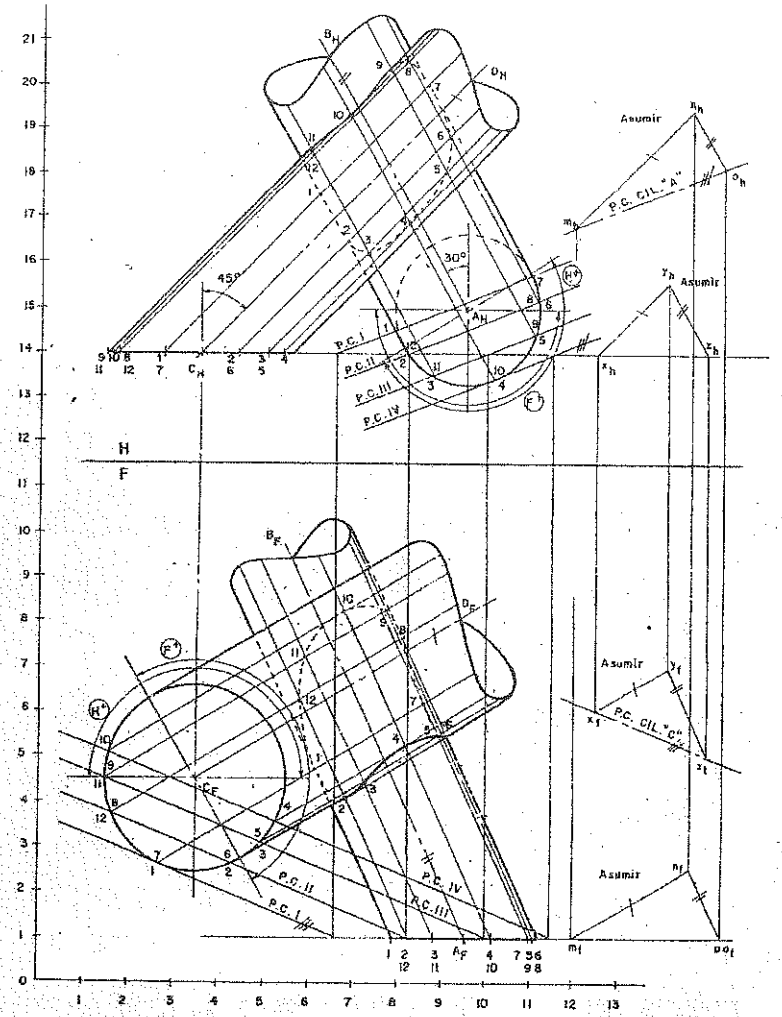
CONO		CIL		INT	VIS		CONO		CIL		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
–	–	–	–	1	–	–	–	–	+	–	9	–	–
–	–	–	+	2	–	–	–	–	+	–	10	–	–
–	+	–	+	3	–	+	–	+	+	–	11	–	–
+	+	+	+	4	+	+	+	+	+	–	12	+	–
+	+	+	+	5	+	+	+	+	+	–	13	+	–
+	+	+	+	6	+	+	+	+	+	–	14	+	–
–	–	–	+	7	–	–	+	–	+	–	15	+	–
+	–	–	+	8	–	–	+	–	+	–	16	+	–

PROBLEMA 14.5: Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cinco planos cortantes.



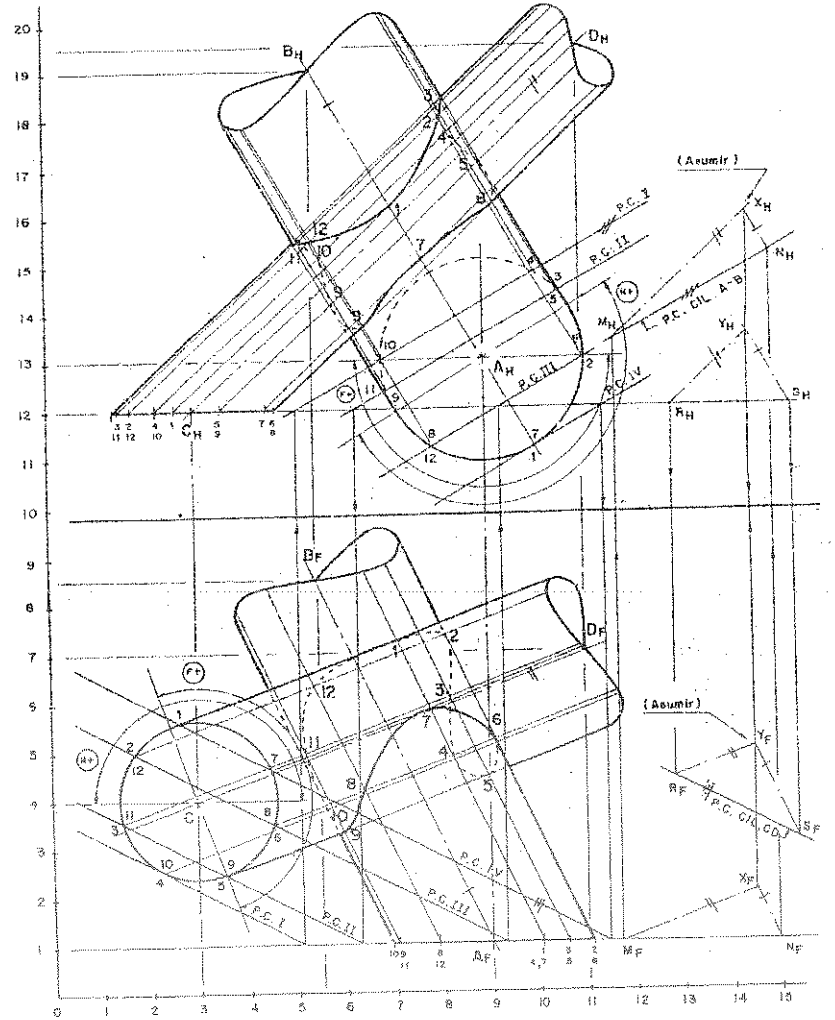
CIL AB		CIL CD		INT	VIS		CIL AB		CIL CD		IN T	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
-	-	-	-	1	-	-	-	-	+	-	9	-	-
-	-	-	+	2	-	-	-	-	+	-	10	-	-
-	+	-	+	3	-	+	-	+	+	-	11	-	-
+	+	+	+	4	+	+	+	+	+	-	12	+	-
+	+	+	+	5	+	+	+	+	+	-	13	+	-
+	+	+	+	6	+	+	+	+	+	-	14	+	-
-	-	-	+	7	-	-	+	-	+	-	15	+	-
+	-	-	+	8	-	-	+	-	+	-	16	+	-

PROBLEMA 14.6: AB es el eje de un cilindro de base horizontal en A, de 4 metros de diámetro y sigue la dirección N30°O con pendiente ascendente del 110%. CD es el eje de otro cilindro de base frontal en C, de 5 metros de diámetro que sigue la dirección N45°E y con pendiente ascendente del 50%. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cuatro planos cortantes.



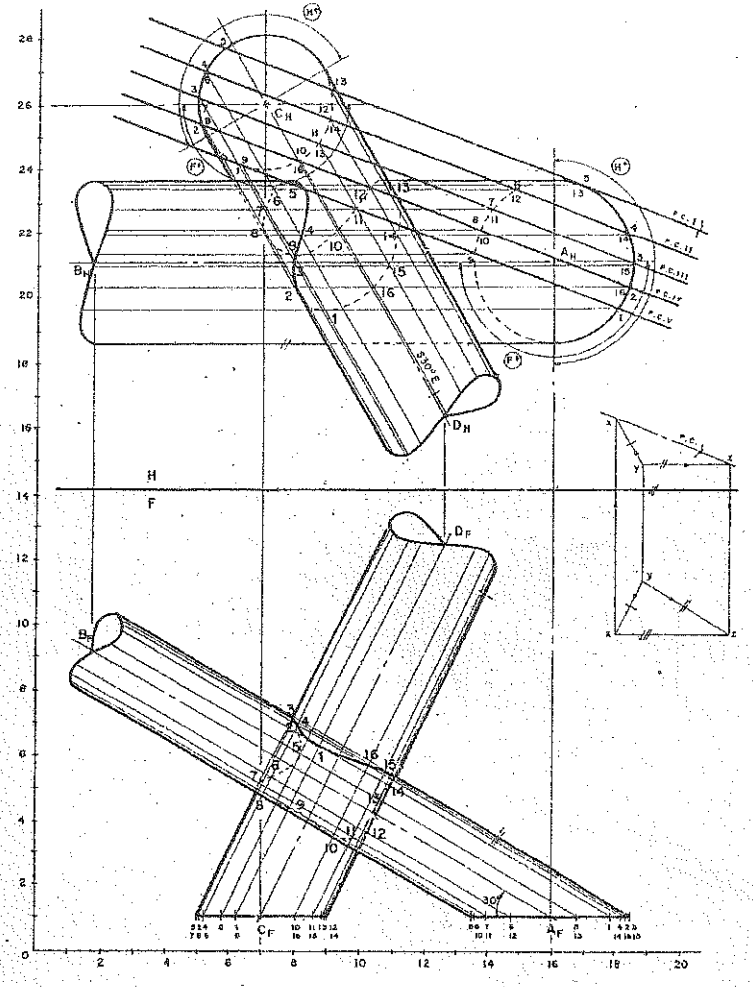
CIL A		CIL C		INT	VIS		CIL A		CIL C		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
-	+	-	-	1	-	-	+	-	-	-	7	-	-
+	+	-	-	2	-	-	+	-	-	-	8	-	-
+	+	-	+	3	-	+	+	+	+	-	9	+	-
+	+	-	+	4	-	+	+	+	+	-	10	+	-
+	+	-	+	5	-	+	+	+	+	-	11	+	-
+	-	-	-	6	-	-	+	+	-	-	12	-	-

PROBLEMA 14.7: **AB** es el eje de un cilindro de base horizontal en **A**, de **5cm** de diámetro. **CD** es el eje de otro cilindro de base frontal en **C**, de **4cm** de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cuatro planos cortantes.



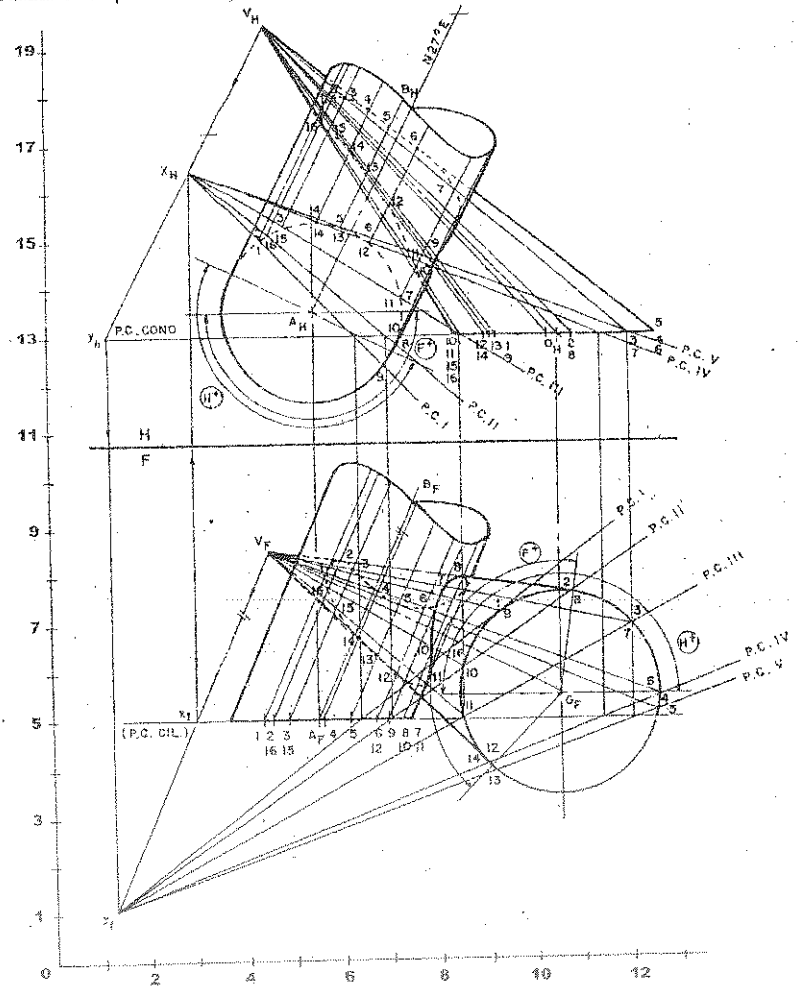
CIL A		CIL C		INT	VIS		CIL A		CIL C		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
+	+	+	+	1	+	+	+	+	+	+	7	+	+
+	+	+	-	2	+	-	+	+	-	+	8	-	+
-	-	-	-	3	-	-	-	+	-	+	9	-	+
-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	10	-	-
-	-	-	+	5	-	-	-	+	-	-	11	-	-
+	+	-	+	6	-	+	+	+	+	-	12	+	-

PROBLEMA 14.8: AB es el eje de un cilindro de base horizontal en A, de 5cm de diámetro. CD es el eje de otro cilindro de base horizontal en C, y de 4cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cinco planos cortantes.



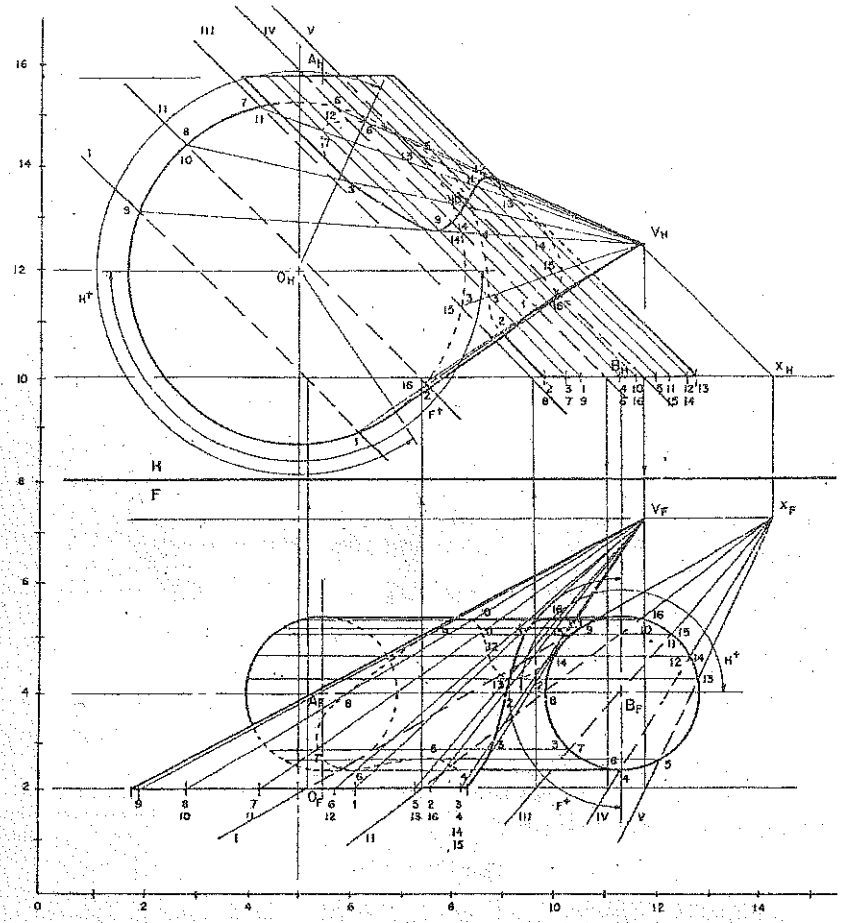
CIL AB		CIL CD		INT	VIS		CIL AB		CIL CD		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
+	+	-	+	1	-	+	-	-	-	+	9	-	-
+	+	+	+	2	+	+	-	-	-	+	10	-	-
+	+	+	-	3	+	-	-	-	-	+	11	-	-
+	-	+	-	4	+	-	-	-	-	+	12	-	-
+	-	+	-	5	+	-	+	-	-	-	13	-	-
-	-	+	-	6	-	-	+	-	-	+	14	-	-
-	-	+	-	7	-	-	+	+	-	+	15	-	+
-	-	+	+	8	-	-	+	+	-	+	16	-	+

PROBLEMA 14.9: AB es el eje de un cilindro de base horizontal en A, de **4.5cm** de diámetro. V es el vértice de un cono oblicuo de base frontal en O de **5cm** de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cinco planos cortantes.



CIL AB		CONO		INT	VIS		CIL AB		CONO		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
-	-	+	+	1	-	-	+	+	+	+	9	+	+
-	-	+	+	2	-	-	-	+	+	+	10	-	+
-	-	+	-	3	-	-	-	-	-	+	11	-	-
-	-	+	-	4	-	-	-	-	-	+	12	-	-
-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	13	-	-
-	-	+	-	6	-	-	-	-	-	+	14	-	-
-	-	+	-	7	-	-	-	-	+	+	15	-	+
-	+	+	+	8	-	+	-	-	+	+	16	-	+

PROBLEMA 14.10: AB es el eje horizontal de un cilindro de base frontal en B, de 3.4cm de diámetro. V es el vértice de un cono oblicuo de base horizontal en O de 7.4cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cinco planos cortantes.



CIL AB		CONO		INT	VIS		CIL AB		CONO		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F	H	F	H	F		H	F
+	+	+	+	1	+	+	+	+	+	-	9	+	-
+	+	-	+	2	-	+	+	-	+	-	10	+	-
-	+	-	+	3	-	+	+	-	+	-	11	+	-
-	+	-	-	4	-	-	+	-	+	-	12	+	-
-	-	-	-	5	-	-	+	-	-	-	13	-	-
-	+	+	-	6	-	-	+	-	-	-	14	-	-
-	+	+	-	7	-	-	+	-	-	+	15	-	-
+	+	+	-	9	+	-	+	-	-	+	16	-	-

PROBLEMA 14.11: Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad del conjunto. Hacer la tabla de visibilidad. Utilizar cinco planos cortantes.

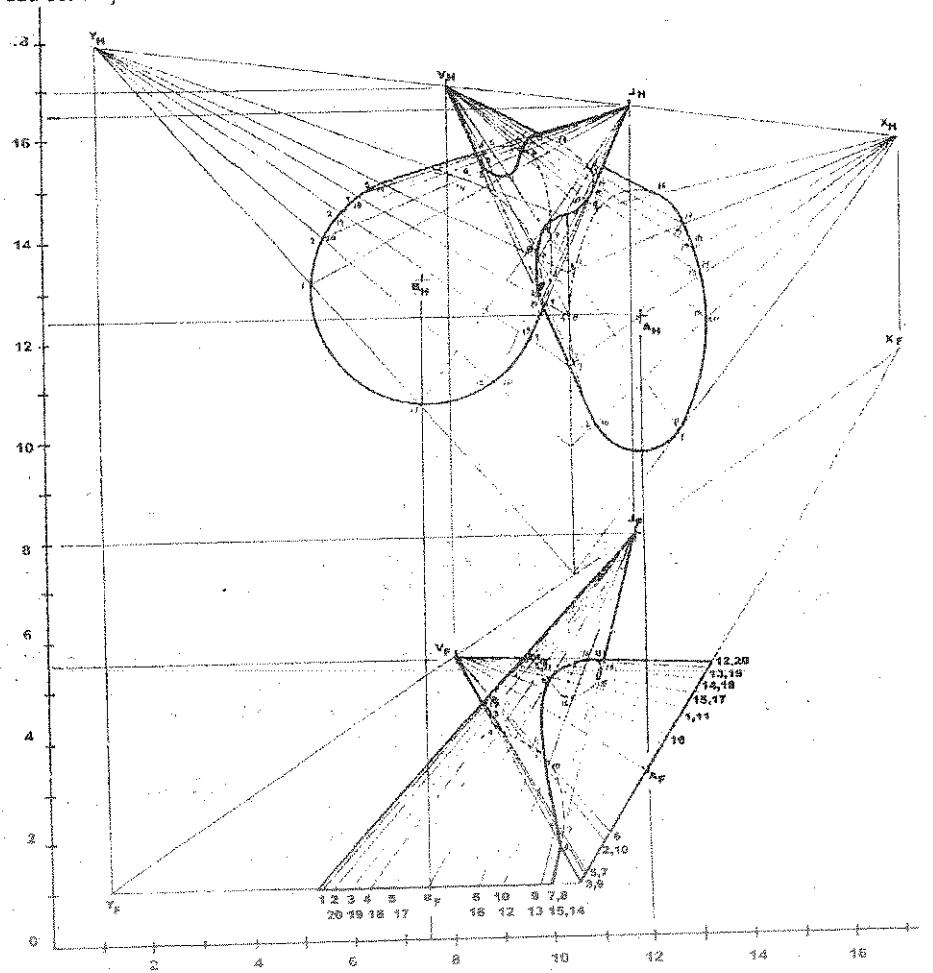


TABLA DE VISIBILIDAD

CONO JB		CONO VA		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F
+	+	+	+	1	+	+
+	-	-	+	2	-	-
+	-	-	+	3	-	-
+	-	-	+	4	-	-
+	-	-	-	5	-	-
-	-	-	-	6	-	-
-	-	-	-	7	-	-
-	+	-	+	8	-	+
+	+	-	+	9	-	+
+	+	-	+	10	-	+

CONO JB		CONO VA		INT	VIS	
H	F	H	F		H	F
+	+	-	+	11	-	+
+	-	-	-	12	-	-
+	+	-	-	13	-	-
-	+	-	-	14	-	-
-	-	-	-	15	-	-
-	-	+	-	16	-	-
+	-	+	-	17	+	-
+	-	+	+	18	+	-
+	-	+	+	19	+	-
+	-	+	+	20	+	-

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 14.1: O es el centro de un círculo frontal de 7.5cm de diámetro, base de un cono con vértice V. C es el centro de un círculo frontal de 7.5cm de diámetro, base de un cono con vértice A. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. O(9,6,17.5), V(9,6,11.15); C(10,5,17.5), A(10,5,12.5).

PROBLEMA 14.2: J es el vértice de un cono recto que tiene una base horizontal de 7.5cm de diámetro con centro O.K es el vértice de otro cono recto que tiene una base horizontal de 7.5cm de diámetro, con centro C. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. J(10,7.5,15), C(10,1,15); K(11.5,1,14.5), C(11.5,9,14.5).

PROBLEMA 14.3: M es el centro de un círculo frontal de 5cm de diámetro, base de un cono recto con vértice V. R es el centro de un círculo frontal de 7.5cm de diámetro, base de otro cono que tiene el vértice A. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. M(9,6,11.15), V(9,6,17.5); R(10,5,17.5), A(10,5,12.5).

PROBLEMA 14.4: V es el vértice de un cono recto que tiene una base horizontal de 7.5 cm de diámetro con centro C. B es el vértice de otro cono recto que tiene una base horizontal de 9cm de diámetro con centro en K. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. V(7.5, 9,15), C(7.5,2.5,15); B(9,8,14), K(9,2.5,14).

PROBLEMA 14.5: O es el centro de un círculo frontal de 6cm de diámetro, base de un cono oblicuo cuyo vértice es V. C es el centro de un círculo frontal de 5cm de diámetro, base de un cono con vértice A. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. O(5,5,20), V(10,9,16.5); C(10,7.5,20), A(2.5,6,12.5)

PROBLEMA 14.6: J es el vértice de un cono cuya base es el círculo horizontal de 7,5 cm de diámetro con centro L. K es el vértice de otro cono cuya base es el círculo horizontal de 6cm de diámetro con centro M. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. J(10,7.5,12.5), L(16.5,2.5,14.5); K(14,10,14), M(12.5,2.5,15).

PROBLEMA 14.7: O es el centro de un círculo horizontal de 3cm de radio, base de un cono de vértice V. C es el centro de un círculo horizontal de 5cm de diámetro, base de un cono de vértice B. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. O(16,13,18), V(12,7,24); C(10,13,20), B(17,4,24)

PROBLEMA 14.8: J es el centro de un círculo horizontal de 7.5cm de diámetro, base de un cono cuyo vértice es S. K es el centro de la base horizontal de 6cm de diámetro de otro cono con vértice R. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. J(6,2.5,14.5), S(12.5,9,15); K(12,2.5,13), R(5,9,17).

PROBLEMA 14.9: A es el centro de un círculo frontal de 7.5cm de diámetro, base de un cono cuyo vértice es B. D es el centro de la base frontal de 7.5cm de diámetro de otro cono con vértice C. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A (5,524), B(11.5,14,16.5); C(4,12,16,5), D (14,7.5,24).

PROBLEMA 14.10: A es el vértice de un cono y C es el centro de su base horizontal de 5cm de diámetro. D es el centro de la base horizontal de 6cm de diámetro de otro cono cuyo vértice es B. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **A(5,10,14), C(12.5,2.5,15.5); d(5.5,2.5,15), B(10,7.5,14.5).**

PROBLEMA 14.11: O es el centro de un círculo frontal de 3cm de radio, base de un cono de vértice V. C es el centro de un círculo frontal de 2.5cm de radio, base de un cono de vértice B. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **O(4,8,13), V(8,2,19); B(3,2,22), C(10,6,13).**

PROBLEMA 14.12: C es el centro de un círculo horizontal de 6cm de diámetro, base de un cono de vértice V. D es el centro de un círculo horizontal de 5cm de diámetro, base de otro cono de vértice A. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **C(5,2.5,14), V(12..5,9,22); A(6,9,20), D(11.5,2.5,14).**

PROBLEMA 14.13: V es el vértice de un cono y O es el centro de su base horizontal de 7,5cm de diámetro. A es el centro de la base horizontal de 7.5cm. de diámetro de otro cono cuyo vértice es B. Hallar la intersección de las superficies mostrando completamente la visibilidad hacer la tabla de visibilidad. **O(5,7.5,15), V(15,1,12.5); A(12.5,7.5,20), B(9,1,9).**

PROBLEMA 14.14: A es el centro de un círculo horizontal de 5cm de diámetro, base de un cono de vértice B. D es el centro de un círculo frontal de 5cm de diámetro, base de otro cono de vértice C. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **A(5,3,17.5), B(12.5,12.5,15); C(7.5,10.5,12), D(12.5,4,21.5).**

PROBLEMA 14.15: C es el centro de un círculo horizontal de 6cm de diámetro, base de un cono de vértice V. A es el centro de un círculo frontal de 5cm de diámetro, base de otro cono de vértice B. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **C(5,2.5,14), V(12.5,9,22); A(6,9,20), B(11.5,2.5,14).**

PEROBLEMA 14.16: V es el vértice de un cono recto y O es el centro de su base horizontal de 7,5 cm de diámetro. Q es el centro de la base frontal de 7,5cm de diámetro de otro cono cuyo vértice es A. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **V(9.5,7.5,15.5), O(9.5,0.5,15.5); Q(8,4,20), A(8,4,12.5).**

PROBLEMA 14.17: L es el vértice de un cono y M es el centro de su base de perfil de 6cm de diámetro. J es el vértice de otro cono y K es el centro de su base horizontal de 7,5cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **L(12,4,15.5), M(20,4,15.5); J(16.5,9,14), K(16.5,0.5,16.5).**

PROBLEMA 14.18: S es el centro de un círculo frontal de 7,5cm de diámetro, base de un cono recto con vértice R. J es el vértice de otro cono recto que tiene una base de perfil de 6cm de diámetro con centro K. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **S(4,4,20), R(4,4,12.5); J(7,5,15.5), K(0.5,5,15.5).**

PROBLEMA 14.19: JK es el eje de un tubo de 5cm de diámetro y LM es el eje de un tubo de 40cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **ESCALA: 1:10. J(5,10,15), K(5,2,15); L(5,4.5,15), M(10.5,7.5,15).**

PROBLEMA 14.20: JK es el eje de un tubo de 30cm de diámetro, y RS es el eje de un tubo de 40cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. ESCALA: 1:10.
J(5,4,12.5), K(15,4,17.5); R(7.5,2.5,17.5), S(12.5,2.5,12.5).

PROBLEMA 14:21: Una conexión de tubería está hecha de tres tubos circulares rectos, como sigue: AB es el eje de un tubo de 25 cm de diámetro; CD es el eje de un tubo de 30cm de diámetro; y JK es el eje de un tubo de 20cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. ESCALA: 1:10.
A(5.5,5.5,15), B(10,5.5,17.5); C(15,4.5,12.5), D(10,4.5,17.5), J(10,5,20), K(10,5,11.5).

PROBLEMA 14:22: Una conexión de tubería está hecha de tres tubos circulares rectos, como sigue: CD y EP son los ejes de dos tubos de 30cm de diámetro cortados para acomodarse al tubo de 40cm d diámetro, del cual AB es el eje. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. ESCALA: 1:10.
C(10,2.5,17.5), D(14,6,17.5); E(5,5,16.5), F(10,2.5,16.5), A(10,2.5,14), B(10,2.5,20).

PROBLEMA 14:23: Una conexión de tubería tiene las líneas centrales AB y CD. El diámetro del tubo AB mide 40cm y el de CD mide 30cm. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
ESCALA: 1:10. A(7.5,7.5,17.5), B(15,2.5,7.5); C(10,5,17), D(14,10,17).

PROBLEMA 14:24: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 4cm de diámetro. CD es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 5cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(7.5,6,20), B(15,2.5,15); C(15,7.5,20), D(7.5,2.5,12.5).

PROBLEMA 14:25: JK y LM son los ejes de dos cilindros oblicuos que tienen bases horizontales de 5cm. de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
J(6,1,17.5), K(14,7.5,11.5); L(15,0.5,17.5), M(5,7.5,11.5).

PROBLEMA 14:26: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 5cm de diámetro, CD es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 4cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(6,1,18.5), B(15,8.5,12.5); C(4.5,8.5,13), D(13,1,18.5).

PROBLEMA 14:27: CH es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 5cm de diámetro; y EF es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 4cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. G(5,7.5,11.5), H(14,2.5,19); L(5,2.5,20), F(14,9,11.5).

PROBLEMA 14:28: AB y BC son los ejes de dos cilindros oblicuos que tienen bases horizontales de 7,5cm y 6cm respectivamente de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
A(6,9,20.5), B(10,5,15.5), C(15,9,19.5).

PROBLEMA 14:29: VB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 3cm de radio. TE es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 2.5 cm de radio. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **V(4,1,15), B(13,10,21); T(12,1,15), E(5,8,21).**

PROBLEMA 14:30: VB y TE son los ejes de dos cilindros oblicuos que tienen bases horizontales de 5 y 6 cm. de diámetro, respectivamente. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
V(4,1,13), B(11,9,21), T(13,1,15), E(4,8,21).

PROBLEMA 14:31: VB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 2.5cm de radio. AG es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 3cm de radio. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hallar la tabla de visibilidad.
V(14,10,24), B(5,4,15); A(6,10,24), G(13,4,17).

PROBLEMA 14:32: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 5cm de diámetro. CD es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 5cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **A(5,3,21), B(12.5,12.5,15); C(7.5,10.5,12), D(12.5,4,21.5).**

PROBLEMA 14:33: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 6cm de diámetro. CD es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 5cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **A(5,3,21), B(13.5,13.5,16); C(7.5,10.5,12), D(13.5,4,22.5).**

PROBLEMA 14:34: JK es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 5cm de diámetro. LM es el eje de otro cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 6cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **J(6,2,18.5), K(14,8.5,12.5); L(15,1,18.5), M(5,8.5,12.5).**

PROBLEMA 14:35: O es el centro de un círculo de 9cm de diámetro, base de un cono recto de 5,5cm de altura. A es el centro de la base, de 4.5cm de diámetro, de un cilindro recto vertical que intercepta al cono. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. **O(10,2.5,15); A(9,8,14).**

PROBLEMA 14:36: CD es el eje de un cilindro de 6cm de diámetro. V es el vértice de un cono recto que tiene una base frontal de 7,5 cm de diámetro centrada en Q. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
C(9.5,5.5,11.5), D(9.5,5.5,17.5), V(11.5,5,12.5), O(11.5,5,17.5).

PROBLEMA 14:37: VB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales circulares de **2.5cm** de radio. **O** es el centro de un círculo horizontal de 3cm de radio, base de un cono oblicuo con vértice en **F**. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
V(9,1,16), B(16,8,20); O(16,1,13), E(9,10,21).

PROBLEMA 14:38: VB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales circulares de 3,5cm de radio. O es el centro de un círculo horizontal de 2.5cm de radio, base de un cono oblicuo, con vértice en E. Hallar la intersección de las superficies mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
V(9,2,17), B(16,9,21); O(16,2,14), E(9,11,22).

PROBLEMA 14:39: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 2.5cm de radio. O es el centro de un círculo frontal de 3cm de radio, base de un cono oblicuo de vértice V. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(12,9,23), E(6,5,16); O(5,12,23), V(12,5,15).

PROBLEMA 14:40: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 5cm de diámetro. C es el centro de un círculo horizontal de 6cm de diámetro, base de un cono oblicuo de vértice V. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
A(6,9,20), B(10.5,2.5,14); C(5,2.5,14), V(12.5,9,22).

PROBLEMA 14:41: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 7,5cm de diámetro, O es el centro de un círculo horizontal de 7,5 cm de diámetro, base de un cono oblicuo de vértice, V. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(12.5,7.5,22), B(9,1,11), O(5,7.5,17), V(15,1,14.5).

PROBLEMA 14:42: CD es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 5cm de diámetro. A es el centro de un círculo horizontal de 5cm de diámetro, base de un cono oblicuo de vértice, V. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la habla de visibilidad.
A(5,3,17.5), V(12.5,12.5,15); C(7.5,10.5,12), D(12.5,4,21.5).

PROBLEMA 14:43: AD es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases horizontales de 5cm de diámetro. D es el centro de un círculo frontal de 5cm de diámetro, base de un cono oblicuo de vértice C. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
A(5,3,17.5) B(13.5,12.5,15); C(8.5,10.5,12), D(13.5,4,22.5).

PROBLEMA 14:44: AB es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 3cm de diámetro. D es el vértice de un cono y C es el centro de su base de perfil d 4cm de diámetro. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad. A(11.5,5,17.5), B(15,9.5,21.5); C(10.5,9.5,21.5), D(15,6,17).

PROBLEMA 14:45: CD es el eje de un cilindro oblicuo que tiene bases frontales de 6cm de diámetro, A es el centro de un círculo horizontal de 5cm de diámetro, base de un cono oblicuo de vértice B. Hallar la intersección de las superficies, mostrando completamente la visibilidad. Hacer la tabla de visibilidad.
C(7.5,10.5,12), D(12.5,4,21.5); A(5,3,17.5), B(12.5,12.5,15).

CAPÍTULO 15

DESARROLLOS

15.1 INTRODUCCION.

El desarrollo de una superficie es la figura plana que se obtiene al desdoblarse o desenrollarse su superficie total en un plano. La figura plana resultante da el tamaño real de todas las superficies de la forma, conectadas de tal manera, que al doblarlas o construirlas se obtiene la forma deseada. Sólo las superficies constituidas por planos o por superficies de curvatura simple pueden ser desarrolladas. Las superficies de doble curvatura y las superficies alabeadas no son desarrollables, pero en algunos casos pueden serlo en forma aproximada. Las aplicaciones prácticas de los desarrollos se presentan en trabajos de la industria aeronáutica, en trabajos en hojas metálicas delgadas como las que se usan en calefacción y ventilación y en la hechura de modelos o patrones.

La figura 15.1(a) y (b) muestran el enrollamiento imaginario de la superficie de un prisma y pirámide recta con un plano.

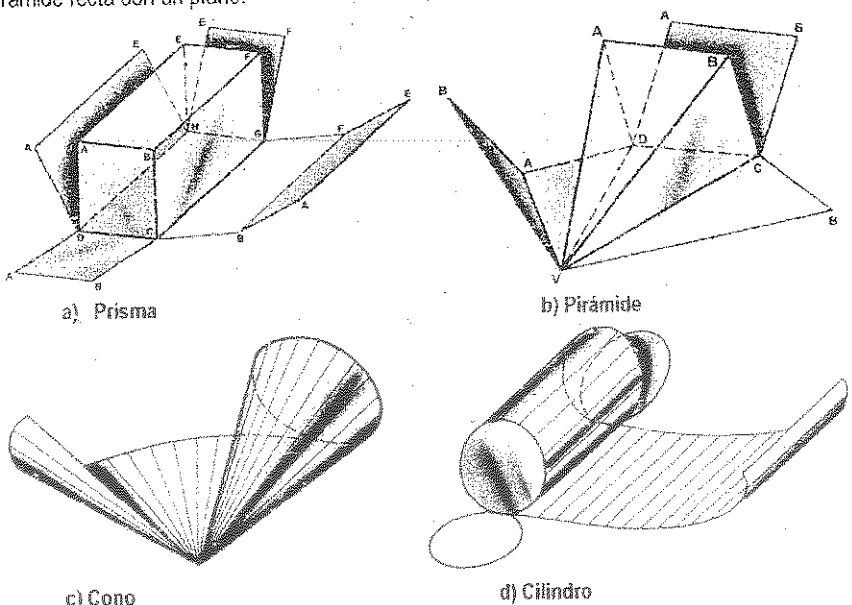


Fig. 15.1 Desarrollo de superficies.

15.2 CLASIFICACION DE LOS DESARROLLOS

Los desarrollos se clasifican en cuatro grupos generales según el tipo de superficie o el método empleado para construirlos, siendo estás las siguientes:

1. Método Radial: Método que se utiliza para pirámides y conos, que se caracterizan por el hecho de que las aristas o elementos laterales de cada uno, se cruzan en un punto común llamado vértice; ver la figura 15.2.

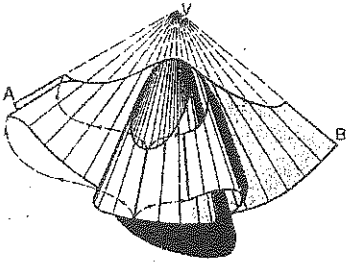


Fig. 15.2 Método Radial.

2. Método de Lineas Paralelas: Método que se utiliza para prismas y cilindros, que se caracterizan por tener aristas o elementos laterales de cada uno, paralelos; ver la figura 15.3.

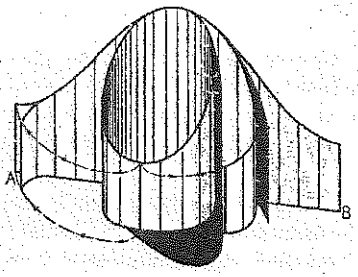


Fig. 15.3 Método por Líneas Paralelas.

3. Método por Triangulación: Método que consiste en dividir una superficie en una serie de áreas triangulares que produce un desarrollo exacto para una superficie plana y un desarrollo aproximado para las de otro tipo; ver la figura 15.4.

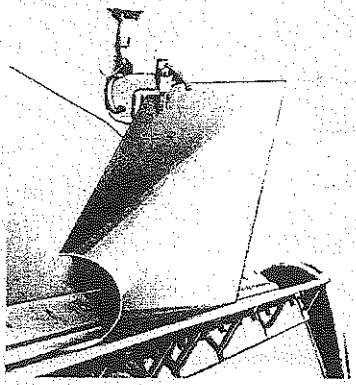


Fig. 15.4 Método por Triangulación.

4. Método Aproximado: Método que se emplea para las superficies alabeadas y las de doble curvatura, y consiste en dividir unidades que puedan desarrollarse por cualquiera de los tres métodos anteriores; ver la figura 15.5.

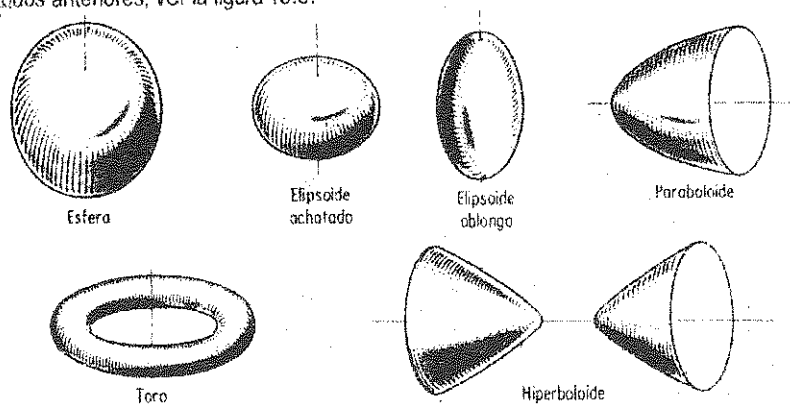


Fig. 15.5 Superficies de doble curvatura.

15.3 MÉTODO RADIAL.

Las pirámides y los conos se caracterizan por que las aristas o elementos laterales, convergen hacia un punto común o vértice. En general, se construye un desarrollo por el método de líneas radiales como una serie de triángulos; y el tamaño real de cualquier triángulo se consigue encontrando las diversas dimensiones verdaderas de los lados.

Para encontrar las longitudes verdaderas de las aristas laterales de una pirámide o generatrices de un cono, se utiliza el método de DIFERENCIA DE COTAS y que lo reduciremos al Diagrama de Longitudes Verdaderas, que se dibuja en alineamiento horizontal con la vista frontal. Desde la línea vertical A' X' se coloca la longitud de la vista superior de la recta midiendo horizontalmente a la derecha de X', tal como se muestra en la figura 15.6. Entonces, A' B' es la dimensión verdadera de la recta dada.

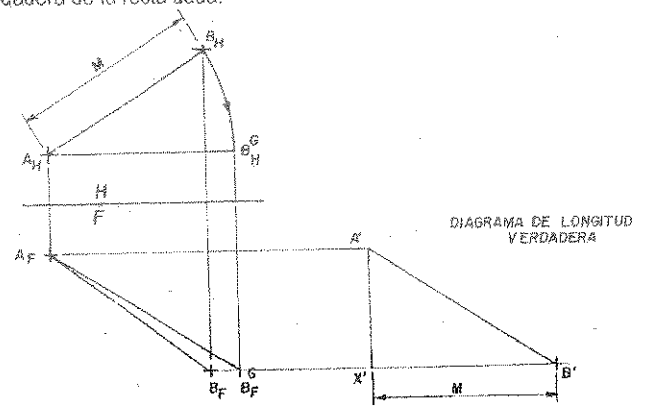


Fig. 15.6 Método del diagrama de longitud verdadera.

15.3.1 DESARROLLO DE UNA PIRAMIDE RECTA TRUNCADA.

Para desarrollar una pirámide recta truncada, se debe determinar las longitudes verdaderas de cada una de las aristas laterales de la pirámide y deduciendo de ellas la parte superior que rodea al vértice. Este procedimiento se aplica siempre que el vértice sea accesible, de lo contrario se debe emplear el método de triangulación. En la figura 15.7 se dan las vistas horizontal y frontal de una pirámide recta truncada de base cuadrangular ABCD, se desea desarrollar la superficie lateral de la pirámide recta truncada.

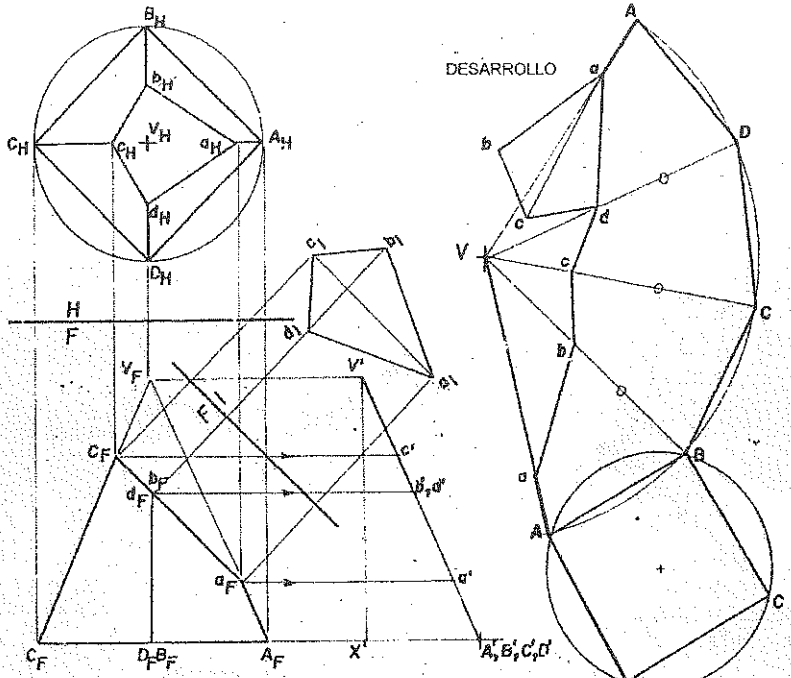


Fig. 15.7 Desarrollo de una pirámide recta truncada.

PROCEDIMIENTO:

1. Para determinar la longitud verdadera de las seis aristas laterales, utilizaremos el diagrama de longitudes verdaderas, en la cual se toma un eje vertical V' X' alineado horizontalmente con la vista frontal, en la cual se pone la longitud de cada arista lateral de la proyección horizontal, midiendo horizontalmente a la derecha de X'.
2. Para encontrar las longitudes verdaderas de la parte truncada, se trazan líneas horizontales desde la vista frontal hacia el diagrama de longitud verdadera.
3. Para empezar el desarrollo se toma la arista mas corta (V' F') del diagrama de longitud verdadera y llevada a una posición conveniente VF, de donde trazamos arcos como VE y FE y se completa el desarrollo agregando las otras caras, desde V en el desarrollo se trazan V'a', V'b', etc., y se descarta la porción Va, Vb, etc.

15.3.2 DESARROLLO DE UNA PIRAMIDE OBLICUA TRUNCADA.

Para desarrollar una Pirámide oblicua truncada, se deben determinar las dimensiones reales de todas las aristas enteras de la pirámide y se descarta la parte que no se necesita. En la figura 15.8 se dan las vistas horizontal y frontal de una pirámide oblicua truncada de base hexagonal **ABCDEF**, se desea desarrollar la superficie lateral de la pirámide oblicua truncada.

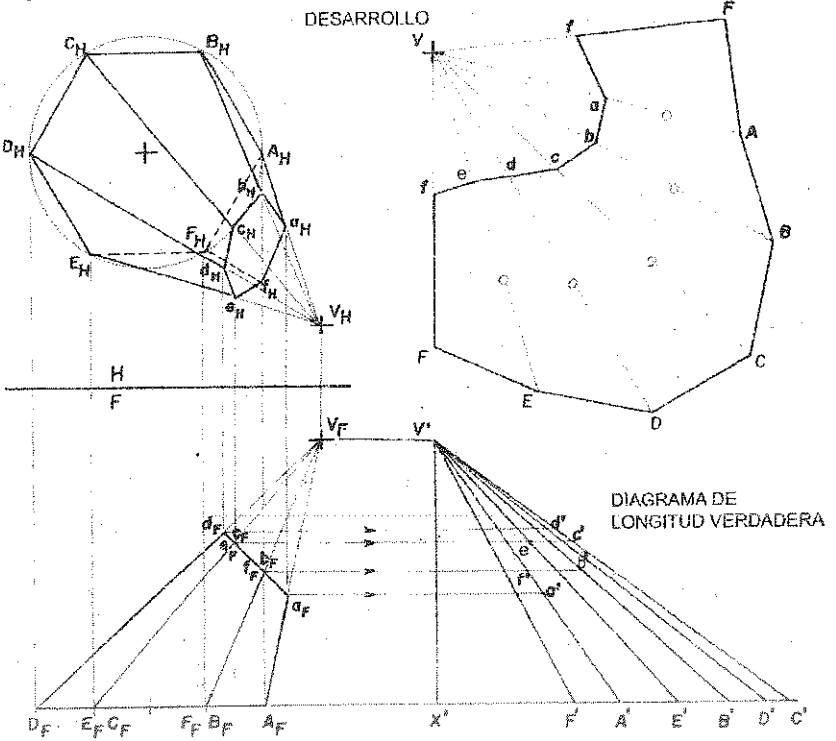


Fig. 15.8 Desarrollo de una pirámide oblicua truncada.

PROCEDIMIENTO:

1. Las aristas **VA** y **VC** aparecen en su dimensión verdadera; pero para obtener la longitud verdadera de cualquier arista, utilizaremos el método del diagrama de longitud verdadera.
2. Para hacer el desarrollo de la pirámide completa se traza un arco con radio igual a **V' A'**, luego se trazan las cuerdas **AB**, **BC**, etc., que son los lados de la base cuadrangular que figuran en su dimensión verdadera en la proyección horizontal.
3. La porción del vértice hasta el plano cortante podrá ser deducida sobre cada línea radial, trazando las longitudes verdaderas de **V' a'**, **V' b'**, etc., cuyas dimensiones verdaderas se encuentran trazando una línea horizontal desde cada punto de la vista frontal a la línea en dimensión verdadera.

15.3.3 DESARROLLO DE UN CONO RECTO TRUNCADO.

Para desarrollar un cono recto truncado, se debe dividir en un número dado o finito de pequeños sectores que semejan triángulos, luego se determinan su tamaño real y como resultado se obtiene un desarrollo aproximado. Si se requiere mayor precisión, las dimensiones del desarrollo deberán calcularse como sigue:

Longitud de circunferencia = $2\pi R$

$$\text{Longitud del arco del sector} = \frac{\theta}{360} \times 2\pi S$$

Por lo tanto: $2R = \frac{\theta}{360} \times 2S$ $\qquad \theta = \frac{R}{S} \times 360$

Siendo: θ = Angulo del Sector
R = Radio de la base
S = Altura lateral

En la figura 15.9 se dan las vistas horizontal y frontal de un cono recto truncado, se desea desarrollar la superficie lateral del cono dado.

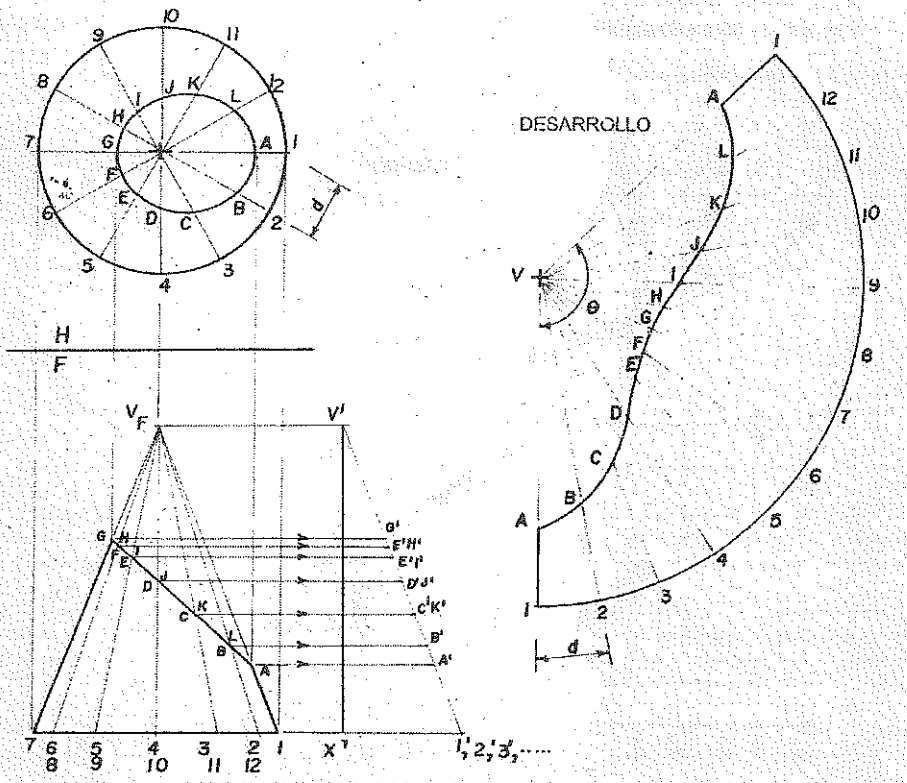


Fig. 15.9 Desarrollo de un cono recto truncado.

PROCEDIMIENTO:

1. En la vista horizontal la base del cono se divide en doce partes iguales, luego estos puntos se proyectan a la vista frontal.
2. Se traza un arco con radio igual a la generatriz del contorno que representa la dimensión verdadera de todas las generatrices del cono.
3. Sobre este arco se marcan los 12 intervalos iguales o se marca el ángulo θ y se divide en 12 partes iguales.
4. Para completar el cono truncado, los elementos e la base superior se proyectan en forma horizontal al diagrama de longitud verdadera; una vez conocida las dimensiones verdaderas de cada uno de estos elementos se trasladan al desarrollo.

$$\theta = \frac{2}{5.4} \times 360; \quad \theta = 133.33°$$

15.3.4 DESARROLLO DE UN CONO OBLICUO TRUNCADO.

Para desarrollar un cono oblicuo truncado, sus elementos no son de la misma longitud, por lo tanto la dimensión verdadera de cada elemento se debe determinar separadamente. La base del cono determinará la longitud del desarrollo, pero esta ya no se puede desarrollar en la forma de arco circular. En la figura **15.10** se dan las vistas horizontal y frontal de un cono oblicuo truncado, se desea desarrollar la superficie lateral del cono dado.

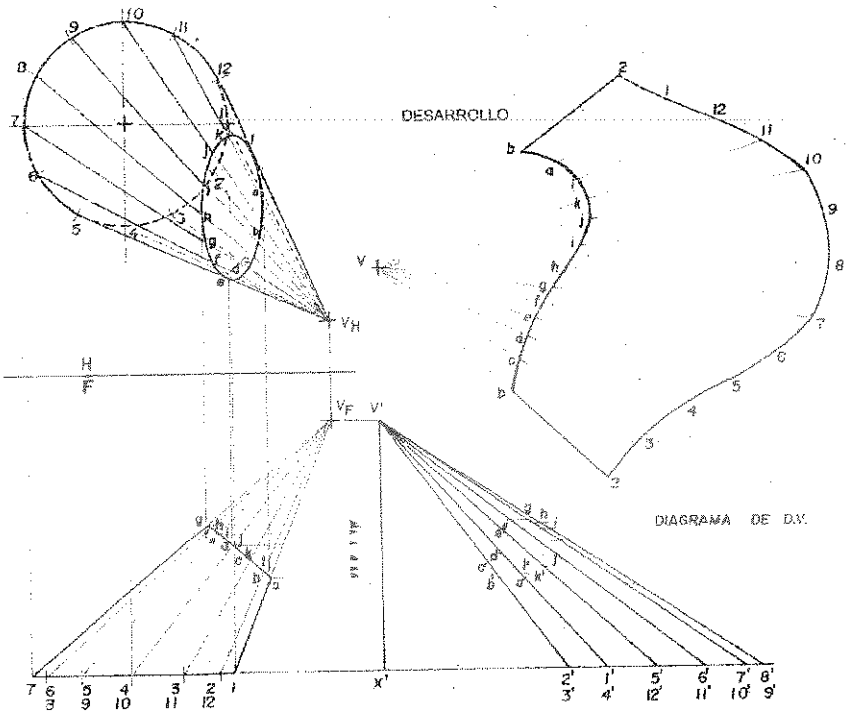


Fig. 15.10 Desarrollo de un cono oblicuo truncado.

15.4 DESARROLLO CON LINEAS PARALELAS.

Los sólidos que se caracterizan por tener elementos o aristas laterales paralelos, como los prismas y los cilindros; se desarrollan conservando el paralelismo. Interviene también la perpendicularidad en cualquier sección de los sólidos comunes mencionados, tomada en ángulos rectos con respecto a las aristas laterales, se desarrolla en una línea recta que se denomina línea de despliegue o de desarrollo, y todas las aristas o generatrices en el desarrollo son perpendiculares a ella.

15.4.1 DESARROLLO DE UN PRISMA RECTO TRUNCADO.

Para desarrollar un prisma recto truncado, se deben conocer: Las dimensiones verdaderas de todas las aristas laterales, así como las formas reales de las bases superior e inferior; las posiciones relativas de las aristas laterales con respecto a un corte recto y el perímetro del corte recto del prisma o las distancias perpendiculares entre las aristas laterales. En la figura 15.11 se dan las vistas horizontal y frontal de un prisma recto truncado de base hexagonal; se desea desarrollar la superficie lateral del prisma dado.

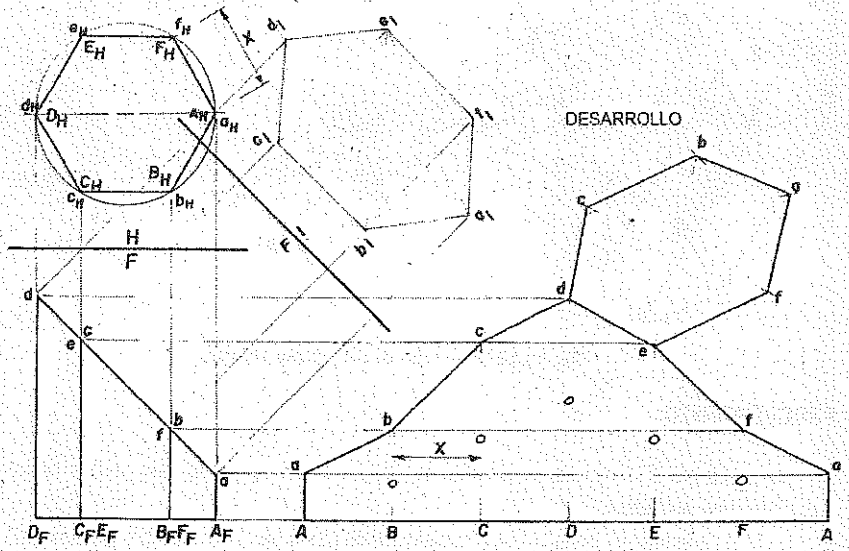


Fig. 15.11 Desarrollo de un prisma recto truncado.

PROCEDIMIENTO:

1. Las proyecciones dadas en la figura **15.11** muestran las dimensiones verdaderas de las aristas laterales del prisma.
2. Se traza la línea de desarrollo, a lo largo de la cual se deberá medir la distancia del perímetro de la base del prisma, empezando con la arista más corta y se miden las distancias **AB, BC,** etc., tomadas de la vista de planta donde aparecen en sus dimensiones verdaderas.

3. Trace las aristas perpendiculares a la línea de desarrollo y con sus DV tomadas de la vista frontal. Una los puntos a, b, etc., para completar el desarrollo.

15.4.2 DESARROLLO DE UN PRISMA OBLICUO.

Para desarrollar un prisma oblicuo, se deben conocer las dimensiones verdaderas de las aristas laterales, luego en cualquier lugar conveniente de la vista frontal, se introduce el plano de corte perpendicular a las aristas laterales que determina la sección recta 1, 2, 3, 4 que se desarrollará a lo largo de la línea de desarrollo. En la figura 15.12 se dan las vistas horizontal y frontal de un prisma oblicuo de base cuadrangular, se desea desarrollar la superficie lateral del prisma dado.

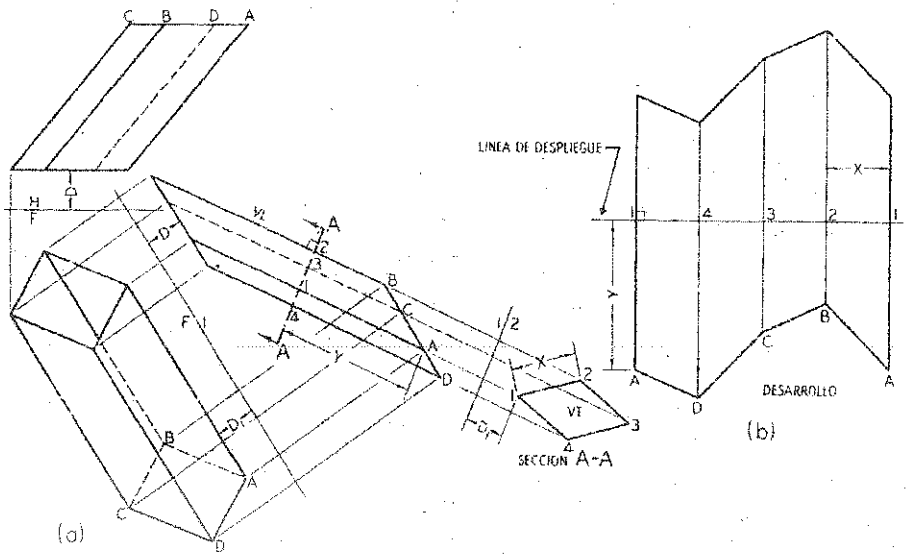


Fig. 15.12 Desarrollo de un prisma oblicuo.

PROCEDIMIENTO:

1. Se construye el diagrama de longitud verdadera en la cual todas las aristas aparecen en dimensión verdadera.
2. En la vista frontal, se traza la vista de canto de un plano de corte arbitrario perpendicular a las generatrices que determinan la sección recta 1, 2, 3, 4 que proyectado horizontalmente al diagrama adjunto determinamos la dimensión verdadera de cada punto con respecto a las bases.
3. Se construye la línea de desarrollo igual al perímetro de la sección recta poniendo las longitudes de sus cuatro lados. En los puntos de división se trazan perpendiculares y se miden la distancia U y V arriba y abajo respectivamente de la línea de desarrollo.

4. Se unen los puntos con líneas rectas para completar el desarrollo de la superficie del prisma oblicuo dado.

15.4.3 DESARROLLO DE UN CILINDRO RECTO TRUNCADO.

Para desarrollar un cilindro recto truncado se deben conocer las dimensiones verdaderas de los elementos del cilindro que serán variables, las formas reales de las bases superior e inferior y la línea de desarrollo debe ser igual a la circunferencia del cilindro. En la figura 15.13 se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro recto truncado, se desea desarrollar la superficie lateral del cilindro dado.

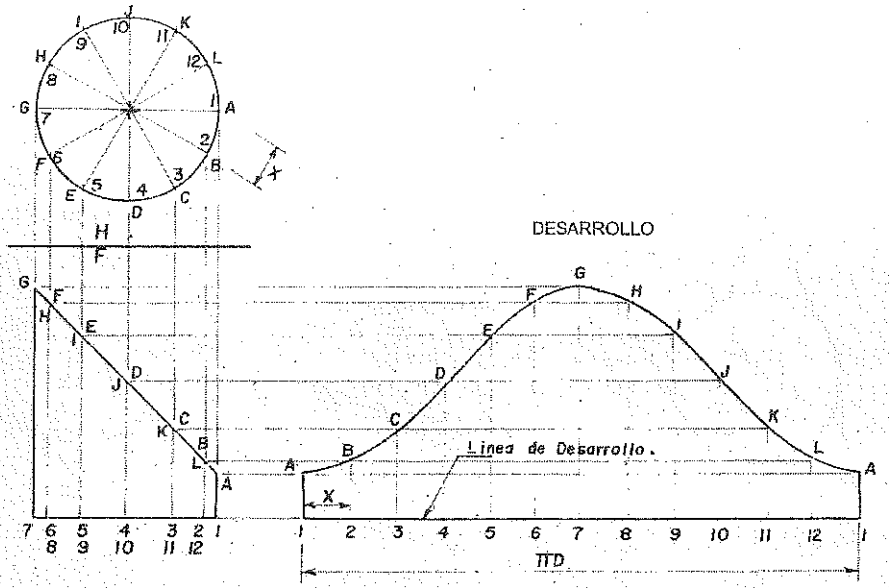


Fig. 15.13 Desarrollo de un cilindro recto truncado.

PROCEDIMIENTO:

1. En la vista horizontal se divide la circunferencia en un número conveniente de partes iguales, en este caso, doce; luego se proyectan estos puntos a la vista frontal en donde se muestran en dimensión verdadera.
2. Todos estos elementos terminan en el extremo truncado del cilindro. Se traza una línea de desarrollo de longitud igual a la circunferencia del cilindro ($L = \pi D$), luego dividimos esta longitud en doce partes iguales.

   $L = \pi d = \pi \times 4$

   $L = 12.56$ cm.
3. Otro método aproximado es empleando la cuerda X que se llevará 12 veces a partir de 1 sobre la línea de desarrollo.

4. Por cada uno de los puntos numerados sobre esta línea se trazan rectas perpendiculares de longitudes iguales a los elementos del cilindro que se trasladarán desde la proyección frontal, obteniendo los puntos **A, B, C,** etc., que unidos por una cuerda suave continúan completando el contorno del desarrollo buscado.

15.4.4 DESARROLLO DE UN CILINDRO OBLICUO.

Para desarrollar un cilindro oblicuo, se deben conocer las dimensiones verdaderas de las generatrices, luego en cualquier lugar conveniente de la vista frontal (vista de canto del cilindro oblicuo), se introduce el plano de corte perpendicular a las aristas laterales que determina la sección recta 1, 2, 3, etc., que se desarrollará a lo largo de la línea de desarrollo. En la figura 15.14 se dan las vistas horizontal y frontal de un cilindro oblicuo que tiene círculos horizontales por bases; se desea desarrollar la superficie lateral del cilindro dado.

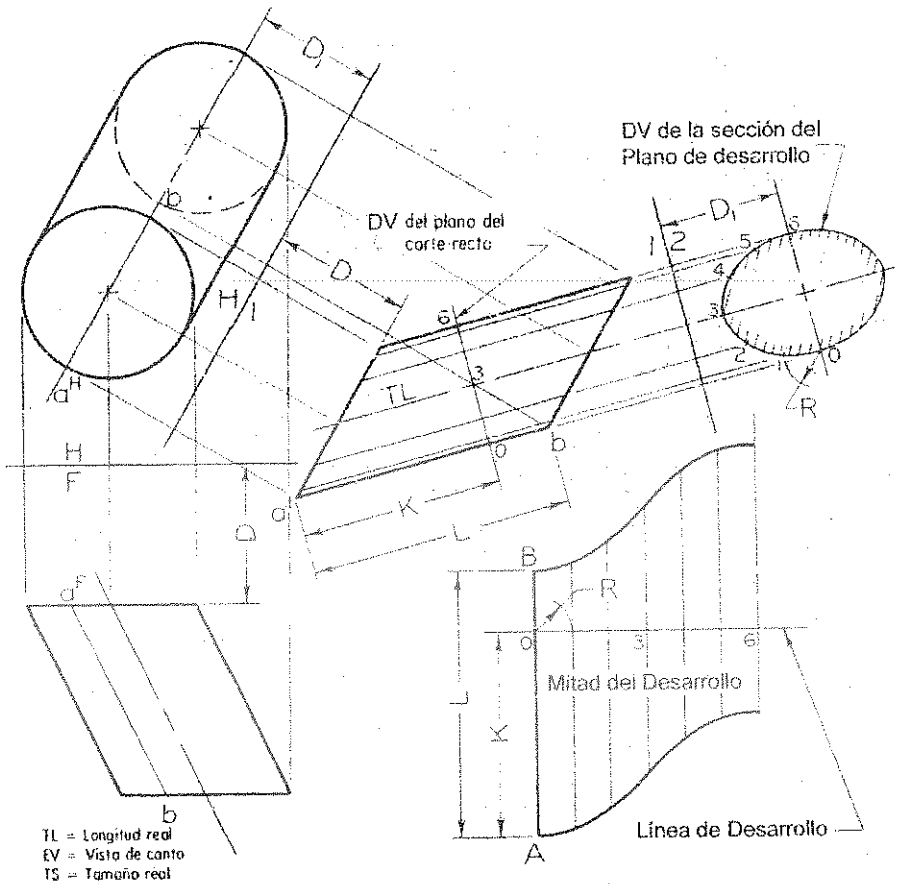


Fig. 15.14 Desarrollo de un cilindro oblicuo.

PROCEDIMIENTO:

1. Se construye el diagrama de dimensión verdadera que muestre las generatrices del cilindro en dimensión verdadera.
2. En la vista frontal se traza la vista de canto de un plano de corte arbitrario perpendicular a las generatrices que determina la sección recta 1, 2, 3, etc., que proyectado horizontalmente al diagrama adjunto determinamos la dimensión verdadera de cada punto con respecto a las bases.
3. Se construye la línea de desarrollo cuya longitud aproximada se consigue midiendo sucesivamente las cuerdas 1-2, 2-3, etc.
4. En los puntos de división se trazan perpendiculares y se miden la distancia U y V arriba y abajo respectivamente de la línea de desarrollo. Se unen los puntos con una línea curva continua, obteniéndose así el desarrollo deseado.

15.5 DESARROLLO POR TRIANGULACION.

La triangulación consiste en dividir una superficie en un número de triángulos y transferirlos a un desarrollo. Las formas más comunes son las piezas de transición en la cual se utiliza este método. Una pieza de transición es la que se usa para conectar dos extremos de diferente forma, diferente tamaño o en posición inclinada. Generalmente se componen de superficies planas y superficies cónicas. Aplicaciones: en las construcciones para acondicionamiento de aire, calefacción, ventilación y otras similares.

15.5.1 DESARROLLO DE UNA PIEZA DE TRANSICION DE CONDUCTOS RECTANGULARES.

Esta pieza de transición se subdivide cada una de las cuatro superficies planas en dos triangulares y se desarrolla la pieza cuando se conocen las dimensiones verdaderas de los lados de los triángulos. En la figura **15.15** se dan las vistas horizontal y frontal de una tolva cuyas aberturas son dos conductos rectangulares desviados; se desea desarrollar esta pieza de transición.

PROCEDIMIENTO:

1. En cada una de las cuatro superficies planas trazamos diagonales para dividirlos en dos triángulos, luego se construye el diagrama de dimensión verdadera alineado horizontalmente con la vista frontal, para obtener las dimensiones verdaderas de las aristas y de las diagonales a utilizar en el desarrollo.
2. En el desarrollo se traza primero la línea **DG** en **DV**, tomado del diagrama de dimensión verdadera.
3. El punto **A** se localiza trazando desde **G** como centro un arco de radio **G'A'** y desde el punto **D** como centro y con radio D_HA_H otro arco que cortará al anterior en el unto **A**.

4. El punto E se localiza por la intersección de los arcos trazados desde los puntos A y H. los restantes triángulos del desarrollo, se van trazando en forma similar hasta completar el desarrollo total.

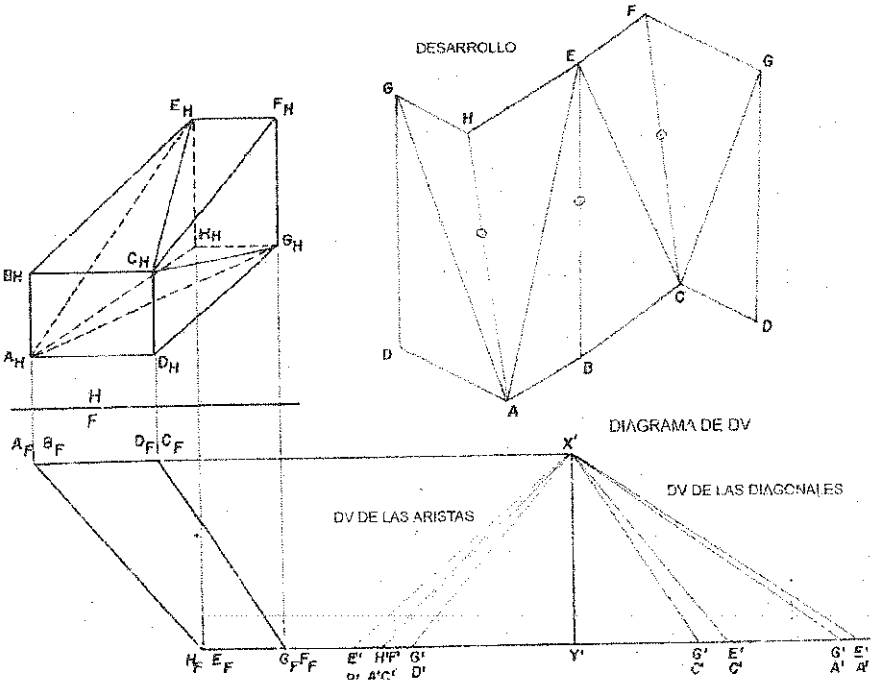


Fig. 15.15 Desarrollo por triangulación de una tolva.

15.5.2 DESARROLLO DE UNA PIEZA DE TRANSICION QUE CONECTE DOS CONDUCTOS CIRCULARES.

Esta pieza de transición se asemeja a un cono oblicuo, y se supone que el vértice no puede usarse. Si los elementos se consideran suficientemente juntos, las líneas curvas que unen los extremos de los elementos forman un cuadrilátero que se divide por una diagonal en dos triángulos. Determinado las dimensiones verdaderas de las generatrices y de las diagonales se procede a desarrollar aproximadamente la superficie lateral del adaptador. En la figura 15.16 se dan las vistas horizontal y frontal de una pieza adaptadora cuyas extremos son dos conductos circulares horizontales, se desea desarrollar esta pieza de transición.

PROCEDIMIENTO:

1. Se localizan 12 elementos uniformemente espaciados sobre cada círculo que se conectan por generatrices.
2. Cada cuadrilátero formado se divide en dos triángulos trazando la diagonal.

3. Se construye el diagrama de dimensión verdadera para las generatrices y diagonales.
4. Partiendo del elemento A1, en el desarrollo, el punto B se localiza por la intersección de los arcos que se trazan desde A y 1 como centros; el punto 2 se localiza con los arcos que se trazan desde B y 1, etc.
5. Los restantes triángulos del desarrollo, se van trazando en forma similar hasta completar el desarrollo.

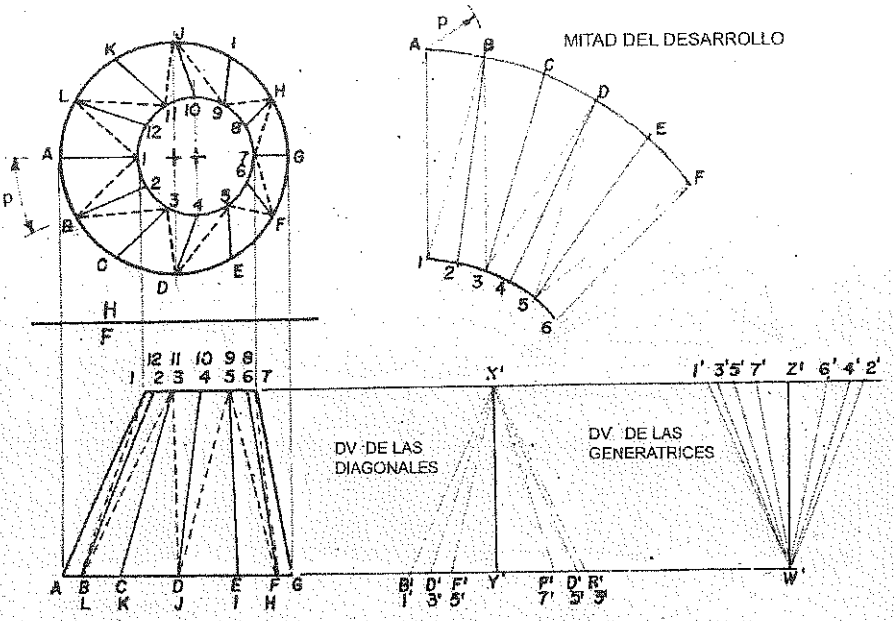


Fig. 15.16 Desarrollo de una pieza para conectar dos conductos circulares.

15.5.3 DESARROLLO DE UNA PIEZA DE TRANSICION DE CUADRADO A REDONDA.

Esta pieza de transición está compuesta de cuatro planos triangulares y cuatro conos oblicuos; y el desarrollo se consigue cuando se conoce las dimensiones verdaderas de los lados de las superficies triangulares y los lados de los pequeños triángulos aproximados, creados al subdividir las superficies cónicas. En la figura **15.17** se dan las vistas horizontal y frontal de una pieza adaptadora cuyas aberturas son un círculo horizontal con centro O y el cuadrado inclinado **ABCD**; se desea desarrollar esta pieza de transición.

PROCEDIMIENTO:

1. La base circular se divide en 12 partes iguales, y se trazan los elementos del cono desde cada uno de los cuatro vértices hasta las divisiones de la base circular.
2. Se construye el diagrama de dimensión verdadera para los elementos del cono.

3. La mitad del triángulo **Aa1** se desarrolla tomando la dimensión verdadera de **a1** a partir de a_F1, de la proyección frontal (recta frontal); y la dimensión verdadera de **Aa** tomada de A_HaH de la proyección horizontal (recta normal). En el diagrama de desarrollo con centro en a (asumido) trazamos la longitud **a1**, con centro en **a** y **1**, trazamos los arcos **1A** y **aA**; estos arcos se cortan en **A**.
4. El punto 2 se localiza con los arcos que se trazan desde A y 1, etc.
5. Los restantes triángulos del desarrollo, se van trazando en forma similar hasta completa el desarrollo total.

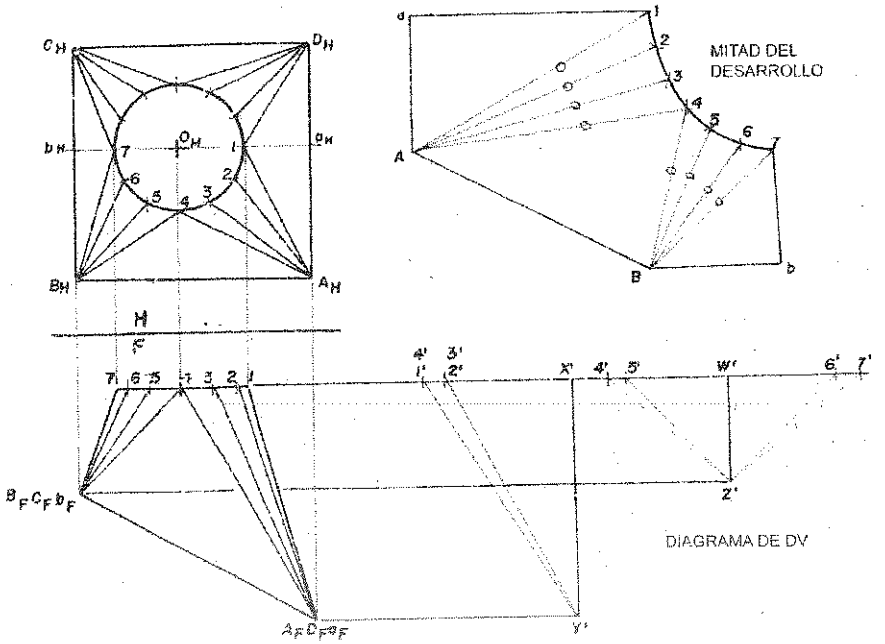
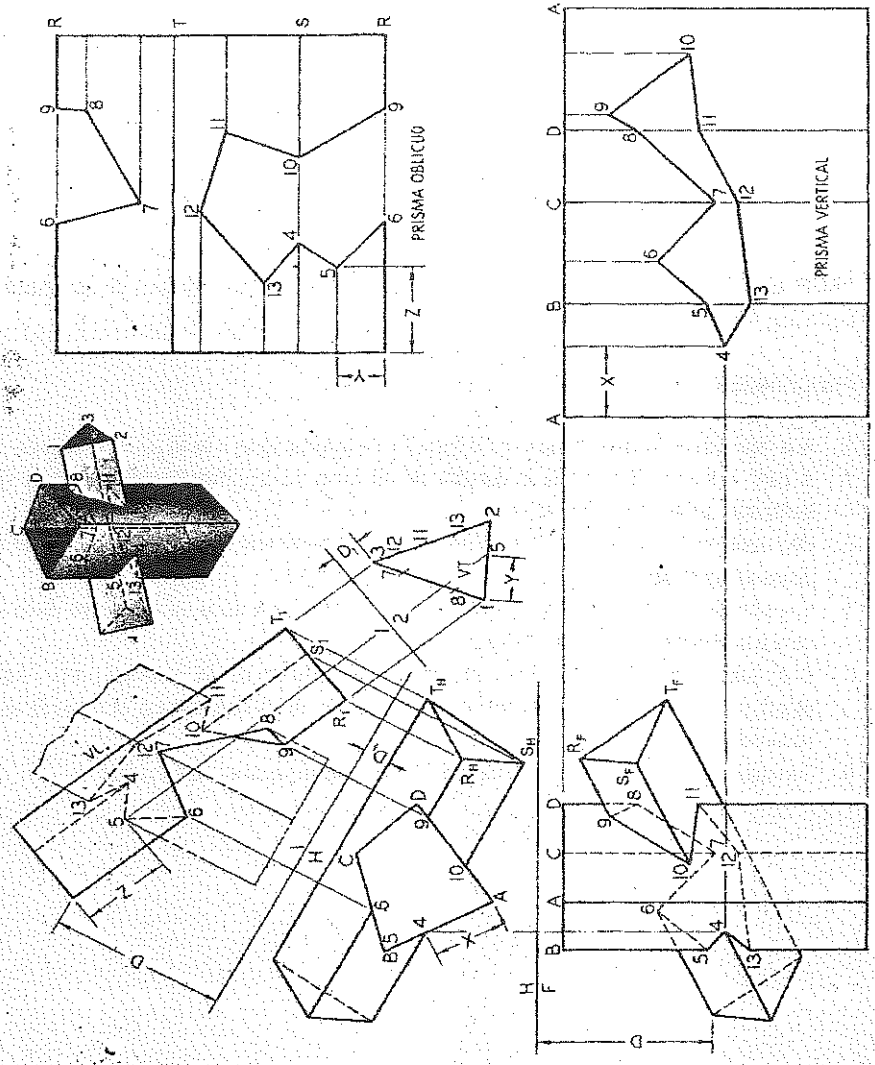


Fig. 15.17 Desarrollo de una pieza adaptadora.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 15.1: ABCD es la base superior de un prisma recto y RST es la base triangular de otro prisma oblicuo. Hallar el desarrollo con la intersección de los poliedros.

SOLUCION:



PROCEDIMIENTO:

1. La figura de intersección de los prismas se encuentra como se explicó en el Capítulo 13. Se construyen los desarrollos tal como se observa en las figuras 15.9 y 15.10.
2. Se muestran las dimensiones verdaderas de las aristas laterales del prisma recto en la vista frontal y el verdadero tamaño de su sección recta aparece en la vista horizontal.
3. Las dimensiones verdaderas de las aristas laterales del prisma oblicuo y de su sección recta aparecen en el plano de elevación y la dimensión verdadera de su sección recta en el plano auxiliar 1/2.
4. Se trazan líneas paralelas a las respectivas aristas laterales pasando por los vértices de la intersección. Luego, se localizan en los desarrollos en la misma forma que las aristas laterales.
5. Por ejemplo el punto 3 de la intersección se localiza con las distancias Y y Z, esto en el prisma oblicuo.

PROBLEMA 15.2: El rectángulo **JKLM** y el cuadrado **ABCD** son los extremos de una pieza de transición. Hacer su desarrollo.

PROCEDIMIENTO:

1. A la izquierda de la vista frontal trace la línea **XY** de longitud igual a la altura del adaptador.
2. A partir del punto **Y** (y hacia la derecha de él) tome las longitudes, medidas en la vista horizontal, de las aristas **BK**, **AJ**, etc.
3. Una estos puntos con el punto **X** en el diagrama de dimensiones verdaderas para obtener sus dimensiones reales de estas aristas.
4. Empezaremos el desarrollo de la arista **AJ**. Con centro en **A** trace un arco cuyo radio sea igual a la dimensión verdadera de **RK**.
5. Con centro en **J** trace un arco igual a la dimensión verdadera de **JK**, obtenida en la vista de planta (recta orto perfil). La intersección de estos dos arcos determinará el punto **B** en el desarrollo.
6. Se repite el procedimiento hasta completar el desarrollo de la pieza de transición.

SOLUCIÓN 15.2:

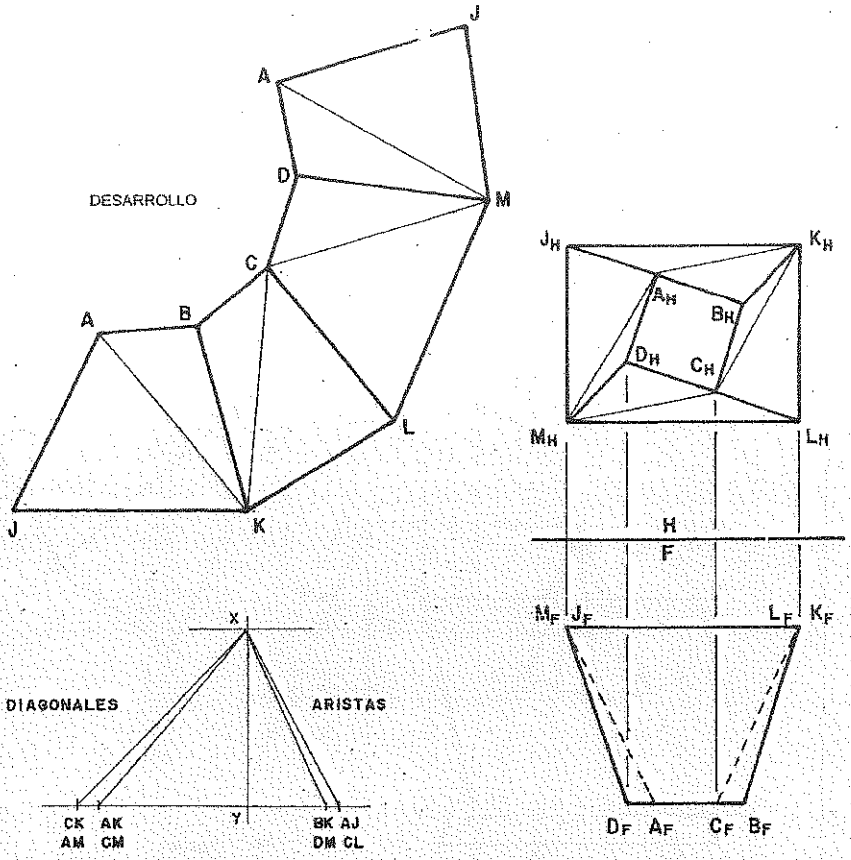


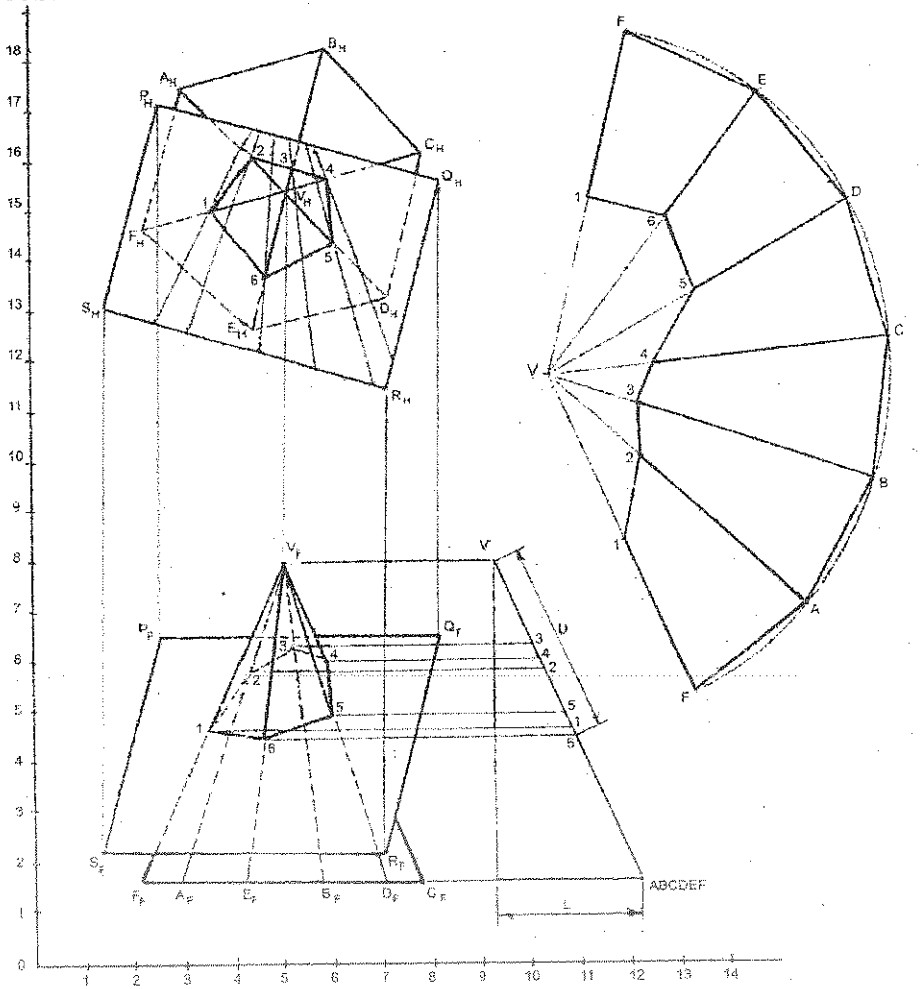
Diagrama D.V.

PROBLEMA 15.3: Por el método del plano cortante, encontrar la intersección de la pirámide recta dada con el plano dado, mostrando completamente la visibilidad. Empezar con la arista más corta y desarrollar la superficie comprendida entre su base y la sección plana. Hacer la tabla de visibilidad.

Tabla de visibilidad

RECTA	VIS		PLANO	VIS		INT	VIS	
	H	F		H	F		H	F
FV	+	+	PQRS	+	+	1	+	+
AV	+	-	PQRS	+	+	2	+	-
BV	+	-	PQRS	+	+	3	+	-
CV	+	+	PQRS	+	+	4	+	+
DV	+	+	PQRS	+	+	5	+	+
EV	+	+	PQRS	+	+	6	+	+

SOLUCIÓN 15.3:

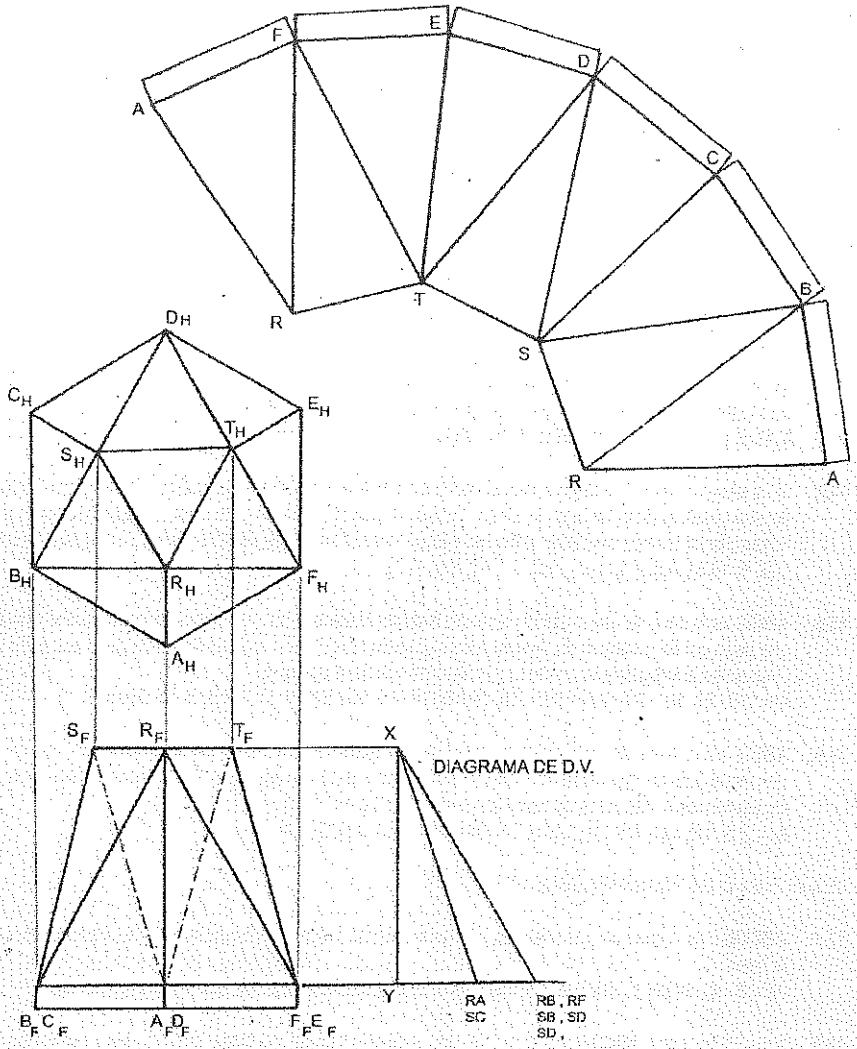


PROBLEMA 15.4: El hexágono ABCDEF y el triángulo RST son los extremos de una pieza de transición. Hacer su desarrollo.

PROCEDIMIENTO:

1. A la derecha de la vista frontal trace la línea XY de longitud igual a la altura del adaptador.
2. A partir del punto Y (y hacia la derecha de él) tome las longitudes, medidas en la vista horizontal, de las líneas **RA**; **RB**, etc.

SOLUCION 15.4:



3. Una estos puntos con el punto **X** en el diagrama de dimensiones verdaderas para obtener sus dimensiones reales de estas líneas.
4. Asuma que **AR** es la línea de costura y trace **AR** para empezar el desarrollo. Con centro en **R** trace un arco cuyo radio sea igual a la dimensión verdadera de **RB**.
5. Con centro en **A** trace un arco igual a la dimensión verdadera de **AB**, obtenida en la vista de planta. La intersección de estos dos arcos determinará el punto **B** en el desarrollo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

DESARROLLO DE PIRAMIDE RECTA.-

15.1. V es el vértice de una pirámide recta y O es el centro de su base. La base es un hexágono regular que puede inscribirse en un círculo de 5cm de diámetro y tiene frontal una diagonal. Desarrollar la porción de la pirámide entre su base y un plano orto frontal que pase por EF. Incluir en el desarrollo la base y la superficie cortada.
V(4, 7.5, 15), O(4, 2.5, 15); E(1, 7.5, ?), F(7.5, 25, ?)

15.2. Q es el centro de la base hexagonal de una pirámide recta y V es su vértice. Una de las diagonales que miden 6cm de la base es frontal. La pirámide está truncada por un plano orto frontal que pasa por LM. Dibujar las vistas frontal y horizontal. Desarrollar la porción de la pirámide bajo el plano, incluyendo la base y la superficie cortada.
Q(15, 2.5, 17), V(15, 7.5, 17); L(17.5, 7.5, ?), M(11. 5. 1, ?)

15.3. AC es una diagonal de un cuadrado frontal, base de una pirámide cuyo vértice es V. La pirámide está truncada por un plano vertical que pasa por PQ. Desarrollar la pirámide truncada.
A(11.5, 6, 19), C(19, 4, 19), V(15, 5, 14); P(10, ?, 19), Q(19, ?, 15).

15.4. O es el centro de un pentágono regular horizontal, y A es una de sus esquinas. El pentágono es la base de una pirámide recta de 5cm de altura. Truncar la pirámide con un plano orto frontal que pase por EK y desarrollar la porción que está arriba del plano. Mostrar en el desarrollo la base y la superficie cortada.
O(4, 5, 16.5), A(0.5, 5, 16.5); E(2, 3.5, ?), K(6, 9, ?).

15.5. ABCD es la base de una pirámide recta de 6cm de altura que ha sido truncada por un plano orto frontal que pasa por EF y cortada para recibir una superficie horizontal y una superficie de perfil que pase por H. Desarrollar la superficie lateral de la porción restante de la pirámide.
A(1, 2.5, 15), B(1, 2.5, 19), C(7.5, 2.5, 19), D(7.5, 2.5, 15), E(2, 3, ?), F(7.5, 5, ?); H(4.5, 5, ?)

15.6. ABCD es la base de una pirámide recta de de 6cm de altura que ha sido truncada por un plano horizontal 2cm debajo del vértice y por un plano orto frontal que pasa por AG. Desarrollar la porción entre los planos como una pieza de transición hecha de hoja de metal.
A(1, 2.5, 15), B(1, 2.5, 20), C(7.5, 2.5, 20), D(7.5, 2.5, 15). G(6, 5, ?)

DESARROLLO DE PIRAMIDES OBLICUAS

15.7. ABCDEF es la base de una pirámide, y V es su vértice. Hacer un desarrollo para la pirámide, incluyendo la base.
A(1, 5, 20), B(2.5, 7, 20), C(5, 7.5, 20), D(7.5, 5, 20), E(6, 2.5, 20), F(4, 2.5, 20); V(6, 5.5, 15).

15.8. V es el vértice y ABCD es la base de una pirámide oblicua truncada por un plano horizontal 2.5cm debajo del vértice. Desarrollar la superficie truncada, incluyendo su base.
D(14, 2.5, 16.5), V(11.5, 7.5, 18); A(14, 2.5, 20), B(19, 2.5, 20), C(19, 2.5, 16.5).

DESARROLLO DE CONOS RECTOS

15.9. v es el vértice y C es el centro de la base, de 7.5cm de diámetro, de un cono recto. Desarrollar la porción del cono que está entre el vértice y un plano orto frontal que pasa por LM.
V(15, 5, 16.5), C(15, 0.5, 16.5); L(12.5, 2.5, ?), M(19, 1, ?).

15.10. X es el centro de un círculo horizontal de 7.5cm de diámetro, base de un cono recto con vértice V. El cono está truncado por un plano orto frontal que pasa por AB. Desarrollar la porción que queda arriba del plano cortante.
X(15, 2.5, 15), V(15, 7.5, 15); A(12.5, 1, ?), B(19, 7.5, ?).

15.11. V es el vértice de un cono recto y C es el centro de su base de 6cm de diámetro. Desarrollar la porción del cono que queda entre los planos orto frontales que pasan por LM y MN.
V(4.5, 10, 15), C(4, 2.5, 15); L(2.5, 9, 7), M(7.5, 6, ?), N(1, 2.5, ?).

15.12. AB, BC y CD son las líneas centrales frontales e una conexión de tubería de codo doble. El tubo AB tiene un diámetro de 30cm y aquel en CD lo tiene de 60cm. Sobre la línea central BC diseñar una pieza de conexión cónica como una porción de cono circular recto y hacer su desarrollo. ESCALA: 1:12.5.
A(5, 10, ?), B(5, 7.5, ?), C(9, 4, ?), D(9, 0.5, ?).

15.13. JA, LA y KA son los ejes frontales de tres tubos que van a conectarse. El tubo con eje JA mide 20cm de diámetro y los otros miden 7.5cm de diámetro. Diseñar la pieza de conexión consistente en un cilindro y dos conos circunscribiendo todos ellos a una esfera de 20cm de diámetro con centro A. Desarrollar la rama izquierda de la conexión. ESCALA: 1:5..
J(5, 11.5, ?), A(5, 7.5, ?), L(9, 4, ?), K(1, 4, ?).

15.14. JR, RS, SL, RT y TK son las líneas centrales para una conexión horizontal de tubos. El tubo JR mide 60cm de diámetro; el tubo LS mide 50cm, y el tubo TK mide 30cm. Dibujar la vista superior de la conexión y desarrollar la rama cónica que tiene el eje RT. ESCALA:: 1:10.
J(1, ?), 14), R(5, ?, 14), S(8, ?, 16.5), L(8, ?, 19), T(6,?, 9), K(9, ?,9).

DESARROLLO DE CONOS OBLICUOS.

15.15. O es el centro de un círculo horizontal de 5cm de diámetro, el cual es la base de un cono oblicuo cuyo vértice es V. Desarrollar la porción del cono que está debajo de un plano orto frontal que pasa por EF.
O(4, 0.5, 17.5), V(7.5, 5, 15); E(4, 5, ?), F(9, 1, ?).

15.16. A es un vértice de un cono oblicuo cuya base horizontal de 6cm de diámetro tiene su centro en Q. desarrollar la porción del cono que está a la izquierda de un plano de perfil que pasa por E.
A(9, 5, 16.5), Q(4, 0.5, 16.5); E(7.5, 5, ?).

15.17. Q es el centro de un círculo horizontal de 15cm de diámetro, extremo superior de un embudo. O es el centro del extremo superior del pitón, el cual es un círculo horizontal de 4cm de diámetro. El pitón mide 7.5cm de largo y el diámetro en el extremo más delgado mide 1cm. Hacer un desarrollo para el embudo y otro para el pitón. ESCALA: 1:2.
Q(16.5, 7.5, 16.5), O(18, 4, 16.5).

15.18. V es el vértice de un cono oblicuo y O es el centro de su base horizontal de 6cm de diámetro. Truncar el cono quitando la porción que queda arriba de un plano horizontal que pasa por H y a la izquierda de un plano de perfil que pasa por H. desarrollar la superficie lateral del cono truncado.
V(12.5, 6, 17), O/17, 0, 5, 17); H(15, 2.5, ?).

15.19. La línea central para una porción de tubo cilíndrico recto de 60cm de diámetro es AB, la línea central para un tubo de 34cm de diámetro es CD. La conexión que une los extremos circulares en B y C es un tronco de cono oblicuo que tiene su vértice en V. desarrollar la conexión.
ESCALA: 1:10. A(5, 9, 12.5), B(5, 7.5, 12.5); C(7.5, 4.5, 12.5), D(10, 3, 12.5), V(10, 0.5, 12.5).

15.20. EF son los centros de los extremos circulares horizontales de una conexión de codo doble de tubería entre dos tubos verticales. El tubo en E es de **15cm** de diámetro y el tubo en F es de **20cm** de diámetro. Dibujar la pieza de conexión y desarrollar por triangulación su mitad frontal.
ESCALA: 1:5. E(2.5, 7.5, 17.5), F(5.5, 2.5, 17.5).

15.21. J es el centro de un círculo frontal de **20cm** de diámetro. L es el centro de un círculo frontal de **30cm** de diámetro. Los círculos son los extremos de una conexión cónica de tubería. Por triangulación, desarrollar la mitad que queda debajo de un plano orto frontal que pasa por **JL**.
ESCALA: 1:5. J(2.5, 2.5, 20), L(6, 5, 16.5).

DESARROLLO DE PRISMAS RECTOS

15.22. Desarrollar solo la superficie lateral del prisma truncado cuyos extremos son **ABCDEFG** y **JKLMOP**.
A(15, 9, 15), B(16.5, 8, 17.5), C(17.5, 7.5, 17), D(19, 10, 16.5), E(19, 10,14.5), F(17.5, 7.5, ?), G(17, ?, 14), J(15, 4, 15), K(16.5, 4, 17.5), L(17, 4, ?), M(19, 5, 16.5), O(19, 5, 14.5), P(17, 4, 14).

15.23. Hacer un desarrollo solo de la superficie lateral del prisma truncado cuyo extremo superior es **ABCDEFG** y cuyo extremo inferior es **RSTUVWX**.
A(1, 12.5, 15), B(4, ?, 17.5), C(5, 10, 17.5), D(5.5, 10.5, 17.5), E(6, 11.5, 15), F(5, 10, 14.5), G(4, ?, 14), H(1, 9, 15), S(2.5, 5, 16.5), T(4, ?, 17.5), U(5.5, ?, 17.5), V(6 7.5, 15), W(4, ?, 14), X(2.5, 5, 14.5).

15.24. Hacer un desarrollo solo de la superficie lateral del prisma que tiene **ABCD** como extremo superior y **EFGHIJ** como extremo inferior.
A(1, 10, 16.5), B(2.5, 12.5, 17.5), C(5, 10, 16.5), D(2.5, 12.5, 15), E(1, 5, 16.5), F(2.5,5,17.5), G(4,7.5,17), H(5,6,16.5), I(4,7.5,15.5), J(2.5,5,15).

15.25. O es el centro de un cuadrado frontal. Una de sus diagonales que mide **6cm**, es vertical. El cuadrado es la base de una pirámide cuyo vértice es V. Desarrollar la porción de la pirámide entre su base y un plano vertical que pasa por **LM**.
O(16.5, 4, 20), V(12.5, 6, 15); L(12, ?, 20), M(17.5, ?, 16.5).

15.26. V es el vértice de una pirámide cuya base es **ABCDE** Desarrollar la porción de la pirámide entre su base y un plano orto frontal que pase por **JK**. Incluir en el desarrollo la base y la superficie cortada.
V(9, 6, 17.5), A(0.5, 1, 17.5), B(2.5, 1, 20), C(5.5, 1, 20), D(6, 1, 18), E(2.5, 1, 16.5);
J(5, 6, ?), K(7.5, 1, ?).

15.27. O es el centro de un hexágono regular frontal que mide 5cm entre sus lados opuestos, y que tiene vertical una diagonal. El hexágono es la base común de dos pirámides que tienen por vértice J y K. El extremo hexagonal está abierto. Dibujar las pirámides y desarrollar la mitad izquierda de la pieza.
O(5, 4, 15); J(1, 4, 20), K(9, 4, 20).

15.28. V es el vértice de una pirámide cuya base es un pentágono regular horizontal con centro O y una esquina en A. Truncar la pirámide con un plano de perfil que pase por A y desarrollar la superficie lateral de la porción truncada.
V(9, 6, 16.5), O(4, 1, 16.5); A(7, 1, 16.5).

15.29. **AC** es una diagonal de un cuadrado horizontal, el cual es el extremo abierto de una conexión. El cuadrado es la base común de dos pirámides con vértices **J** y **K**, que han sido truncadas por un plano horizontal **4cm** debajo de **AC**. Desarrollar la mitad derecha.
A(15, 6, 15), C(15, 6, 20); J(11.5, 0.5, 17.5), K(19, 0.5, 17.5).

15.30. AD es una diagonal de un hexágono horizontal, base de una pirámide con vértice V. La porción izquierda inferior está cortada por un plano horizontal y un plano de perfil que pasa por K. Desarrollar la superficie lateral.
A(3, 1, 15), D(3, 1, 20); V(6, 6, 17.5), K(3, 2.5, ?)

15.31. AC es una diagonal de un cuadrado horizontal, base de una pirámide con vértice V. La pirámide está truncada por un plano orto frontal que pasa por JK. Desarrollar la pirámide truncada, incluyendo la base y la superficie cortada.
A(12.5, 1, 20), C(15, 1, 14); V(17.5, 6, 15); J(12.5, 4, ?), k(19, 5, ?)

15.32. Desarrollar la superficie lateral y la base del prisma recto truncado cuya base es ABCDE. El extremo frontal RSTUVWX es vertical.
A(15, 4.5, 15), B(17.5, 6, 15), C(19, 5,15), D(19, 2.5, 15), E(17, 2.5, 15).
R(15, 4.5, 11.5), S(16.5, ?, 12.5), T(17.5, 6, 11.5), U(19, 6, 11.5), V(19, 2.5, 10),
W(17, 2.5, 12), X(16.5, 3, 12.5).

15.33. Q es el centro de un pentágono regular frontal, sección recta de un prisma truncado, y J es una de sus esquinas. Los extremos del prisma son planos verticales y son ABCDEF y JKLMNOP. El contorno de la vista frontal es un pentágono regular. Desarrollar la superficie lateral del prisma truncado.
Q(4, 5, 12.5), J(1, 5, 12.5);
A(1, 5, 11.5), C(4, ?, 12.5), D(?; ?; 10), E(?, ?, 12.5).

15.34. JK es el ej e de un prisma recto truncado una de cuyas secciones rectas es un pentágono regular. Los extremos son planos verticales. A es una esquina del extremo frontal. R es una esquina del extremo posterior. Desarrollar el prisma incluyendo los extremos.
J(4, 2.5, 10), K(4, 2.5, 15); A(6, 2.5, 12.5), R(6, 2.5, 14).

DESARROLLO DE PRISMAS OBLICUOS

15.35. ABC y DEF son las bases de un prisma oblicuo. Desarrollar la superficie lateral del prisma.
A(2.5, 10, 16.5), B(6, 10, 17.5), C(5, 10, 15).
D(6, 5, 16.5), E(10, 5, 17.5), F(9, 5, 15).

15.36. ABCD y JKLM son los extremos de un prisma oblicuo. Desarrollar la superficie lateral del prisma.
A(17, 5.5, 10), B(19, 4, 10), C(17.5, 2.5, 10), D(15.5, 4.5, 10).
J(13, 5.5, 16.5), K(15, 4, 16.5), L(14, 2.5, 16.5), M(12, 4.5, 16.5).

15.37. ABC y JKL son los extremos de un prisma oblicuo. Desarrollar la superficie lateral del prisma.
A(11.5, 1, 19), B(12.5, 4, 19), C(15, 2.5, 19),
J(15, 5, 14), K(16.5, 7.5, 14), L(19, 6, 14).

15.38. ABCD y EFGH son los extremos de un prisma oblicuo. Desarrollar la superficie lateral del prisma.
A(1, 7.5, 15), B(2.5, 7.5, 16.5), C(4.5, 7.5, 14.5), D(3, 7.5, 13).
E(6, 2.5, 16), F(7.5, 2.5, 17.5), G(9.5, 2.5, 15.5), H(8, 2.5, 14).

15.39. JK es el eje de un prisma oblicuo que tiene bases horizontales. La base superior es ABCDE. Desarrollar la superficie lateral del prisma.
J(2.5, 6, 14), K(6, 1, 17.5);
A(1, 6, 13), B(1, 6, 15), C(2.5, 6, 15), D(4, 6, 14), E(4, 6, 12.5).

DESARROLLO DE CILINDROS RECTOS

15.40. ABCD es la base de una chimenea con tubo vertical de **30cm.** E es el centro del extremo circular horizontal de la parte cilíndrica de la chimenea. Desarrollar la chimenea.
A(2.5, 5, 20), B(8, 5, 18), C(6, 0.5, 12.5), D(0.5, 0.5, 14.5). E(4.5, 6, 16.5), ESCALA: 1:5.

15.41. J es el centro de un círculo frontal de **15cm** de diámetro, extremo frontal de un tubo horizontal con eje JK, cortado para recibir los planos verticales que pasan por CA y DA, que se cortan en AB. Desarrollar el tubo. **ESCALA: 1:5. B(5, 1, 4); J(5, 5, 11.5), K(5, 5, 14); C(1, ?, 16.5), A(5, 9, 14), D(7.5, ?, 17.5).**

15.42. AB y BC son las líneas centrales de una conexión para un tubo de **20cm** de diámetro. Las dos piezas de la conexión son cilindros rectos truncados, y los extremos en A y C son secciones rectas. Desarrollar la pieza vertical. **ESCALA: 1:5. A(4, 10, 16.5), B(4, 6, 16.5), C(7.5, 4.5, 16.5).**

15.43. A, B y C son los extremos de una conexión "Y" de tubería que tiene dos ejes frontales AD, BD, y CD. La conexión estaba hecha con tubo de **50cm** de diámetro. Desarrollar la sección que tiene el eje CD. **ESCALA: 1:12.5. A(5, 11.5, ?), B(2, 4.5, ?), C(8, 4.5, ?); D(5, 7.5, ?).**

15.44. JK es el eje de un cilindro de **4cm** de diámetro, truncado en la parte superior por planos que pasan por AJ y JB y en la parte inferior por planos orto frontales que se inclinan hacia abajo desde K y que pasan por KD y KC. Desarrollar el cilindro.
J(2.5, 10, 15), K(2.5, 5, 15); A(0.5, 9, ?), B(4.5, 7.5, ?). D(1, 2.5, ?), C(4.5, 4, ?).

15.45. JK es el eje de un cilindro circular recto de **5cm** de diámetro. El extremo superior es horizontal. El extremo inferior está cortado para recibir un plano horizontal que pasa por AB y un plano orto frontal que pasa por BC. Los dos planos terminan en su intersección BD. Desarrollar el cilindro.
J(5, 10, 17.5), K(5, 5, 17.5); A(0.5, 7.5, ?), B(4.5, 7.5, ?). C(9, 4, ?), D(4.5, 7.5, ?).

15.46. AB, BC, CD y CE son las líneas centrales de una conexión de tubería y están en posición frontal. Los tubos circulares son tangentes a esferas de **30cm** de diámetro con centros en B y C. dibujar la conexión y desarrollar la rama que tiene BC como línea central. **ESCALA. 1:10.**
A(2.5, 12.5, ?), B(2.5, 10, ?), C(5, 5, ?), D(8, 5, ?=, E(5, 2.5, ?).

15.47. Se tiene un recipiente en forma de cilindro circular recto de 6cm de altura y 6cm de diámetro de espesor despreciable. Si en el exterior a 1cm de la base hay una araña y en la generatriz diametralmente opuesta hay una mosca aprisione a la araña, yendo sobre la superficie del recipiente sin volar.

DESARROLLO DE CILINDROS OBLICUOS

15.48. C s el centro de un círculo frontal de 15cm de diámetro, y D es el centro de un círculo de perfil de 15cm de diámetro. Los círculos son extremos de un tubo. desarrollar el tubo.
C(14, 2.5, 16.5), D(19, 2.5, 11.5). ESCALA: 1:5

15.49. AB es e eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares frontales de 3cm de diámetro. Desarrollar el cilindro. A(17.5, 6, 20), B(14, 2.5, 15).

15.50. A y B son los centros horizontales de **15cm** de diámetro de dos tubos verticales que van a conectarse con un cilindro oblicuo cuyos extremos son los extremos circulares de los tubos. Un ramal del mismo tamaño tiene el eje AC. Desarrollar el ramal izquierdo de la conexión requerida que tenga AB como eje. **A(17.5, 12.5, 17.5), B(14, 7.5, 17.5), C(19.5, 10, 17.5). ESCALA: 1:5.**

15.51. LM es el eje de un cilindro oblicuo que tiene extremos circulares horizontales de 5cm de diámetro. Desarrollar el cilindro.
J(3, 3.5, 16), K(7.5, ?, 18.5).

15.52. LM es el eje de un pitón de descarga cilíndrico en un tanque. El extremo inferior del pitón es un círculo horizontal, de 12.5cm de diámetro. El extremo superior está cortado por un plano horizontal que pasa por BL y un plano de perfil que pasa por AL como para acomodarse al fondo y al lado del tanque. Desarrollar el pitón: ESCALA: 1:5. L(4, 10.17.5), M(7.5, 5, 17.5); B(1, 10, ?), A(4, 14, ?).

15.53. AD es una diagonal de un hexágono horizontal, extremo superior de un embudo.
A(2, 10, 15), D(8, 10, 15); R(4, 6, 15.5), S(6, 6.5, 15.5), T(6, 6, 14.5), U(4, 6, 14.5).

15.54. El rectángulo JKLM y el cuadrado ABCD son los extremos de una pieza de transición. Hacer su desarrollo. J(14, 10, 17.5), K(19, 10, 17.5), L(19, 10, 14), M(14, 10, 14).
A(15.5, 6, 17), B(17.5, 6, 16.5), C(17, 6, 14.5), D(15, 6, 15).

15.55. Una tolva tiene una abertura de alimentador ABCD y una abertura de descarga EFGH. Desarrollar la tolva. A(16.5, 7.5, 17.5), B(19, 7.5, 17.5), C(19, 7.5, 12.5), D(16.5, 7.5, 12.5)
E(14.5, 2.5, 17), F(15.5, 2.5, 17), G(15,5, 2.5, 15), H(14.5, 2.5, 15).

15.56. PQRS es la abertura del alimentador de una tolva. CDEF es la abertura de descarga. Desarrollar la tolva.
P(1, 10, 17.5), Q(5, 10, 17.5), R(5, 10, 12.5), S(1, 10, 12.5).
C(4.5, 5, 15), D(6, 6, 15), E(6, 6, 14), F(4.5, 5, 14).

15.57. El rectángulo ABCD y un círculo horizontal de 4cm de diámetro con centro O son los extremos de una pieza de transición. Hacer un desarrollo de ella.
A(2, 6, 17.5), B(8, 6, 17.5), C(8, 6, 12.5), D(2, 6, 12.5), O(5, 10, 15).

15.58. El círculo frontal de 5cm de diámetro con centro, Q y el cuadrado RSTU son los extremos de una pieza de transición. Desarrollar la pieza de transición.
Q(16.5, 7.5, 12.5). R(15, 9, 17.5), S(17.5, 9, 17.5), T(17.5, 6, 17.5), U(15, 6, 17.5).

15.59. K es el centro de un cuadrado orto frontal que se inclina hacia abajo 45° y hacia la izquierda; dos de sus lados frontales miden 45cm J es el centro de un círculo horizontal de 45cm de diámetro. Diseñar una pieza de transición para conectar las dos aberturas y desarrollar su mitad posterior.
ESCALA: 1:10; K(5, 2.5, 17.5); J(2.5, 6, 17.5)

15.60. En un sistema de aire acondicionado, el tubo de 60cm de diámetro que termina en el círculo frontal con centro O, y el tubo rectangular que comienza en ABCD, están conectados por una pieza de transición. Desarrollar la mitad superior de la pieza. ESCALA: 1:10. O(6, 4, 9),
A(8, 7.5, 13), B(10, 7.5, 10), C(10, 0.5, 10), D(8, 0.5, 13).

15.61. Diseñar una pieza de transición para conectar el rectángulo ABCD con el círculo horizontal de 4cm de diámetro que tiene su centro en O. Desarrollar su mitad posterior.
A(12.5, 4, 18), B(15, 1, 18), C(15, 1, 12), D(12.5, 4, 12); O(16.5, 5, 15).

15.62. El rectángulo ABCD y el círculo frontal de 30cm con centro Q son los extremos de una pieza de transición. Hacer su desarrollo. ESCALA: 1:10. Q(6, 5, 14).
A(1, 5.5, 17.5), B(5, 5.5, 17.5), C(5, 4.5, 17.5), D(1, 4.5, 17.5).

15.63. El rectángulo **ABCD** y el círculo horizontal de **30cm** de diámetro con centro **Q** son los extremos de una pieza de transición. Desarrollar la mitad posterior de la pieza. **ESCALA1:10.**
A(2, 2, 22), B(8, 6, 22), C(8, 6, 17), D(2, 2, 17); Q(5, 9, 19.5).

15.64. El círculo frontal de **15cm** de diámetro con centro **O** y el rectángulo **ABCD** son los extremos de una pieza de transición. Desarrollar la pieza. **ESCALA: 1:5 D(15, 2.5, 16.5).**
O(17.5, 6, 14); A(15, 10, 16.5), B(16.5, 10, 17.5), C(16.5, 2.5, 17.5).

DESARROLLO DE CODOS

15.65. **JK** y **KM** son las líneas centrales frontales de dos tubos de **45cm** de diámetro que van a conectarse por un codo de cuatro piezas. **J** y **M** son los extremos del codo que tiene un radio mínimo de curvatura de **60cm**. Dibujar la vista frontal del codo y desarrollar una pieza del extremo y la pieza adyacente.
J(4.5, 7, ?), K(7, 2.5, ?), M(12, 2.5, ?), ESCALA: 1:10.

15.66. **CD** y **DE** son las líneas centrales de dos tubos de **15cm** de diámetro, que van a conectarse por un codo de cuatro piezas. **C** y **E** son los extremos del codo. Diseñar el codo con un mínimo radio de curvatura que mida **22.5cm** y desarrollar una de las piezas de los extremos y la pieza adyacente.
ESCALA: 1:5. C(2.5, 10, 14), D(2.5, 5, 14), E(7, 2.5, 14).

15.67. Los rectángulos **ABCD** y **EFGH** son los extremos de un codo prismático de cuatro piezas. El radio mínimo de curvatura es de **45cm**. Dibujar la vista frontal y superior del codo. Desarrollar una pieza del extremo y la pieza adyacente.
A(15.10, 17), B(19.5, 10, 17), C(19.5, 10, 15), D(15.5, 10, 15).
E(11.5, 5.5, 15), F(11.5, 5.5, 17), G(11.5, 2, 17), H(11.5, 2, 15). ESCALA: 1:12.5.

15.68. **PQ** y **QR** son las líneas centrales de dos ductos rectangulares horizontales que van a conectarse por un codo de tres piezas. **ABCD** es el extremo frontal del codo. El otro extremo es vertical y pasa por **R**. El radio mínimo de curvatura es de **60cm**. Dibujar la vista superior. Desarrollar una pieza del extremo y la pieza adyacente. **ESCALA: 1:12.5.**
P(3, 6, 10), Q(3, 6, 15), R(7.5, ?, 17.5).
A(0.5, 7.5, 10), B(5.5, 7.5, 10), C(5.5, 5, 10), D(0.5, 5, 10).

DESARROLLO MÉTODO POR TRIANGULACIÓN.

15.69: **AD** es una diagonal de un hexágono horizontal, extremo superior de un embudo. El extremo inferior es el rectángulo **RSTU**. Desarrollar el embudo. **A(2,10,15), D(8,10,15); R(4,6,15.5), S(6,6.5,15.5), T(6,6,14.5), U(4,6,14.5).**

15.70: El rectángulo **JKLM** y el cuadrado **ABCD** son los extremos de una pieza de transición. Hacer su desarrollo. **J(14,10,17.5), K(19,10,17.5), L(19,10,14), M(14,10,14);**
A(15.5,6,17), B(17.5,6,16.5), C(17,6,14.5), D(15,6,15).

15.71: Una tolva tiene una abertura de alimentador **ABCD** y una abertura de descarga **EFGH**. Desarrollar la tolva. **A(16.5,7.5,17.5), B(19,7.5,17.5), C(19,7.5,12.5), D(16.5,7.5,12.5); E(14.5,2.5,17), F(15.5,2.5,17), G(15,5,2.5,15), H(14.5,2.5,15).**

15.72: PQRS es la abertura del alimentador de una tolva. CDEF es la abertura de descarga. Desarrollar la tolva. P(1,10,17.5), Q(5,10,17.5), R(5,10,12.5), S(1,10,12.5); C(4.5,5,15), D(6,6,15), E(6,6,14), F(4.5,5,14).

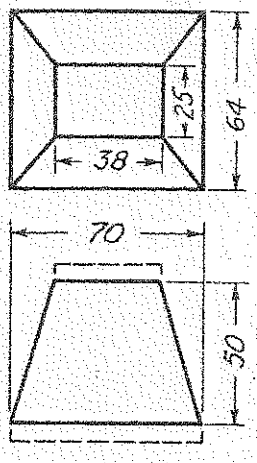
15.73: El rectángulo ABCD y un círculo horizontal de 4cm de diámetro con centro en O son los extremos de una pieza de transición. Desarrollar la pieza de transición. A(2,6,17.5), B(8,6,17.5), C(8,6,12.5), D(2,6,12.5), O(5,10,15).

15.74: El rectángulo ABCD y el círculo frontal de 30cm con centro Q son los extremos de una pieza de transición. Hacer su desarrollo. ESCALA: 1:10. Q(6,5,14); A(1,5.5,17.5), B(5,5.5,17.5), C(5,4.5,17.5), D(1,4.5,17.5).

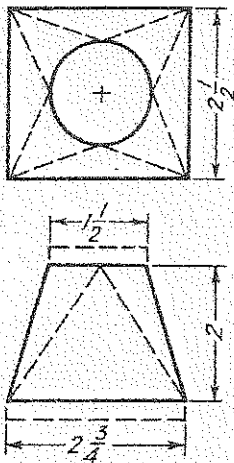
15.75: Desarrollar la pieza de transición cuyas bases son rectangular y cuadrangular. Desarrollar la superficie lateral incluyendo sus bases.

15.76: Desarrollar la pieza de transición cuyas bases son circular y cuadrangular. Desarrollar la superficie lateral incluyendo sus bases. Convertir a unidades métricas.

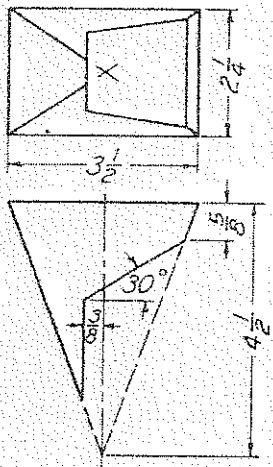
15.77: Desarrollar la pieza de transición cuyas bases se muestran en la figura adjunta. Desarrollar la superficie lateral incluyendo sus bases. Convertir a unidades métricas.



P15.75



P15.76



P15.77